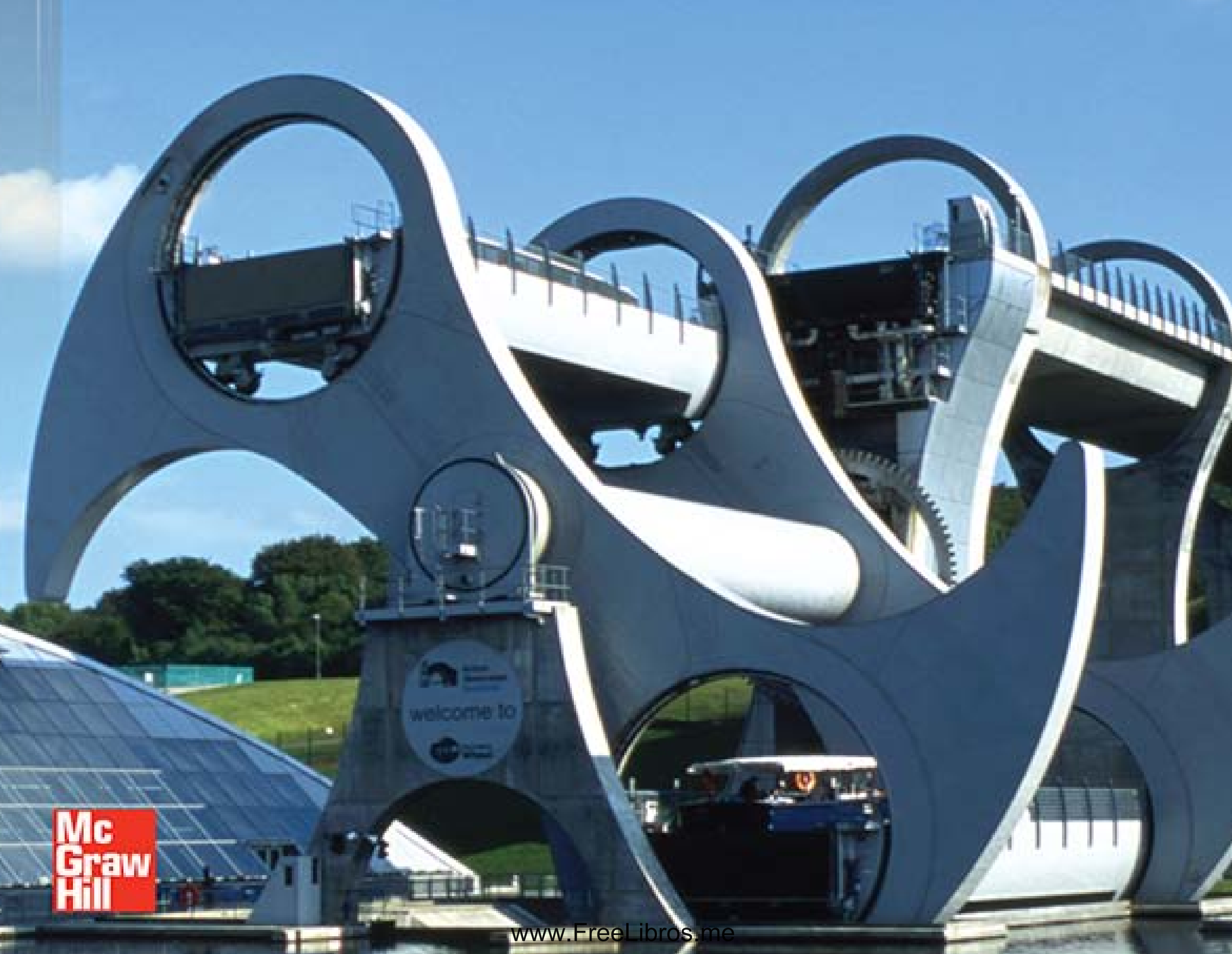
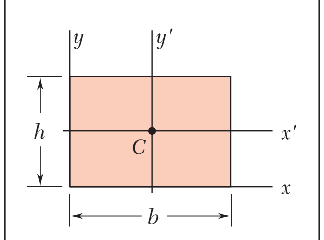
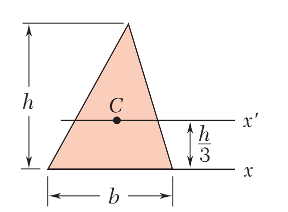
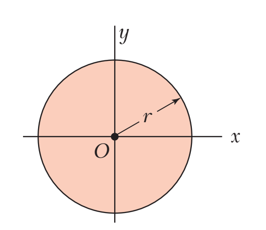
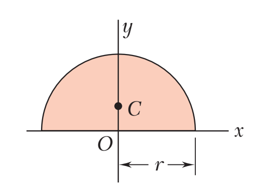
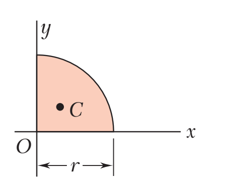
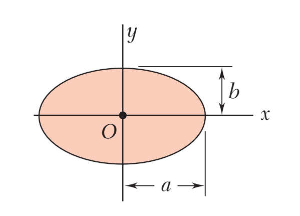
MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS
DINÁMICA

BEER | JOHNSTON | CORNWELL NOVENA EDICIÓN

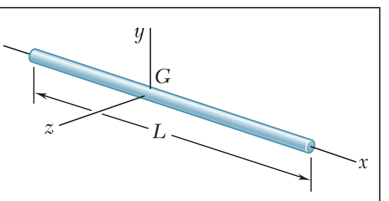
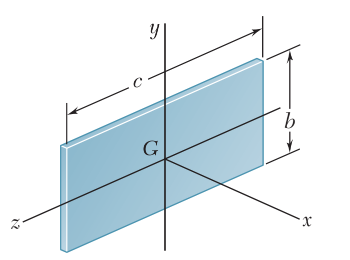
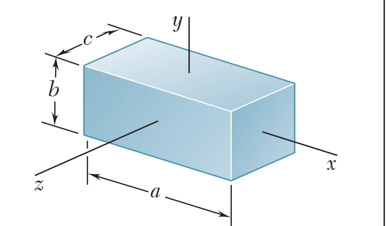
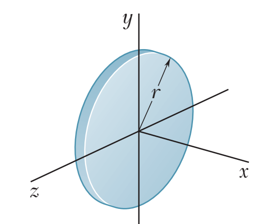
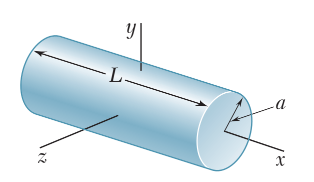
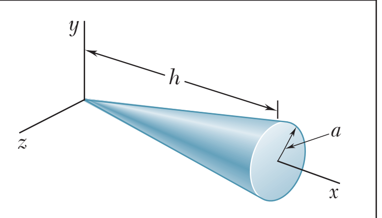
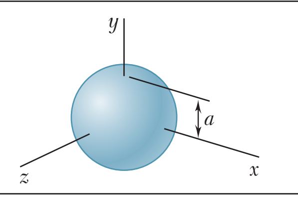




Momentos de inercia de formas geométricas comunes

Rectángulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	
Triángulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	
Círculo $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	
Semicírculo $I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$	
Cuarto de círculo $I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$	
Elipse $\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$	

Momentos de inercia de formas geométricas comunes

Barra delgada $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$	
Placa rectangular delgada $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$	
Prisma rectangular $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	
Disco delgado $I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$	
Cilindro circular $I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$	
Cono circular $I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$	
Esfera $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$	



MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Dinámica

REVISIÓN TÉCNICA

ARGENTINA

Ricardo Bosco	*Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires*

COLOMBIA

Carlos Eduardo Muñoz Rodríguez	*Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá*
Jaime Guillermo Guerrero Casadiego	*Universidad Nacional de Colombia*
Rubén Darío Arboleda Vélez	*Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín*
Wilson Rodríguez Calderón	*Universidad de la Salle, Bogotá*

MÉXICO

Antonio Rubén Benítez Gasca	*Universidad Veracruzana*
Danelia Hernández Suárez	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad Obregón*
Carlos Mellado Osuna	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus La Marina*
Eduardo Soberanes Lugo	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Sinaloa*
Enrique Zamora Gallardo	*Universidad Anáhuac, campus Norte*
Francisco Terán Arévalo	*Instituto Tecnológico Regional de Chihuahua*
Gladys Karina Ruiz Vargas	*Universidad Anáhuac, campus Norte*
Ignacio Arrioja Cárdenas	*Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, Chis.*
Ignacio Ramírez Vargas	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Hidalgo*
José Antonio Corona López	*Instituto Tecnológico de Veracruz*
José Luis Carranza Santana	*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional*
Juan Abugaber Francis	*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional*
Juan Ocáriz Castelazo	*Universidad Nacional Autónoma de México*
Luis Adolfo Torres González	*Universidad Iberoamericana, campus León*
Luis G. Cabral Rosetti	*Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica, Santiago de Querétaro*
Martín Darío Castillo Sánchez	*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional*
Raúl Escalante Rosas	*Universidad Nacional Autónoma de México*
Raúl Soto López	*Universidad de Occidente, campus Culiacán*

Novena edición

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Dinámica

FERDINAND P. BEER (finado)
Late of Lehigh University

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
University of Connecticut

PHILLIP J. CORNWELL
Rose-Hulman Institute of Technology

Revisión técnica:

Miguel Ángel Ríos Sánchez
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey, campus Estado de México

Felipe de Jesús Hidalgo Cavazos
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey, campus Monterrey



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Jesús Elmer Murrieta Murrieta
Gabriel Nagore Cazares

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS
DINÁMICA
Novena edición



Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma Núm. 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-13: 978-607-15-0261-2
(ISBN: 970-10-6102-0 edición anterior)

Traducido de la novena edición en inglés de: Vector mechanics for engineers. Dynamics.

ISBN: 0-07-724916-8

1234567890 109876543210

Impreso en México *Printed in Mexico*

Acerca de los autores

Los autores de esta obra con frecuencia son cuestionados acerca de cómo fue que, estando uno en Lehigh y otro en la University of Connecticut, empezaron a escribir sus libros juntos.

La respuesta a esta pregunta es sencilla. Russ Johnston inició su carrera académica en el departamento de ingeniería civil y mecánica de Lehigh University y allí conoció a Ferd Beer, quien había comenzado a trabajar en ese departamento dos años antes y estaba a cargo de los cursos de mecánica.

Ferd se sintió muy complacido al descubrir que el joven contratado para impartir cursos de ingeniería estructural en posgrado no sólo estaba dispuesto, sino también ansioso por ayudarlo a reorganizar los cursos de mecánica. Ambos creían que dichos cursos deberían enseñarse a partir de unos cuantos principios básicos, y que los distintos conceptos involucrados serían mejor comprendidos y recordados por los estudiantes si les eran presentados en forma gráfica. Juntos escribieron apuntes para las clases de estática y dinámica, a los cuales posteriormente les agregaron problemas que supusieron interesantes para los futuros ingenieros, y poco después produjeron el manuscrito de la primera edición de *Mecánica para ingenieros*, el cual se publicó en junio de 1956.

Al publicarse la segunda edición de *Mecánica para ingenieros* y la primera de *Mecánica vectorial para ingenieros*, Russ Johnston estaba en el Worcester Polytechnic Institute, y en las ediciones subsecuentes en la University of Connecticut. Mientras tanto, Ferd y Russ habían asumido funciones administrativas en sus respectivos departamentos y ambos se dedicaban a la investigación, la consultoría, y a asesorar estudiantes de posgrado —Ferd en el área de procesos estocásticos y vibraciones aleatorias, y Russ en el área de estabilidad elástica y en diseño y análisis estructurales—. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había disminuido, y continuaron impartiéndolos mientras revisaban sus libros y comenzaban a preparar el manuscrito de la primera edición de *Mecánica de materiales*.

La colaboración entre estos dos autores ha abarcado muchos años y muchas revisiones exitosas de todos sus libros, y las contribuciones de Ferd y Russ a la educación en ingeniería los han hecho acreedores de numerosas distinciones y reconocimientos. Recibieron el Western Electric Fund Award por parte de sus respectivas secciones regionales de la American Society for Engineering Education por su excelencia en la instrucción de estudiantes de ingeniería y, además, el Distinguished Educator Award de la

división de mecánica de esa misma asociación. A partir de 2001, el reconocimiento denominado New Mechanics Educator Award de la división de mecánica ha sido nombrado en honor de Beer y Johnston.

Ferdinand P. Beer. Nacido en Francia y educado en Francia y Suiza, Ferd obtuvo una maestría en la Sorbona y un doctorado en ciencias en el área de mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Emigró a Estados Unidos después de servir en el ejército francés durante la primera parte de la Segunda Guerra Mundial e impartió clases por cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de ingeniería y artes Williams-MIT. Después de su servicio en esta institución, Ferd ingresó al profesorado de Lehigh University, donde enseñó durante treinta y siete años. Ocupó varios puestos, incluyendo el de profesor distinguido de la universidad y director del departamento de Mecánica e Ingeniería Mecánica. En 1995 recibió el grado de Doctor *honoris causa* en Ingeniería por la Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nacido en Filadelfia, Russ posee un título de ingeniero civil de la Universidad de Delaware y un doctorado en ciencias en el área de ingeniería estructural del Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT). Impartió clases en Lehigh University y en el Worcester Polytechnic Institute antes de ingresar al profesorado de la Universidad de Connecticut, donde ocupó el puesto de director del departamento de Ingeniería Civil y enseñó durante veintiséis años. En 1991 recibió el Outstanding Civil Engineer Award, sección Connecticut, que otorga la American Society of Civil Engineers.

Phillip J. Cornwell. Phil posee un título en Ingeniería Mecánica de la Texas Tech University, y grados de maestría y doctorado en Ingeniería Mecánica y aeroespacial por la Universidad de Princeton. En la actualidad es profesor de Ingeniería Mecánica en el Instituto Rose-Hulman de Tecnología, donde ha impartido clases desde 1989. Sus intereses actuales incluyen dinámica estructural, monitoreo de la salud estructural, y educación en ingeniería a nivel de licenciatura. En los veranos, Phil trabaja en el Laboratorio Nacional de Los Álamos, donde es responsable de la escuela de verano de dinámica, y realiza investigación en el área de monitoreo de la salud estructural. Recibió un premio en educación SAE Ralph R. Teetor en 1992, el premio escolar por impartición de clases en Rose-Hulman en 2000, y el premio por impartición de clases del profesorado de Rose-Hulman en 2001.

Contenido

19
VIBRACIONES MECÁNICAS

Apéndice A
ALGUNAS DEFINICIONES Y PROPIEDADES ÚTILES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL

Apéndice B
MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

Apéndice C
FUNDAMENTOS PARA LA CERTIFICACIÓN EN INGENIERÍA EN ESTADOS UNIDOS

Prefacio

OBJETIVOS

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos. Se espera que este texto y el tomo complementario, *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*, permitirán que el profesor alcance este objetivo.

ENFOQUE GENERAL

En la parte inicial del primer tomo se introdujo el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la estática, así como en la solución de muchos problemas. De manera similar, el concepto de diferenciación vectorial se introduce al inicio de este volumen, y el análisis vectorial se utiliza a lo largo de la presentación de la dinámica. Este planteamiento conduce a una especificación más concisa de los principios fundamentales de la mecánica. También hace posible analizar muchos problemas en cinemática y cinética que no podrían resolverse mediante métodos escalares. Sin embargo, se mantiene el énfasis en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y en su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta útil.

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial. Una de las características del enfoque usado en estos tomos es que la mecánica de *partículas* se ha separado en forma clara de la mecánica de *cuerpos rígidos*. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *Estática*, la estática de partículas se estudia primero, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucran sólo fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera posteriormente, cuando ya se ha hecho la presentación de los productos escalar y vectorial de dos vectores; estos conceptos se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje.

- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y cantidad de movimiento, y se aplican en primera instancia a la solución de problemas que involucran sólo partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples. Como este texto está diseñado para un primer curso sobre dinámica, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanza una madurez definitiva al analizar los aspectos más relevantes de los problemas considerados, y al ampliar los métodos de aplicabilidad general. Por ejemplo, el concepto de energía potencial se analiza para el caso general de una fuerza conservativa. Además, el estudio del movimiento plano de cuerpos rígidos está ideado para conducir de manera natural al estudio de su movimiento general en el espacio. Lo anterior se cumple tanto en cinemática como en cinética, donde el principio de equivalencia de fuerzas externas y efectivas se aplica de manera directa al análisis de movimiento plano, lo que facilita la transición al estudio del movimiento tridimensional.

Los principios fundamentales se utilizan en el contexto de aplicaciones simples. Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido a este nivel. Sin embargo, en virtud de que el proceso de aprendizaje es primordialmente *inductivo*, se consideran primero las aplicaciones más simples. Por ejemplo:

- La cinemática de partículas (capítulo 11) antecede a la cinemática de cuerpos rígidos (capítulo 15).
- Los principios fundamentales de la cinética de cuerpos rígidos se aplican primero a la solución de problemas bidimensionales (capítulos 16 y 17), los cuales pueden ser visualizados con mayor facilidad por los estudiantes, mientras que los problemas tridimensionales se posponen hasta el capítulo 18.

La presentación de los principios de la cinética se unifica. La octava edición de *Mecánica vectorial para ingenieros* tiene la presentación unificada de los principios de la cinética que caracterizaron a las siete ediciones anteriores. Los conceptos de cantidad de movimiento lineal y angular se presentan en el capítulo 12, de modo que la segunda ley de Newton para el movimiento pueda presentarse no sólo en su forma convencional $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, sino también como una ley que relaciona, respectivamente, la suma de fuerzas que actúan sobre una partícula y la suma de sus momentos con las razones de cambio de la cantidad de movimiento lineal y angular de la partícula. Esto hace posible una introducción temprana del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, y un análisis más lógico del movimiento de una partícula bajo una fuerza central (sección 12.9). Aún más importante, este planteamiento puede extenderse sin dificultad al movimiento de un sistema de partículas (capítulo 14) y efectuar un trata-

miento más conciso y unificado de la cinética de cuerpos rígidos en dos y tres dimensiones (capítulos 16 a 18).

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introdujeron al principio del libro de estática, y su importancia se enfatizó a lo largo de todo el texto. Estos diagramas se emplean no sólo para resolver problemas de equilibrio, sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los principios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en las "ecuaciones de los diagramas de cuerpo libre" en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido a la fecha una amplia aceptación en Estados Unidos entre los profesores de mecánica. Por lo tanto, en la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se utilizan presentaciones en cuatro colores para distinguir los vectores. El color se ha usado no sólo para mejorar la calidad de las ilustraciones, sino también para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden encontrar. En virtud de que no había intención de colorear por completo este texto, en un capítulo dado se utiliza el mismo color para representar el mismo tipo de vector. Por ejemplo, a lo largo del tomo de estática, el rojo se utiliza en forma exclusiva para representar fuerzas y pares, mientras que los vectores de posición se muestran en azul y las dimensiones en negro. Esto vuelve más fácil para los estudiantes la identificación de las fuerzas que actúan sobre una partícula o un cuerpo rígido dado y la comprensión de los problemas resueltos y de otros ejemplos proporcionados en el libro. En *Dinámica*, para los capítulos de cinética, el rojo se usa de nuevo para fuerzas y pares, así como para fuerzas efectivas. El rojo también se utiliza para representar impulsos y cantidades de movimiento en ecuaciones de diagramas de cuerpo libre, mientras que el verde es utilizado para velocidades, y el azul en aceleraciones. En los dos capítulos de cinemática, donde no se involucra ninguna fuerza, se usan azul, verde y rojo, respectivamente, para indicar desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades del SI y las unidades del sistema inglés. Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de unidades (unidades métricas SI), las unidades SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y un 60 por ciento de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que

se adecuará mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa algo más que aplicar factores de conversión. Como el sistema de unidades SI es absoluto basado en el tiempo, la longitud y la masa, mientras el sistema inglés es gravitacional basado en el tiempo, la longitud y la fuerza, se requieren diferentes enfoques en la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayoría de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades del sistema inglés, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$). Por tanto, los autores creen que los problemas asignados a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de dinámica. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las secciones opcionales se encuentran los métodos gráficos para la resolución de problemas de movimiento rectilíneo, trayectoria de una partícula bajo una fuerza central, desviación de corrientes de fluido, problemas que implican propulsión a chorro y cohetes, la cinemática y la cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones, vibraciones mecánicas amortiguadas, y analogías eléctricas. Estos temas adquirirán un interés particular cuando el curso de dinámica se imparta durante el primer año de estudios.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo elementales; todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3 del volumen de estática.[†] Sin embargo, se incluyen problemas especiales que requieren un conocimiento más avanzado de cálculo, y ciertas secciones, como las 19.8 y 19.9 sobre vibraciones amortiguadas, sólo deben asignarse cuando los estudiantes posean los fundamentos matemáticos adecuados. En las partes del texto que utilizan el cálculo elemental, se pone mayor énfasis en la apropiada comprensión de los conceptos matemáticos básicos incluidos que en la manipulación de las fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.

[†]Algunas definiciones y propiedades útiles de álgebra se resumen en el apéndice A al final del libro, para comodidad del lector. Asimismo, las secciones 9.11 a 9.18 del volumen de estática, donde se estudian los momentos de inercia de masas, se reproducen en el apéndice B.

ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOS Y CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Introducción del capítulo. Cada capítulo comienza con una introducción que establece el propósito y los objetivos del mismo, y en la que se describe en términos sencillos el material que será cubierto y sus aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería. Los nuevos lineamientos del capítulo proporcionan a los estudiantes una visión previa de los temas que éste incluye.

Lecciones en el capítulo. El cuerpo del texto está dividido en unidades, cada una de las cuales consiste en una o más secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos, y una gran cantidad de problemas de tarea. Cada unidad corresponde a un tema bien definido que, por lo general, puede ser cubierto en una lección. Sin embargo, en ciertos casos el profesor encontrará que es deseable dedicar más de una lección a un tema en particular.

Problemas resueltos. Los problemas resueltos se plantean de manera muy similar a la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas que se les asignen. Por tanto, estos problemas cumplen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar la forma de trabajo clara y ordenada que los estudiantes deben cultivar en sus propias soluciones.

Resolución de problemas en forma independiente. Entre los problemas resueltos y los de tarea, cada lección incluye una sección titulada *Resolución de problemas en forma independiente*. El propósito de estas secciones es ayudar a los estudiantes a organizar mentalmente la teoría ya cubierta en el texto y los métodos de resolución de los problemas resueltos, de manera que puedan resolver con mayor éxito los problemas de tarea. Además, en estas secciones también se incluyen sugerencias y estrategias específicas que les permitirán enfrentar de manera más eficiente cualquier problema asignado.

Series de problemas de tarea. La mayoría de los problemas son de naturaleza práctica y deben llamar la atención del estudiante de ingeniería. Sin embargo, están diseñados para ilustrar el material presentado en el texto y ayudar a los estudiantes a comprender los principios de la mecánica. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las partes del material que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente. Los problemas que requieren atención especial están señalados mediante asteriscos. Al final del texto se proporcionan las respuestas correspondientes a 70 por ciento de los problemas propuestos; y aquellos para los cuales no se da respuesta se indican en el libro escribiendo su número en cursivas.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo finaliza con un repaso y un resumen del material cubierto en el mismo. Las notas al margen se utilizan para ayudar al estudiante a organizar su trabajo de revisión, además se han incluido referencias cruzadas para ayudarlos a encontrar las partes de material que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye un grupo de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. Cada capítulo incluye un grupo de problemas diseñados para ser resueltos mediante programas de computadora. Muchos de estos problemas son importantes para el proceso de diseño. Por ejemplo, pueden involucrar la determinación del movimiento de una partícula bajo condiciones iniciales, el análisis cinemático o cinético de mecanismos en posiciones sucesivas, o la integración numérica de diferentes ecuaciones de movimiento. El desarrollo del algoritmo requerido para resolver un problema de mecánica dado beneficiará a los estudiantes en dos formas diferentes: 1) les ayudará a lograr una mejor comprensión de los principios de la mecánica involucrados; 2) les proporcionará la oportunidad de aplicar sus habilidades con la computadora a la resolución de un problema relevante de ingeniería.

MATERIALES DE APOYO

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de los mismos, los cuales se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill o envíe un correo electrónico a marketinghe@mcgraw-hill.com.

CONEXIÓN CON LA INGENIERÍA DE MCGRAW-HILL

La Conexión de McGraw-Hill con la Ingeniería (*McGraw-Hill Connect Engineering*) es una plataforma de tareas y evaluación que proporciona a los estudiantes los medios para conectarse de mejor manera con su curso, sus profesores y los conceptos importantes que necesitarán conocer para su éxito en la actualidad y en el futuro. Mediante la Conexión con la Ingeniería, los profesores pueden entregar con facilidad tareas, tests y exámenes en línea. Los estudiantes pueden practicar habilidades importantes a su propio ritmo y de acuerdo con su propio programa.

La Conexión con la Ingeniería de *Mecánica vectorial para ingenieros* está disponible en **www.mhhe.com/beerjohnston** e incluye problemas algorítmicos del texto, presentaciones en PowerPoint, un banco de imágenes y animaciones.

OPCIONES DE LIBRO ELECTRÓNICO

Los libros electrónicos son una forma innovadora de ahorrarle dinero a los estudiantes y al mismo tiempo crear un medio ambiente más verde. Un libro electrónico puede ahorrarle a los estudiantes cerca de la mitad del costo de un libro de texto tradicional y ofrece características únicas como un poderoso dispositivo de búsqueda, texto resaltado y la capacidad de compartir notas con compañeros de clase que usan libros electrónicos.

McGraw-Hill ofrece dos opciones de libros electrónicos: la compra de un libro descargable de VitalSource o una suscripción al libro de CourseSmart. Para conocer más acerca de las opciones de libros electrónicos, contacte a su distribuidor McGraw-Hill o visite los sitios de manera directa en **www.vitalsource.com** y **www.coursesmart.com.**

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer de manera especial a Dean Updike, de Lehigh University, quien verificó completamente las soluciones y respuestas de todos los problemas de esta edición, y después preparó las soluciones del *Manual para el instructor y de soluciones* adicional al texto.

Es un placer reconocer el trabajo de Dennis Ormond de Fine Line Illustrations por las artísticas ilustraciones que contribuyen en gran medida a la efectividad del texto.

Los autores agradecen a las diferentes empresas que proporcionaron fotografías para esta edición. También desean reconocer el esfuerzo determinado y la paciencia de Sabina Dowell, quien seleccionó las fotografías.

Un agradecimiento adicional para los miembros de la organización McGraw-Hill por su apoyo y dedicación en preparar esta nueva edición.

Por último, los autores expresan su gratitud por los numerosos comentarios y sugerencias proporcionados por los usuarios de las ediciones anteriores de *Mecánica vectorial para ingenieros.*

E. Russell Johnston, Jr.
Phillip J. Cornwell

Lista de símbolos

$\mathbf{a}$, a	Aceleración
a	Constante; radio; distancia; eje semimayor de la elipse
$\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{a}$	Aceleración del centro de masa
$\mathbf{a}_{B/A}$	Aceleración de B relativa al sistema de referencia en traslación con A
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$	Aceleración de P relativa al sistema de referencia en rotación $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c$	Aceleración de Coriolis
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, . . .	Reacciones en soportes y conexiones
A, B, C, . . .	Puntos
A	Área
b	Ancho; distancia; eje semimenor de la elipse
c	Constante; coeficiente de amortiguamiento viscoso
C	Centroide; centro instantáneo de rotación; capacitancia
d	Distancia
$\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_t$	Vectores unitarios a lo largo de la normal y la tangente
$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$	Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal
e	Coeficiente de restitución; base de los logaritmos naturales
E	Energía mecánica total; voltaje
f	Función escalar
f_f	Frecuencia de vibración forzada
f_n	Frecuencia natural
$\mathbf{F}$	Fuerza; fuerza de fricción
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; centro de masa; constante de gravitación
h	Momento angular por masa unitaria
$\mathbf{H}_O$	Momento angular alrededor del punto O
$\dot{\mathbf{H}}_G$	Razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ con respecto a un sistema de referencia de orientación fija
$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$	Razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ con respecto a un sistema de referencia en rotación $Gxyz$
$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$	Vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas
i	Corriente
I, I_x, . . .	Momentos de inercia
$\overline{I}$	Momento centroidal de inercia
I_{xy}, . . .	Productos de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de resorte
k_x, k_y, k_O	Radio de giro
$\overline{k}$	Radio de giro centroidal
l	Longitud
$\mathbf{L}$	Cantidad de movimiento lineal
L	Longitud; inductancia
m	Masa
m'	Masa por unidad de longitud
$\mathbf{M}$	Par; momento
$\mathbf{M}_O$	Momento alrededor del punto O
$\mathbf{M}_O^R$	Momento resultante alrededor del punto O
M	Magnitud de par o momento; masa de la Tierra
M_{OL}	Momento alrededor del eje OL
n	Dirección normal

$\mathbf{N}$ Componente normal de la reacción
O Origen de coordenadas
$\mathbf{P}$ Fuerza; vector
$\dot{\mathbf{P}}$ Razón de cambio del vector **P** con respecto a un sistema de referencia de orientación fija
q Razón de flujo de masa; carga eléctrica
$\mathbf{Q}$ Fuerza; vector
$\dot{\mathbf{Q}}$ Razón de cambio del vector **Q** con respecto a un sistema de referencia de orientación fija
$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ Razón de cambio del vector **Q** con respecto al sistema de referencia $Oxyz$
$\mathbf{r}$ Vector de posición
$\mathbf{r}_{B/A}$ Vector de posición de B relativo a A
r Radio; distancia; coordenada polar
$\mathbf{R}$ Fuerza resultante; vector resultante; reacción
R Radio de la Tierra; resistencia
$\mathbf{s}$ Vector de posición
s Longitud de arco
t Tiempo; espesor; dirección tangencial
$\mathbf{T}$ Fuerza
T Tensión; energía cinética
$\mathbf{u}$ Velocidad
u Variable
U Trabajo
$\mathbf{v}$, v Velocidad
v Rapidez
$\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{v}$ Velocidad del centro de masa
$\mathbf{v}_{B/A}$ Velocidad de B relativa al sistema de transferencia en traslación con A
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ Velocidad de P relativa al sistema de referencia en rotación $\mathcal{F}$
$\mathbf{V}$ Producto vectorial
V Volumen; energía potencial
w Carga por unidad de longitud
$\mathbf{W}$, W Peso; carga
x, y, z Coordenadas rectangulares; distancias
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ Derivadas temporales de las coordenadas x, y, z
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ Coordenadas rectangulares del centroide, centro de gravedad o centro de masa
$\boldsymbol{\alpha}$, α Aceleración angular
α, β, γ Ángulos
γ Peso específico
δ Elongación
ε Excentricidad de sección cónica o de órbita
$\boldsymbol{\lambda}$ Vector unitario a lo largo de una línea
η Eficiencia
θ Coordenada angular; ángulo euleriano; ángulo; coordenada polar
μ Coeficiente de fricción
ρ Densidad; radio de curvatura
τ Periodo
τ_n Periodo de vibración libre
ϕ Ángulo de fricción; ángulo euleriano; ángulo de fase; ángulo
φ Diferencia de fase
ψ Ángulo euleriano
$\boldsymbol{\omega}$, ω Velocidad angular
ω_f Frecuencia circular de vibración forzada
ω_n Frecuencia circular natural
$\boldsymbol{\Omega}$ Velocidad angular del sistema de referencia


www.FreeLibros.me



El movimiento del transbordador espacial se describe en términos de su *posición*, *velocidad* y *aceleración*. Al aterrizar, el piloto debe considerar la velocidad del viento y el movimiento *relativo* del transbordador con respecto al viento. El estudio del movimiento se conoce como *cinemática* y es el objeto de estudio en este capítulo.

CAPÍTULO 11

Cinemática de partículas



CAPÍTULO 11 CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS

11.1. INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA

Los capítulos 1 al 10 se dedicaron a la *estática,* esto es, al análisis de los cuerpos en reposo. Ahora se inicia el estudio de la *dinámica,* parte de la mecánica que se refiere al análisis de los cuerpos en movimiento.

En tanto que el estudio de la estática se remonta al tiempo de los filósofos griegos, la primera contribución importante a la dinámica la realizó Galileo (1564-1642). Los experimentos de Galileo en cuerpos uniformemente acelerados llevaron a Newton (1642-1727) a formular sus leyes de movimiento fundamentales.

La dinámica incluye:

1. La *cinemática,* la cual corresponde al estudio de la geometría del movimiento. Se utiliza para relacionar el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo, sin hacer referencia a la causa del movimiento.
2. La *cinética,* que es el estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y el movimiento de este mismo. La cinética se utiliza para predecir el movimiento ocasionado por fuerzas dadas, o para determinar las fuerzas que se requieren para producir un movimiento específico.

Los capítulos 11 al 14 abordan la *dinámica de partículas*; en el capítulo 11 se considera la *cinemática de partículas.* El uso de la palabra *partículas* no significa que el estudio se restringirá a pequeños corpúsculos, sino que en estos primeros capítulos el movimiento de cuerpos —posiblemente tan grandes como automóviles, cohetes o aviones— será considerado sin tomar en cuenta su tamaño. Al afirmar que los cuerpos se analizan como partículas, se entiende que sólo se va a considerar su movimiento como una unidad completa, y se ignora cualquier rotación alrededor de su propio centro de masa. Sin embargo, hay casos en los que dicha rotación no es despreciable; entonces no pueden considerarse como partículas. Este tipo de movimiento se analiza en los capítulos finales, en los que se trata la *dinámica de cuerpos rígidos.*

En la primera parte del capítulo 11 se estudia el movimiento rectilíneo de una partícula; esto es, se determina la posición, velocidad y aceleración de una partícula en todo instante conforme ésta se mueve a lo largo de una línea recta. Primero, se emplean métodos generales de análisis para estudiar el movimiento de una partícula; después se consideran dos casos particulares importantes, a saber, el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado de una partícula (secciones 11.4 y 11.5). En la sección 11.6, se aborda el movimiento simultáneo de varias partículas, y se presenta el concepto de movimiento relativo de una partícula con respecto a otra. La primera parte de este capítulo concluye con un estudio de métodos gráficos de análisis y su aplicación en la solución de diversos problemas que implican el movimiento rectilíneo de partículas (secciones 11.7 y 11.8).

En la segunda parte de este capítulo se analiza el movimiento de una partícula cuando ésta se mueve a lo largo de una trayectoria curva. Puesto que la posición, velocidad y aceleración de una partícula se definen como cantidades vectoriales, el concepto de la derivada de una función vectorial se presenta en la sección 11.10 y se añade a las herramientas matemáticas. Después se estudian las apli-

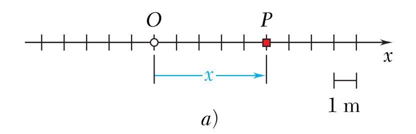
caciones en las que el movimiento de una partícula se define mediante las componentes rectangulares de su velocidad y aceleración; en este punto se analiza el movimiento de un proyectil (sección 11.11).

En la sección 11.12 se estudia el movimiento de una partícula en relación con el sistema de referencia en traslación. Por último, se analiza el movimiento curvilíneo de una partícula en términos de componentes que no sean las rectangulares. Las componentes tangencial y normal de la velocidad y la aceleración de una partícula se presentan en la sección 11.13 y las componentes radial y transversal de su velocidad y aceleración en la sección 11.14.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE PARTÍCULAS

11.2. POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta se dice que se encuentra en *movimiento rectilíneo.* En cualquier instante dado t, la partícula ocupará cierta posición sobre la línea recta. Para definir la posición P de la partícula se elige un origen fijo O sobre la dirección positiva a lo largo de la línea. Se mide la distancia x desde O hasta P, y se marca con un signo más o menos, dependiendo de si P se alcanza desde O al moverse a lo largo de la línea en la dirección positiva o en la negativa, respectivamente. La distancia x, con el signo apropiado, define por completo la posición de la partícula, y se denomina como la *coordenada de la posición* de la partícula. Por ejemplo, la coordenada de la posición correspondiente a P en la figura 11.1*a*) es $x = +5$ m; la coordenada correspondiente a P' en la figura 11.1*b*) es $x' = -2$ m.



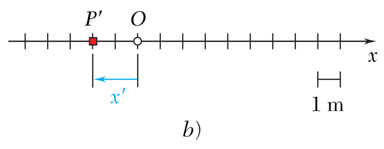


Figura 11.1

Cuando se conoce la coordenada de la posición x de una partícula para cualquier valor de tiempo t, se afirma que se conoce el movimiento de la partícula. El "itinerario" del movimiento puede expresarse en forma de una ecuación en x y t, tal como $x = 6t^2 - t^3$, o en una gráfica de x en función de t, como se indica en la figura 11.6. Las unidades que se usan con mayor frecuencia para medir la coordenada de la posición x son el metro (m) en el sistema de unidades SI[†] y el pie (ft) en el sistema de unidades inglés. El tiempo t suele medirse en segundos (s).

Considere la posición P ocupada por la partícula en el tiempo t y la coordenada correspondiente x (figura 11.2). Considere también la posición P' ocupada por la partícula en un tiempo posterior $t + \Delta t$; la coordenada de la posición P' puede obtenerse sumando a la coordenada x de P el pequeño desplazamiento Δx, el cual será positivo o negativo según si P' está a la derecha o a la izquierda de P. La *velocidad promedio* de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo Δt:

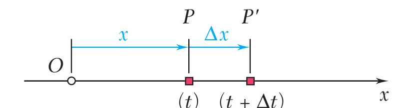
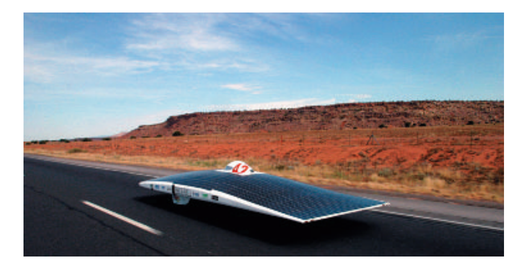


Figura 11.2

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Fotografía 11.1 El movimiento de este vehículo solar se describe mediante su posición, velocidad y aceleración.

[†]Cf. Sección 1.3.

Si se usan unidades del SI, Δx se expresa en metros y Δt en segundos, la velocidad promedio se expresa consecuentemente en metros por segundo (m/s). Si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, Δx se expresa en pies y Δt en segundos; la velocidad promedio se expresará entonces en pies por segundo (ft/s).

La *velocidad instantánea* v de la partícula en el instante t se obtiene de la velocidad promedio al elegir intervalos Δt y desplazamientos Δx cada vez más cortos:

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea se expresa también en m/s o ft/s. Observando que el límite del cociente es igual, por definición, a la derivada de x con respecto a t, se escribe

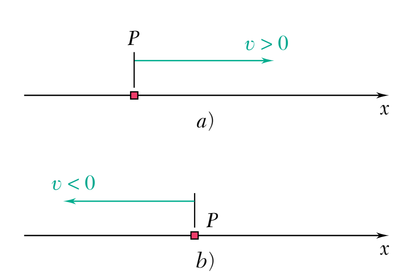


Figura 11.3

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{11.1}$$

La velocidad v se representa mediante un número algebraico que puede ser positivo o negativo.[†] Un valor positivo de v indica que x aumenta, esto es, que la partícula se mueve en la dirección positiva (figura 11.3*a*); un valor negativo de v indica que x disminuye, es decir, que la partícula se mueve en dirección negativa (figura 11.3*b*). La magnitud de v se conoce como la *rapidez* de la partícula.

Considere la velocidad v de la partícula en el tiempo t y también su velocidad $v + \Delta v$ en un tiempo posterior $t + \Delta t$ (figura 11.4). La *aceleración promedio* de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se refiere como el cociente de Δv y Δt:

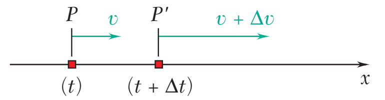


Figura 11.4

$$\text{Aceleración promedio} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si se utilizan las unidades del SI, Δv se expresa en m/s y Δt en segundos; la aceleración promedio se expresará entonces en m/s^2. Si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, Δv se expresa en ft/s y Δt en segundos; la aceleración promedio se expresa entonces en ft/s^2.

La *aceleración instantánea* a de la partícula en el instante t se obtiene de la aceleración promedio al escoger valores de Δt y Δv cada vez más pequeños:

$$\text{Aceleración instantánea} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

[†]Como se verá en la sección 11.9, la velocidad es en realidad una cantidad vectorial. Sin embargo, puesto que aquí se considera el movimiento rectilíneo de una partícula, en el cual la velocidad de la misma tiene una dirección conocida y fija, sólo es necesario especificar el sentido y la magnitud de la velocidad; esto puede llevarse a cabo de manera conveniente utilizando una cantidad escalar con un signo más o menos. Lo mismo se cumple para la aceleración de una partícula en movimiento rectilíneo.

La aceleración instantánea se expresa también en m/s^2 o ft/s^2. El límite del cociente, el cual es por definición la derivada de v con respecto a t, mide la razón de cambio de la velocidad. Se escribe

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.2}$$

o, con la sustitución de v de (11.1),

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.3}$$

La aceleración a se representa mediante un número algebraico que puede ser positivo o negativo.† Un valor positivo de a indica que la velocidad (es decir, el número algebraico v) aumenta. Esto puede significar que la partícula se está moviendo más rápido en la dirección positiva (figura 11.5*a*) o que se mueve más lentamente en la dirección negativa (figura 11.5*b*); en ambos casos, Δv es positiva. Un valor negativo de a indica que disminuye la velocidad; ya sea que la partícula se esté moviendo más lentamente en la dirección positiva (figura 11.5*c*) o que se esté moviendo más rápido en la dirección negativa (figura 11.5*d*).

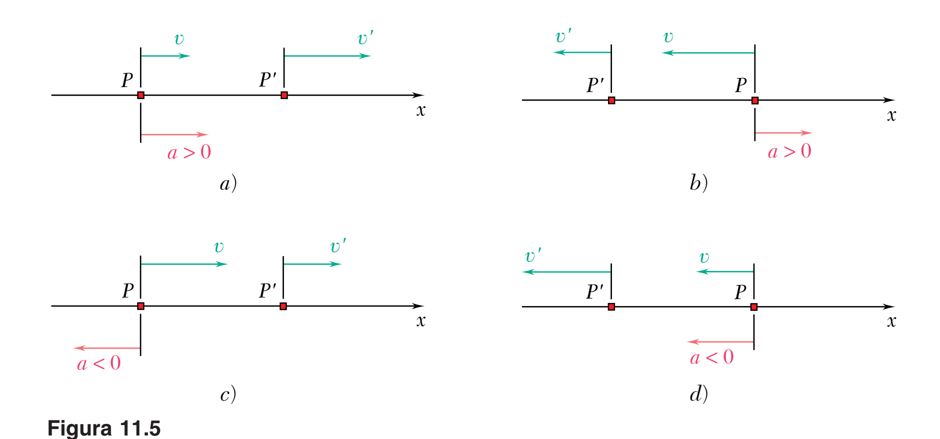


Figura 11.5

El término *desaceleración* se utiliza en algunas ocasiones para referirse a a cuando la rapidez de la partícula (esto es, la magnitud de v) disminuye; la partícula se mueve entonces con mayor lentitud. Por ejemplo, la partícula de la figura 11.5 se desacelera en las partes *b* y *c*; en verdad se acelera (es decir, se mueve más rápido) en las partes *a* y *d*.

Es posible obtener otra expresión para la aceleración eliminando la diferencial dt en las ecuaciones (11.1) y (11.2). Al resolver (11.1) para dt, se obtiene $dt = dx/v$; al sustituir en (11.2), se escribe

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{11.4}$$

†Véase la nota al pie, página 604.

Ejemplo. Considere la partícula que se mueve en una línea recta y suponga que su posición está definida por la ecuación

$$x = 6t^2 - t^3$$

donde t se expresa en segundos y x en metros. La velocidad de v en cualquier tiempo t se obtiene al diferenciar x con respecto a t

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

La aceleración a se obtiene al diferenciar otra vez con respecto a t:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

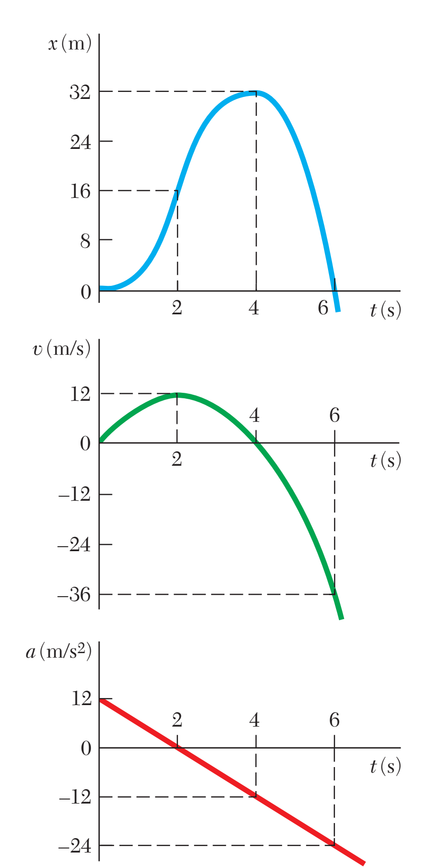


Figura 11.6

La coordenada de la posición, la velocidad y la aceleración se han graficado contra t en la figura 11.6. Las curvas obtenidas se conocen como *curvas de movimiento.* Recuérdese, sin embargo, que la partícula no se mueve a lo largo de ninguna de estas curvas; la partícula se mueve en una línea recta. Puesto que la derivada de una función mide la pendiente de la curva correspondiente, la pendiente de la curva x-t en cualquier tiempo dado es igual al valor de v en ese tiempo y la pendiente de la curva v-t es igual al valor de a. Puesto que $a = 0$ en $t = 2$ s, la pendiente de la curva v-t debe ser cero en $t = 2$ s; la velocidad alcanza un máximo en este instante. Además, puesto que $v = 0$ en $t = 0$ y $t = 4$ s la tangente a la curva x-t debe ser horizontal para ambos de estos valores de t.

Un estudio de las tres curvas de movimiento de la figura 11.6 muestra que el movimiento de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ puede dividirse en cuatro etapas:

1. La partícula inicia desde el origen, $x = 0$, sin velocidad pero con una aceleración positiva. Bajo esta aceleración, gana una velocidad positiva y se mueve en la dirección positiva. De $t = 0$ a $t = 2$ s, x, v y a son todas positivas.

2. En $t = 2$ s, la aceleración es cero; la velocidad ha alcanzado su valor máximo. De $t = 2$ s a $t = 4$ s, v es positiva, pero a es negativa. La partícula aún se mueve en dirección positiva, pero cada vez más lentamente; la partícula se está desacelerando.

3. En $t = 4$ s, la velocidad es cero; la coordenada de la posición x ha alcanzado su valor máximo. A partir de ahí, tanto v como a son negativas; la partícula se está acelerando y se mueve en la dirección negativa con rapidez creciente.

4. En $t = 6$ s, la partícula pasa por el origen; su coordenada x es en ese caso cero, en tanto que la distancia total recorrida desde el principio del movimiento es de 64 m. Para valores mayores de t que 6 s, x, v y a serán todas negativas. La partícula continúa moviéndose en la dirección negativa, alejándose de O, cada vez más rápido. ■

11.3. DETERMINACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

En la sección anterior se afirma que el movimiento de una partícula es conocido si se sabe la posición de la partícula para todo valor del tiempo t. En la práctica, sin embargo, un movimiento rara vez se define por medio de una relación entre x y t. Con mayor frecuencia, las condiciones del movimiento se especificarán por el tipo de aceleración que posee la partícula. Por ejemplo, un cuerpo en caída libre tendrá una aceleración constante, dirigida hacia abajo e igual a 9.81 m/s^2, o 32.2 ft/s^2; una masa unida a un resorte que se ha estirado tendrá una aceleración proporcional a la elongación instantánea del resorte, medida desde la posición de equilibrio, etc. En general, la aceleración de la partícula puede expresarse como una función de una o más de las variables x, v y t. Para determinar la coordenada de la posición x en términos de t, será necesario efectuar dos integraciones sucesivas.

Se considerarán tres clases comunes de movimiento:

1. $a = f(t)$. *La aceleración es una función dada de* t. Al resolver (11.2) para dv y sustituir $f(t)$ por a, se escribe

$$dv = a\ dt$$
$$dv = f(t)\ dt$$

Al integrar ambos miembros, se obtiene la ecuación

$$\int dv = \int f(t)\ dt$$

que define v en términos de t. Sin embargo, debe notarse que una constante arbitraria se introducirá como resultado de la integración. Esto se debe al hecho de que hay muchos movimientos que corresponden a la aceleración dada $a = f(t)$. Para definir en forma única el movimiento de la partícula, es necesario especificar las *condiciones iniciales* del movimiento, esto es, el valor de v_0 de la velocidad y el valor x_0 de la coordenada de la posición en $t = 0$. Al sustituir las integrales indefinidas por *integrales definidas* con los límites inferiores correspondientes a las condiciones iniciales $t = 0$ y $v = v_0$ y los límites superiores correspondientes a $t = t$ y $v = v$, se escribe

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\ dt$$
$$v - v_0 = \int_0^t f(t)\ dt$$

lo cual produce v en términos de t.

La ecuación (11.1) puede resolverse ahora para dx,

$$dx = v\ dt$$

y la expresión que se acaba de obtener sea sustituida por v. Ambos miembros se integran después, el miembro izquierdo con respecto a x desde $x = x_0$ hasta $x = x$, y el miembro de-

recho respecto a t desde $t = 0$ hasta $t = t$. La coordenada de la posición x se obtiene de ese modo en términos de t; el movimiento está completamente determinado.

Dos casos particulares importantes se estudiarán con gran detalle en las secciones 11.4 y 11.5: el caso en el que $a = 0$, que corresponde a un *movimiento uniforme*, y en el que $a =$ constante, que corresponde a un *movimiento uniformemente acelerado*.

2. $a = f(x)$. *La aceleración se da en función de x.* Al reordenar la ecuación (11.4) y sustituir $f(x)$ para a, se escribe

$$v\,dv = a\,dx$$
$$v\,dv = f(x)\,dx$$

Puesto que cada miembro contiene sólo una variable, se puede integrar la ecuación. Denotando de nuevo mediante v_0 y x_0, respectivamente, los valores iniciales de la velocidad y la coordenada de la posición, se obtiene

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$
$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

la cual produce v en términos de x. A continuación se resuelve (11.1) para dt,

$$dt = \frac{dx}{v}$$

y se sustituye por v la expresión que acaba de obtenerse. Ambos miembros pueden integrarse entonces para obtener la relación deseada entre x y t. Sin embargo, en muchos casos esta última integración no puede llevarse a cabo de manera analítica y debe recurrirse a un método de integración numérico.

3. $a = f(v)$. *La aceleración es una función dada de v.* Es posible sustituir $f(v)$ por a en (11.2) u (11.4) para obtener cualquiera de las relaciones siguientes:

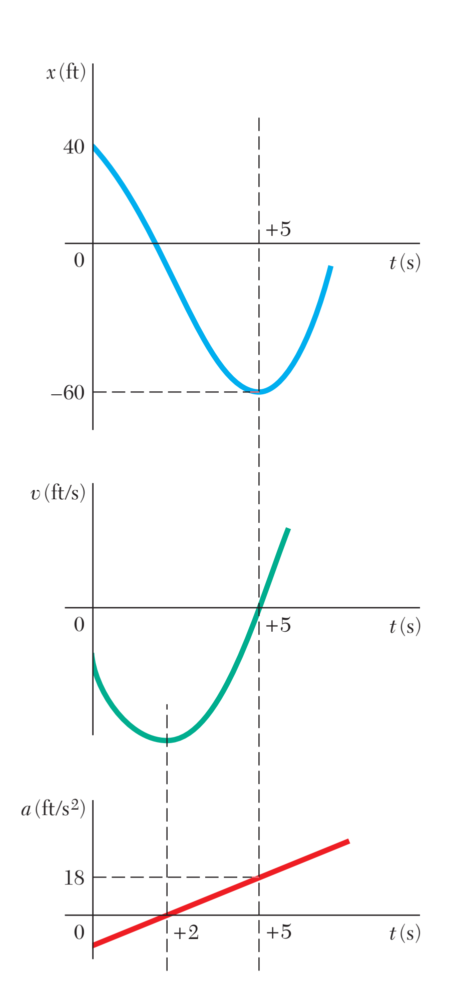
$$f(v) = \frac{dv}{dt} \qquad f(v) = v\frac{dv}{dx}$$
$$dt = \frac{dv}{f(v)} \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)}$$

La integración de la primera ecuación producirá una relación entre v y t; la integración de la segunda ecuación originará una relación entre v y x. Cualquiera de estas relaciones puede utilizarse junto con la ecuación (11.1) para obtener la relación entre x y t que caracteriza el movimiento de la partícula.

PROBLEMA RESUELTO 11.1

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, donde x se expresa en pies y t en segundos. Determine *a*) el tiempo al cual la velocidad será cero, *b*) la posición y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo, *c*) la aceleración de la partícula en ese tiempo, *d*) la distancia recorrida por la partícula desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s.

SOLUCIÓN



Las ecuaciones de movimiento son

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \tag{1}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15 \tag{2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \tag{3}$$

***a*) Tiempo en el cual $v = 0$.** Se fija $v = 0$ en (2):

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \qquad t = -1 \text{ s} \qquad \text{y} \qquad t = +5 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Sólo la raíz $t = +5$ s corresponde a un tiempo después de que el movimiento se ha iniciado: para $t < 5$ s, $v < 0$, la partícula se mueve en dirección negativa; para $t > 5$ s, $v > 0$, la partícula se mueve en dirección positiva.

***b*) Posición y distancia recorrida cuando $v = 0$.** Al sustituir $t = +5$ s en (1), se tiene

$$x_5 = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 40 \qquad x_5 = -60 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$

La posición inicial en $t = 0$ fue $x_0 = +40$ ft. Puesto que $v \neq 0$ durante el intervalo $t = 0$ a $t = 5$ s se tiene

$$\text{Distancia recorrida} = x_5 - x_0 = -60 \text{ ft} - 40 \text{ ft} = -100 \text{ ft}$$

$$\text{Distancia recorrida} = 100 \text{ ft en la dirección negativa} \quad \blacktriangleleft$$

***c*) Aceleración cuando $v = 0$.** Se sustituye $t = +5$ s en (3):

$$a_5 = 6(5) - 12 \qquad a_5 = +18 \text{ ft/s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

***d*) Distancia recorrida desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s.** La partícula se mueve en la dirección negativa desde $t = 4$ s hasta $t = 5$ s y en dirección positiva desde $t = 5$ s hasta $t = 6$ s; por lo tanto, la distancia recorrida durante cada uno de estos intervalos de tiempo se calculará por separado.

De $t = 4$ s a $t = 5$ s: $\quad x_5 = -60$ ft

$$x_4 = (4)^3 - 6(4)^2 - 15(4) + 40 = -52 \text{ ft}$$

$$\begin{aligned}\text{Distancia recorrida} &= x_5 - x_4 = -60 \text{ ft} - (-52 \text{ ft}) = -8 \text{ ft} \\ &= 8 \text{ ft en la dirección negativa}\end{aligned}$$

De $t = 5$ s a $t = 6$ s: $\quad x_5 = -60$ ft

$$x_6 = (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 40 = -50 \text{ ft}$$

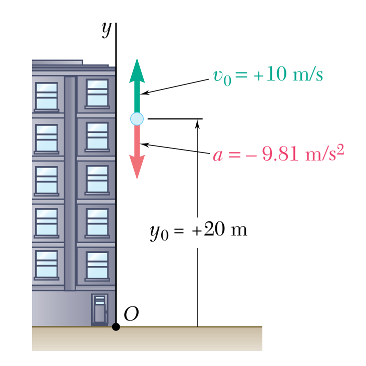
$$\begin{aligned}\text{Distancia recorrida} &= x_6 - x_5 = -50 \text{ ft} - (-60 \text{ ft}) = +10 \text{ ft} \\ &= 10 \text{ ft en la dirección positiva}\end{aligned}$$

La *distancia total recorrida* desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s es de 8 ft + 10 ft = 18 ft ◀

PROBLEMA RESUELTO 11.2

Una pelota se lanza con una velocidad de 10 m/s dirigida verticalmente hacia arriba desde una ventana ubicada a 20 m sobre el suelo. Si se sabe que la aceleración de la pelota es constante e igual a 9.81 m/s^2 hacia abajo, determine *a*) la velocidad v y la elevación y de la pelota sobre el suelo en cualquier tiempo t, *b*) la elevación más alta que alcanza la pelota y el valor correspondiente de t, *c*) el tiempo en el que la pelota golpea el suelo y la velocidad correspondiente. Dibuje las curvas v-t y y-t.

SOLUCIÓN



***a*) Velocidad y elevación.** El eje y que mide la coordenada de la posición (o elevación) se elige con su origen O sobre el suelo y su sentido positivo hacia arriba. El valor de la aceleración y los valores iniciales de v y y son como se indica. Al sustituir a en $a = dv/dt$ y observar que en $t = 0$, $v_0 = +10$ m/s, se tiene

$$\frac{dv}{dt} = a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\int_{v_0=10}^{v} dv = -\int_0^t 9.81\,dt$$

$$[v]_{10}^{v} = -[9.81t]_0^t$$

$$v - 10 = -9.81t$$

$$v = 10 - 9.81t \quad (1) \quad ◀$$

Al sustituir v en $v = dy/dt$ y observar que en $t = 0$, $y_0 = 20$ m, se tiene

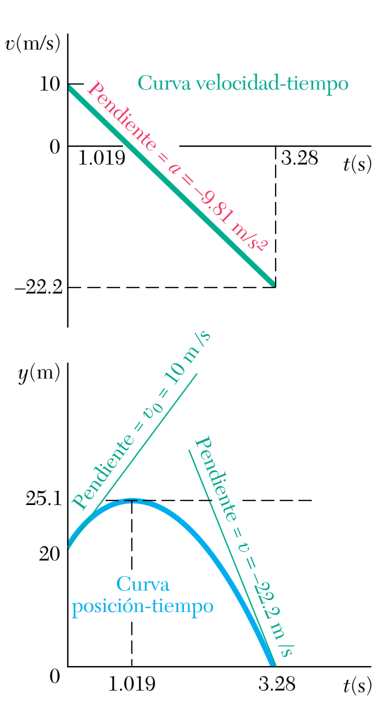
$$\frac{dy}{dt} = v = 10 - 9.81t$$

$$\int_{y_0=20}^{y} dy = \int_0^t (10 - 9.81t)\,dt$$

$$[y]_{20}^{y} = [10t - 4.905t^2]_0^t$$

$$y - 20 = 10t - 4.905t^2$$

$$y = 20 + 10t - 4.905t^2 \quad (2) \quad ◀$$



***b*) Máxima elevación.** Cuando la pelota alcanza su máxima elevación, se tiene $v = 0$. Al sustituir en (1), se obtiene

$$10 - 9.81t = 0 \qquad t = 1.019 \text{ s} \quad ◀$$

Al sustituir $t = 1.019$ s en (2), se tiene

$$y = 20 + 10(1.019) - 4.905(1.019)^2 \qquad y = 25.1 \text{ m} \quad ◀$$

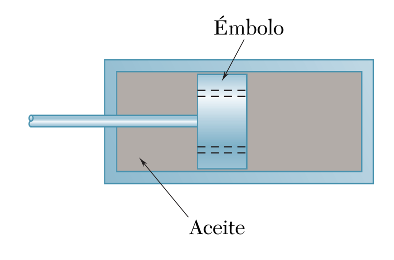
***c*) La pelota golpea el suelo.** Cuando la pelota golpea el suelo, se tiene $y = 0$. Al sustituir en (2), se obtiene

$$20 + 10t - 4.905t^2 = 0 \qquad t = -1.243 \text{ s} \quad \text{y} \quad t = +3.28 \text{ s} \quad ◀$$

Sólo la raíz $t = +3.28$ s corresponde a un tiempo después de que el movimiento se ha iniciado. Al considerar este valor de t en (1), se tiene

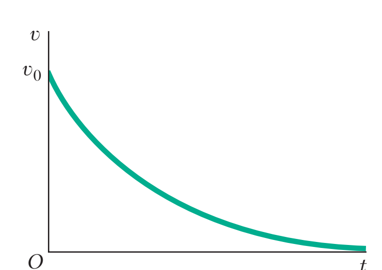
$$v = 10 - 9.81(3.28) = -22.2 \text{ m/s} \qquad v = 22.2 \text{ m/s} \downarrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 11.3



El mecanismo de freno que se usa para reducir el retroceso en ciertos tipos de cañones consiste esencialmente en un émbolo unido a un cañón que se mueve en un cilindro fijo lleno de aceite. Cuando el cañón retrocede con una velocidad inicial v_0, el émbolo se mueve y el aceite es forzado a través de los orificios en el émbolo, provocando que este último y el cañón se desaceleren a una razón proporcional a su velocidad; esto es, $a = -kv$. Exprese *a*) v en términos de t, *b*) x en términos de t, *c*) v en términos de x. Dibuje las curvas del movimiento correspondiente.

SOLUCIÓN



***a*) *v* términos de *t*.** Al sustituir $-kv$ por a en la expresión fundamental que define a la aceleración, $a = dv/dt$, se escribe

$$-kv = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{v} = -k\,dt \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt \qquad\qquad v = v_0 e^{-kt} \quad ◀$$

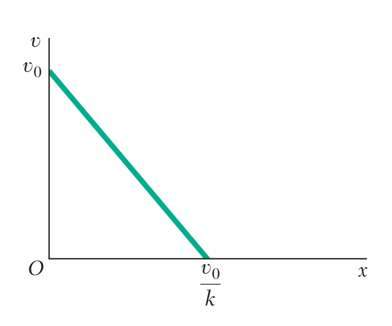
***b*) *x* en términos de *t*.** Al sustituir la expresión que acaba de obtenerse para v en $v = dx/dt$, se escribe

$$v_0 e^{-kt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-kt}\,dt$$

$$x = -\frac{v_0}{k}[e^{-kt}]_0^t = -\frac{v_0}{k}(e^{-kt} - 1)$$

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \quad ◀$$



***c*) *v* en términos de *x*.** Mediante la sustitución $-kv$ para a en $a = v\,dv/dx$, se escribe

$$-kv = v\frac{dv}{dx}$$

$$dv = -k\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^x dx$$

$$v - v_0 = -kx \qquad\qquad v = v_0 - kx \quad ◀$$

Comprobación. La parte *c*) podría haberse resuelto al eliminar t de las respuestas obtenidas para las partes *a*) y *b*). Este método alternativo puede utilizarse como una comprobación. De la parte *a*) se obtiene $e^{-kt} = v/v_0$; al sustituir en la respuesta de la parte *b*), se obtiene

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \qquad v = v_0 - kx \qquad \text{(comprobación)}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de esta lección se pide determinar la *posición,* la *velocidad* o la *aceleración* de una partícula en *movimiento rectilíneo.* En cada problema, es importante identificar tanto la variable independiente (por lo común t o x) y qué es lo que se pide (por ejemplo, la necesidad de expresar v como una función de x). Se recomienda empezar cada problema escribiendo tanto la información dada como un enunciado simple de lo que se va a determinar.

1. *Obtención de v(t) y a(t) para una x(t) dada.* Como se explicó en la sección 11.2, la primera y segunda derivadas de x con respecto a t son respectivamente iguales a la velocidad y a la aceleración de la partícula [ecuaciones (11.1) y (11.2)]. Si la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos, la partícula puede llegar al reposo y después moverse en la dirección opuesta [problema resuelto 11.1]. Así, cuando se calcula la distancia total recorrida por una partícula, se debe determinar primero si la partícula llegó al reposo durante el intervalo de tiempo especificado. Al construir un diagrama similar al del problema resuelto 11.1 que muestra la posición y la velocidad de la partícula y cada instante crítico ($v = v_{máx}$, $v = 0$, etc.), se contará con una ayuda para visualizar el movimiento.

2. *Obtención de v(t) y x(t) para una a(t) dada.* La solución de problemas de este tipo se analizó en la primera parte de la sección 11.3. Se recurre a las condiciones iniciales, $t = 0$ y $v = v_0$, como los límites inferiores de las integrales en t y v, pero es posible utilizar cualquier otro estado conocido (por ejemplo, $t = t_1$, $v = v_1$). Además, si la función $a(t)$ contiene una constante desconocida (por ejemplo, la constante k si $a = kt$), primero se debe determinar la constante al sustituir un conjunto de valores conocidos de t y a en la ecuación que define a $a(t)$.

3. *Obtención de v(x) y x(t) para una a(x) dada.* Éste es el segundo caso considerado en la sección 11.3. Los límites inferiores de integración pueden ser los de cualquier estado conocido (por ejemplo, $x = x_1$, $v = v_1$). Además, puesto que $v = v_{máx}$ cuando $a = 0$, las posiciones donde ocurren los valores máximos de la velocidad se determinan con facilidad al escribir $a(x) = 0$ y al resolver para x.

4. *Obtención de v(x), v(t) y x(t) para una a(v) dada.* Éste es el último caso que se abordó en la sección 11.3; las técnicas de solución apropiadas para problemas de este tipo se ilustran en el problema resuelto 11.3. Todos los comentarios generales correspondientes a los casos anteriores también se aplican en esta situación. El problema resuelto 11.3 proporciona un resumen de cómo y cuándo utilizar las ecuaciones $v = dx/dt$, $a = dv/dt$ y $a = v\ dv/dx$.

Problemas†

11.1 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 1.5t^4 - 30t^2 + 5t + 10$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 4$ s.

11.2 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 12t^3 - 18t^2 + 2t + 5$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la posición y la velocidad cuando la aceleración de la partícula es igual a cero.

11.3 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 30t + 8x$, donde x y t se expresan en pies y segundos, respectivamente. Determine el tiempo, la posición y la aceleración cuando $v = 0$.

11.4 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 6t^2 - 8 + 40 \cos \pi t$, donde x y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 6$ s.

11.5 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 6t^4 - 2t^3 - 12t^2 + 3t + 3$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine el tiempo, la posición y la velocidad cuando $a = 0$.

11.6 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$, donde x se expresa en metros y t en segundos. Determine *a*) cuándo la velocidad es cero, *b*) la posición y la distancia total viajada hasta ese momento cuando la aceleración es cero.

11.7 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 36t - 40$, donde x y t se expresan en pies y segundos, respectivamente. Determine *a*) cuándo la velocidad es cero, *b*) la velocidad, la aceleración y la distancia total viajada cuando $x = 0$.

11.8 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$, donde x y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Determine *a*) cuándo la velocidad es cero, *b*) la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es cero.

11.9 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = -8$ m/s^2. Si se sabe que $x = 20$ m cuando $t = 4$ s y $x = 4$ m cuando $v = 16$ m/s, determine *a*) el tiempo cuando la velocidad es cero, *b*) la velocidad y la distancia total recorrida cuando $t = 11$ s.

†Las respuestas a todos los problemas cuyo número está en tipo recto (como en **11.1**) se presentan al final del libro. No se dan las respuestas a los problemas con números en itálicas (como en ***11.7***).

11.10 La aceleración de una partícula es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t. Cuando $t = 0$, la partícula está en $x = 24$ m. Si se sabe que en $t = 6$ s, $x = 96$ m y $v = 18$ m/s, exprese x y v en términos de t.

11.11 La aceleración de una partícula es directamente proporcional al tiempo t. Cuando $t = 0$, la velocidad de la partícula es $v = 16$ in./s. Si se sabe que $v = 15$ in./s, y que $x = 20$ in. cuando $t = 1$ s, determine la velocidad, la posición y la distancia total recorrida cuando $t = 7$ s.

11.12 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = kt^2$. *a*) Si se sabe que $v = -32$ ft/s cuando $t = 0$ y que $v = +32$ ft/s cuando $t = 4$ s, determine la constante k. *b*) Escriba las ecuaciones de movimiento, sabiendo también que $x = 0$ cuando $t = 4$ s.

11.13 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = A - 6t^2$, donde A es constante. En $t = 0$, la partícula inicia en $x = 8$ m con $v = 0$. Si se sabe que $t = 1$ s y $v = 30$ m/s, determine *a*) los tiempos en los que la velocidad es cero, *b*) la distancia total recorrida por la partícula cuando $t = 5$ s.

11.14 Se sabe que desde $t = 2$ s hasta $t = 10$ s, la aceleración de una partícula es inversamente proporcional al cubo del tiempo t. Cuando $t = 2$ s, $v = -15$ m/s y cuando $t = 10$ s, $v = 0.36$ m/s. Si se sabe que la partícula está dos veces más lejos del origen cuando $t = 2$ s que cuando $t = 10$ s, determine *a*) la posición de la partícula cuando $t = 2$ s y cuando $t = 10$ s, *b*) la distancia total recorrida por la partícula desde $t = 2$ s hasta $t = 10$ s.

11.15 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -k/x$. Se ha determinado experimentalmente que $v = 15$ ft/s cuando $x = 0.6$ ft y que $v = 9$ ft/s cuando $x = 1.2$ ft. Determine *a*) la velocidad de la partícula cuando $x = 1.5$ ft, *b*) la posición de la partícula en la que su velocidad es cero.

11.16 Una partícula que inicia desde el reposo en $x = 1$ ft se acelera de forma que la magnitud de su velocidad se duplica entre $x = 2$ ft y $x = 8$ ft. Si se sabe que la aceleración de la partícula está definida por la relación $a = k[x - (A/x)]$, determine los valores de las constantes A y k si la partícula tiene una velocidad de 29 ft/s cuando $x = 16$ ft.

11.17 Una partícula oscila entre los puntos $x = 40$ mm y $x = 160$ mm con una aceleración $a = k(100 - x)$, donde a y x se expresan en mm/s^2 y mm, respectivamente, y k es una constante. La velocidad de la partícula es de 18 mm/s cuando $x = 100$ mm y es cero cuando $x = 40$ mm y cuando $x = 160$ mm. Determine *a*) el valor de k, *b*) la velocidad cuando $x = 120$ mm.

11.18 Una partícula parte desde el reposo en el origen y recibe una aceleración $a = k(x + 4)^2$, donde a y x se expresan en m/s^2 y m, respectivamente, y k es una constante. Si se sabe que la velocidad de la partícula es de 4 m/s cuando $x = 8$ m, determine *a*) el valor de k, *b*) la posición de la partícula cuando $v = 4.5$ m/s, *c*) la velocidad máxima de la partícula.



Figura ***P11.19***

11.19 Una pieza de equipo electrónico que está rodeada por material de empaque se deja caer de manera que golpea el suelo con una velocidad de 4 m/s. Después del impacto, el equipo experimenta una aceleración de $a = -kx$, donde k es una constante y x es la compresión del material de empaque. Si dicho material experimenta una compresión máxima de 20 mm, determine la aceleración máxima del equipo.

11.20 Con base en observaciones experimentales, la aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -(0.1 + \text{sen } x/b)$, donde a y x se expresan en m/s^2 y metros, respectivamente. Si se sabe que $b = 0.8$ m y que $v = 1$ m/s cuando $x = 0$, determine *a*) la velocidad de la partícula cuando $x = -1$ m, *b*) la posición de la partícula en la que su velocidad es máxima, *c*) la velocidad máxima.

11.21 A partir de $x = 0$, sin velocidad inicial, la aceleración de una partícula está definida por la relación $a = 0.8\sqrt{v^2 + 49}$, donde a y v se expresan en m/s^2 y m/s, respectivamente. Determine *a*) la posición de la partícula cuando $v = 24$ m/s, *b*) la rapidez de la partícula cuando $x = 40$ m.

11.22 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -k\sqrt{v}$, donde k es una constante. Si se sabe que en $t = 0$, $x = 0$ y $v = 81$ m/s y que $v = 36$ m/s cuando $x = 18$ m, determine *a*) la velocidad de la partícula cuando $x = 20$ m, *b*) el tiempo requerido para que la partícula quede en reposo.

11.23 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = -0.8v$, donde a se expresa en in./s^2 y v en in./s. Si se sabe que cuando $t = 0$ la velocidad es de 40 in./s, determine *a*) la distancia que recorrerá la partícula antes de quedar en reposo, *b*) el tiempo requerido para que la partícula quede en reposo, *c*) el tiempo requerido para que la velocidad de la partícula se reduzca a 50 por ciento de su valor inicial.

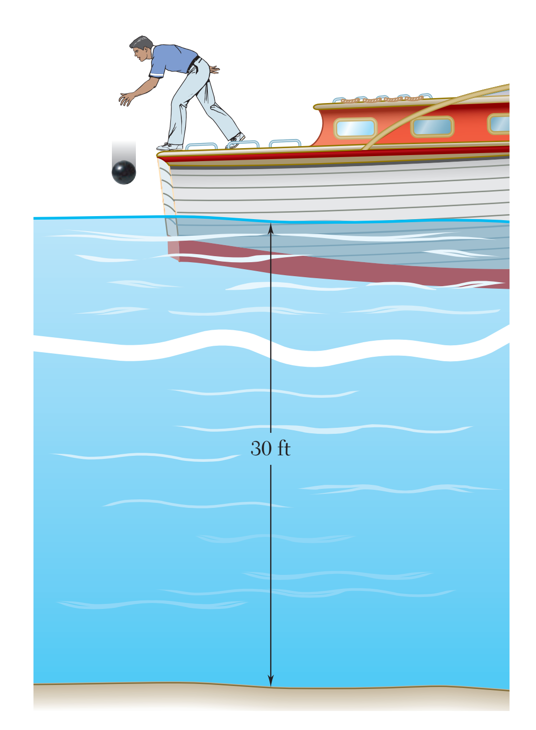


Figura P11.24

11.24 Una bola de boliche se deja caer desde una lancha, de manera que golpea la superficie del lago con una rapidez de 25 ft/s. Si se supone que la bola experimenta una aceleración hacia abajo $a = 10 - 0.9v^2$ cuando está en el agua, determine la velocidad de la bola cuando golpea el fondo del lago.

11.25 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = 0.4(1 - kv)$, donde k es una constante. Si se sabe que en $t = 0$ la partícula parte desde el reposo con $x = 4$ m, y que cuando $t = 15$ s, $v = 4$ m/s, determine *a*) la constante k, *b*) la posición de la partícula cuando $v = 6$ m/s, *c*) la velocidad máxima de la partícula.

11.26 Una partícula se proyecta hacia la derecha desde la posición $x = 0$ con una velocidad inicial de 9 m/s. Si la aceleración de la partícula se define mediante la relación $a = -0.6v^{3/2}$, donde a y v se expresan en m/s^2 y m/s, respectivamente, determine *a*) la distancia que habrá recorrido la partícula cuando su velocidad sea de 4 m/s, *b*) el tiempo cuando $v = 1$ m/s, *c*) el tiempo requerido para que la partícula recorra 6 m.

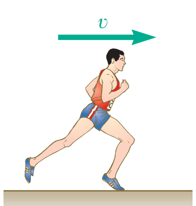


Figura P11.27

11.27 Con base en observaciones, la velocidad de un atleta puede aproximarse por medio de la relación $v = 7.5(1 - 0.04x)^{0.3}$, donde v y x se expresan en mi/h y millas, respectivamente. Si se sabe que $x = 0$ cuando $t = 0$, determine *a*) la distancia que ha recorrido el atleta cuando $t = 1$ h, *b*) la aceleración del atleta en ft/s^2 cuando $t = 0$, *c*) el tiempo requerido para que el atleta recorra 6 mi.

11.28 Datos experimentales indican que en una región de la corriente de aire que sale por una rejilla de ventilación, la velocidad del aire emitido está definido por $v = 0.18v_0/x$, donde v y x se expresan en m/s y metros, respectivamente, y v_0 es la velocidad de descarga inicial del aire. Para $v_0 = 3.6$ m/s, determine *a*) la aceleración del aire cuando $x = 2$ m, *b*) el tiempo requerido para que el aire fluya de $x = 1$ a $x = 3$ m.

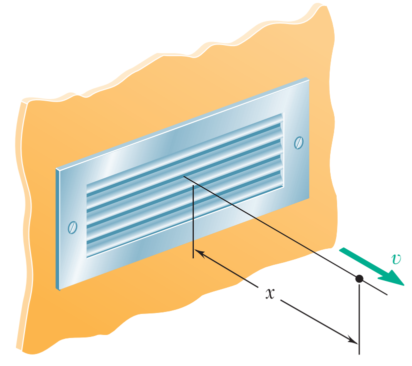


Figura P11.28

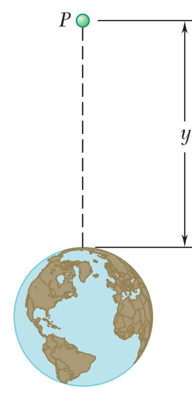


Figura *P11.29*

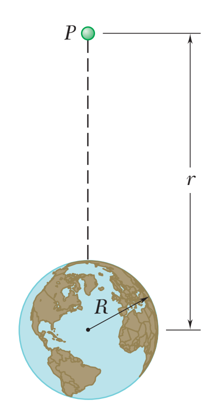


Figura *P11.30*

11.29 La aceleración debida a la gravedad a una altura y sobre la superficie de la Tierra puede expresarse como

$$a = \frac{-32.2}{[1 + (y/20.9 \times 10^6)]^2}$$

donde a y y se expresan en ft/s^2 y pies, respectivamente. Utilice esta expresión para calcular la altura que alcanza un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre si su velocidad inicial es *a*) 1 800 ft/s, *b*) 3 000 ft/s, *c*) 36 700 ft/s.

11.30 La aceleración debida a la gravedad de una partícula que cae hacia la Tierra es $a = -gR^2/r^2$, donde r es la distancia desde el *centro* de la Tierra a la partícula, R es el radio terrestre y g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. Si $R = 3\ 960$ mi, calcule la *velocidad de escape*, esto es, la velocidad mínima con la cual una partícula debe proyectarse hacia arriba desde la superficie terrestre para no regresar a la Tierra. (*Sugerencia*: $v = 0$ para $r = \infty$.)

11.31 La velocidad de una partícula es $v = v_0[1 - \text{sen}(\pi t/T)]$. Si se sabe que la partícula parte desde el origen con una velocidad inicial v_0, determine *a*) su posición y su aceleración en $t = 3T$, *b*) su velocidad promedio durante el intervalo de $t = 0$ a $t = T$.

11.32 La velocidad de una corredera se define mediante la relación $v = v'\text{sen}(\omega_n t + \phi)$. Si se denota la velocidad y la posición de la corredera en $t = 0$ con v_0 y x_0, respectivamente, y se sabe que el desplazamiento máximo de la corredera es $2x_0$, demuestre que *a*) $v' = (v_0^2 + x_0^2\omega_n^2)/2x_0\omega_n$, *b*) el valor máximo de la velocidad ocurre cuando $x = x_0[3 - (v_0/x_0\omega_n)^2]/2$.

11.4. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

El movimiento rectilíneo uniforme es un tipo de movimiento en línea recta que a menudo se encuentra en las aplicaciones prácticas. En este movimiento, la aceleración a de una partícula es cero para todo valor de t. En consecuencia, la velocidad v es constante, y la ecuación (11.1) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

La coordenada de posición x se obtiene cuando se integra esta ecuación. Al denotar mediante x_0 el valor inicial de x, se escribe

$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x = x_0 + vt \qquad (11.5)$$

Esta ecuación puede utilizarse *sólo si la velocidad de la partícula es constante*.

11.5. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es otro tipo común de movimiento. En éste, la aceleración a de la partícula es constante, y la ecuación (11.2) se convierte en

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante}$$

La velocidad v de la partícula se obtiene al integrar esta ecuación:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at \qquad (11.6)$$

donde v_0 es la velocidad inicial. Al sustituir por v en (11.1), se escribe

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Al denotar mediante x_0 el valor inicial de x e integrar, se tiene

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\, dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (11.7)$$

También se puede recurrir a la ecuación (11.4) y escribir

$$v\frac{dv}{dx} = a = \text{constante}$$

$$v\, dv = a\, dx$$

Al integrar ambos lados, se obtiene

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = a \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (11.8)$$

Las tres ecuaciones que se han deducido ofrecen relaciones útiles entre la coordenada de posición, la velocidad y el tiempo en el caso del movimiento uniformemente acelerado, al sustituir los valores apropiados de a, v_0 y x_0. El origen O del eje x debe definirse primero y escogerse una dirección positiva a lo largo del eje; esta dirección se usará para determinar los signos de a, v_0 y x_0. La ecuación (11.6) relaciona v y t y debe utilizarse cuando se desee que el valor de v corresponda a un valor determinado de t, o de manera inversa. La ecuación (11.7)

relaciona a x y t; la ecuación (11.8) relaciona a v y x. Una aplicación importante del movimiento uniformemente acelerado es el movimiento de un *cuerpo en caída libre.* La aceleración de un cuerpo en caída libre (usualmente denotada mediante g) es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2.

Es importante recordar que las tres ecuaciones anteriores pueden utilizarse *sólo cuando se sabe que la aceleración de la partícula es constante.* Si la aceleración de la partícula es variable, su movimiento se debe determinar a partir de las ecuaciones fundamentales (11.1) a (11.4) según los métodos señalados en la sección 11.3.

11.6. MOVIMIENTO DE VARIAS PARTÍCULAS

Cuando varias partículas se mueven de manera independiente a lo largo de la misma línea, es posible escribir ecuaciones de movimiento independientes para cada partícula. Siempre que sea factible, el tiempo debe registrarse a partir del mismo instante inicial para todas las partículas, y es necesario medir los desplazamientos desde el mismo origen y en la misma dirección. En otras palabras, deben usarse un solo reloj y una sola cinta métrica.

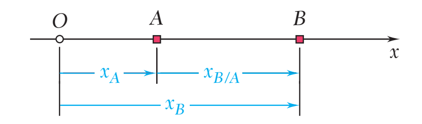


Figura 11.7

Movimiento relativo de dos partículas. Considere dos partículas A y B que se mueven a lo largo de la misma línea recta (figura 11.7). Si las coordenadas de posición x_A y x_B se miden desde el mismo origen, la diferencia $x_B - x_A$ define la *coordenada de posición relativa de B con respecto a A* y se denota por medio de $x_{B/A}$. Se escribe

$$x_{B/A} = x_B - x_A \qquad \text{o} \qquad x_B = x_A + x_{B/A} \qquad (11.9)$$

De manera independiente de las posiciones de A y B con respecto al origen, un signo positivo para $x_{B/A}$ significa que B está a la derecha de A, y un signo negativo indica que B se encuentra a la izquierda de A.

La razón de cambio $x_{B/A}$ se conoce como la *velocidad relativa de B con respecto a A* y se denota por medio de $v_{B/A}$. Al diferenciar (11.9), se escribe

$$v_{B/A} = v_B - v_A \qquad \text{o} \qquad v_B = v_A + v_{B/A} \qquad (11.10)$$

Un signo positivo de $v_{B/A}$ significa que *a partir de A se observa* que B se mueve en dirección positiva; un signo negativo indica, según se observa, que ésta se mueve en dirección negativa.

La razón de cambio de $v_{B/A}$ se conoce como la *aceleración relativa de B con respecto a A* y se denota mediante $a_{B/A}$. Al diferenciar (11.10), se obtiene[†]

$$a_{B/A} = a_B - a_A \qquad \text{o} \qquad a_B = a_A + a_{B/A} \qquad (11.11)$$



Fotografía 11.2 En esta grúa de embarcadero se utilizan múltiples cables y poleas.

Movimientos dependientes. Algunas veces, la posición de una partícula dependerá de la posición de otra o de varias partículas. En ese

[†] Advierta que el producto de los subíndices A y B/A que se usa en el miembro izquierdo de las ecuaciones (11.9), (11.10) y (11.11) es igual al subíndice B utilizado en el miembro del lado izquierdo.

caso se dice que los movimientos son *dependientes.* Por ejemplo, la posición del bloque B en la figura 11.8 depende de la posición del bloque A. Puesto que la cuerda $ACDEFG$ es de longitud constante, y puesto que las longitudes de las porciones de cuerda CD y EF alrededor de las poleas permanecen constantes, se concluye que la suma de las longitudes de los segmentos AC, DE y FG es constante. Al observar que la longitud del segmento AC difiere de x_A sólo por una constante y que, de manera similar, las longitudes de los segmentos DE y FG difieren de x_B únicamente por una constante, se escribe

$$x_A + 2x_B = \text{constante}$$

la cual recibe el nombre de ecuación de ligadura.

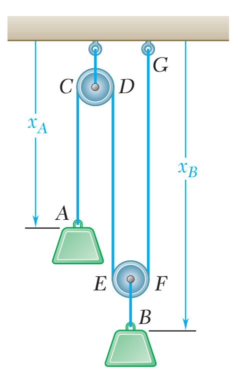


Figura 11.8

Puesto que sólo una de las dos coordenadas x_A y x_B pueden elegirse de manera arbitraria, se afirma que el sistema que se presenta en la figura 11.8 tiene *un grado de libertad.* De la relación entre las coordenadas de posición x_A y x_B se deduce que x_A presenta un incremento Δx_A, esto es, si el bloque A desciende una cantidad Δx_A, la coordenada x_B recibirá un incremento $\Delta x_B = -\frac{1}{2}\Delta x_A$. En otras palabras, el bloque B ascenderá la mitad de la misma cantidad; lo anterior puede verificarse con facilidad de modo directo de la figura 11.8.

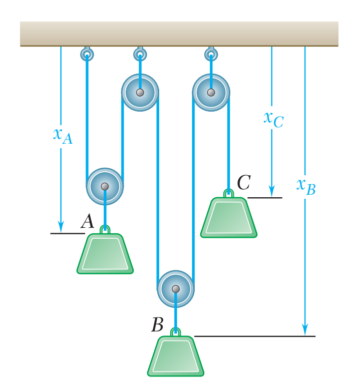


Figura 11.9

En el caso de los tres bloques de la figura 11.9, se puede observar de nuevo que la longitud de la cuerda que pasa por las poleas es constante y, en consecuencia, las coordenadas de posición de los tres bloques deben satisfacer la siguiente relación:

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$

Puesto que es posible elegir de manera arbitraria dos de las coordenadas, se afirma que el sistema que se muestra en la figura 11.9 tiene *dos grados de libertad.*

Cuando la relación que existe entre las coordenadas de posición de varias partículas es *lineal,* se cumple una relación similar entre las velocidades y entre las aceleraciones de las partículas. En el caso de los bloques de la figura 11.9, por ejemplo, se diferencia dos veces la ecuación obtenida y se escribe

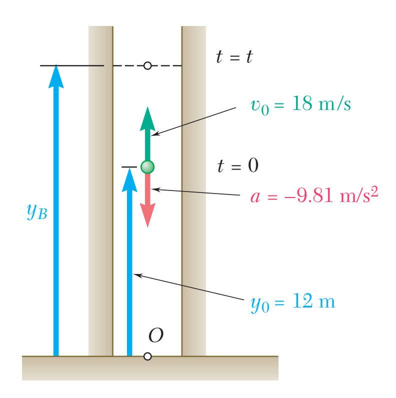
$$2\frac{dx_A}{dt} + 2\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2\frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

PROBLEMA RESUELTO 11.4

Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 12 metros en el pozo de un elevador con una velocidad inicial de 18 m/s. En el mismo instante un elevador de plataforma abierta pasa por el nivel de 5 m, moviéndose hacia arriba con una velocidad constante de 2 m/s. Determine *a*) cuándo y dónde golpea al elevador, *b*) la velocidad relativa de la pelota con respecto al elevador cuando ésta lo golpea.

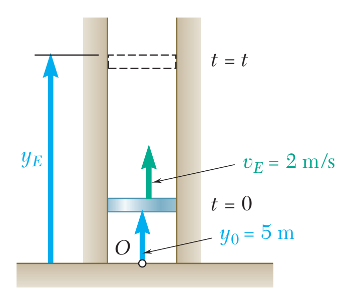
SOLUCIÓN



Movimiento de la pelota. Puesto que la pelota tiene una aceleración constante, su movimiento es *uniformemente acelerado.* Al colocar el origen de O del eje y a nivel del suelo, es decir su dirección positiva hacia arriba, encontramos que la posición inicial es $y_0 = +12$ m, la velocidad inicial corresponde a $v_0 = +18$ m/s, y la aceleración equivale a $a = -9.81$ m/s^2. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones para movimiento uniformemente acelerado, se escribe

$$v_B = v_0 + at \qquad v_B = 18 - 9.81t \qquad (1)$$

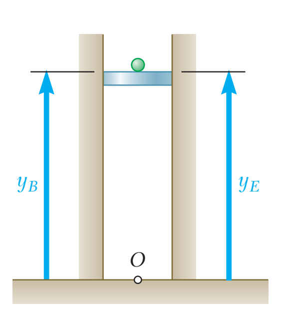
$$y_B = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y_B = 12 + 18t - 4.905t^2 \qquad (2)$$



Movimiento del elevador. Puesto que el elevador tiene una velocidad constante, su movimiento es *uniforme.* Al ubicar el origen O en el nivel del suelo y elegir la dirección positiva hacia arriba, se observa que $y_0 = +5$ m y se escribe

$$v_E = +2 \text{ m/s} \qquad (3)$$

$$y_E = y_0 + v_E t \qquad y_E = 5 + 2t \qquad (4)$$



La pelota golpea el elevador. Se usaron el mismo tiempo t y el mismo origen O al escribir las ecuaciones de movimiento tanto de la pelota como del elevador. Se observa en la figura que cuando la pelota golpea el elevador,

$$y_E = y_B \qquad (5)$$

Al sustituir para y_E y y_B en (2) y (4) en (5), se tiene

$$5 + 2t = 12 + 18t - 4.905t^2$$

$$t = -0.39 \text{ s} \qquad \text{y} \qquad t = 3.65 \text{ s} \blacktriangleleft$$

Sólo la raíz $t = 3.65$ s corresponde a un tiempo después de que se ha iniciado el movimiento. Al sustituir este valor en (4), se obtiene

$$y_E = 5 + 2(3.65) = 12.30 \text{ m}$$

Elevación desde el suelo = 12.30 m ◀

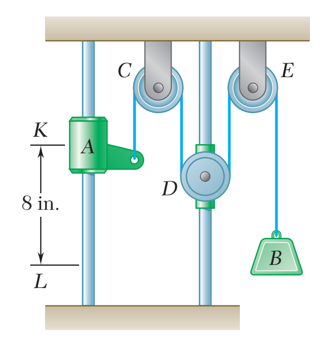
La velocidad relativa de la pelota con respecto al elevador es

$$v_{B/E} = v_B - v_E = (18 - 9.81t) - 2 = 16 - 9.81t$$

Cuando la pelota golpea al elevador en el tiempo $t = 3.65$ s, se tiene

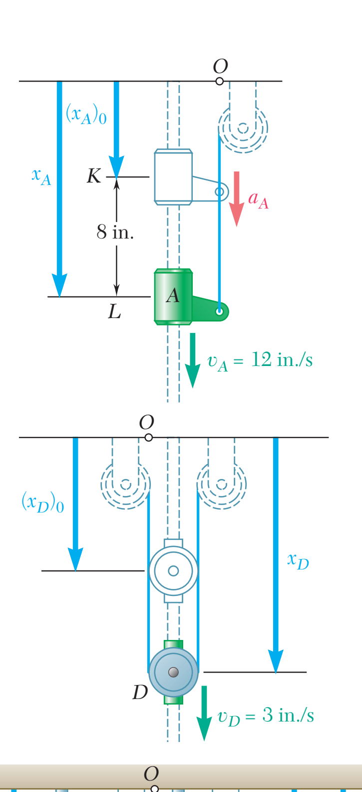
$$v_{B/E} = 16 - 9.81(3.65) \qquad v_{B/E} = -19.81 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$

El signo negativo significa que desde el elevador se observa que la pelota se mueve en el sentido negativo (hacia abajo).



PROBLEMA RESUELTO 11.5

El collarín *A* y el bloque *B* están conectados por medio de un cable que pasa por tres poleas *C*, *D* y *E*, como se indica. Las poleas *C* y *E* se mantienen fijas, en tanto que *B* está unida a un collarín que se jala hacia abajo con una velocidad constante de 3 in./s. En $t = 0$, el collarín *A* empieza a moverse hacia abajo desde la posición *K* con una aceleración constante y sin velocidad inicial. Si se sabe que la velocidad del collarín *A* es 12 in./s cuando éste pasa por el punto *L*, determine el cambio de la elevación, la velocidad y la aceleración del bloque *B* cuando el collarín *A* pasa por *L*.



SOLUCIÓN

Movimiento del collarín *A*. Se sitúa el origen *O* en la superficie horizontal superior y se elige la dirección positiva hacia abajo. Se observa que cuando $t = 0$, el collarín *A* está en la posición *K* y $(v_A)_0 = 0$. Puesto que $v_A = 12$ in./s y $x_A - (x_A)_0 = 8$ in., cuando el collarín pasa por *L*, se escribe

$$v_A^2 = (v_A)_0^2 + 2a_A[x_A - (x_A)_0] \qquad (12)^2 = 0 + 2a_A(8)$$
$$a_A = 9 \text{ in./s}^2$$

El tiempo en el cual el collarín *A* alcance el punto *L* se obtiene al escribir

$$v_A = (v_A)_0 + a_A t \qquad 12 = 0 + 9t \qquad t = 1.333 \text{ s}$$

Movimiento de la polea *D*. Recordando que la dirección positiva es hacia abajo, se escribe

$$a_D = 0 \qquad v_D = 3 \text{ in./s} \qquad x_D = (x_D)_0 + v_D t = (x_D)_0 + 3t$$

Cuando el collarín *A* llega a *L*, en $t = 1.333$ s, se tiene

$$x_D = (x_D)_0 + 3(1.333) = (x_D)_0 + 4$$

En consecuencia, $\qquad x_D - (x_D)_0 = 4$ in.

Movimiento del bloque *B*. Hay que observar que la longitud total del cable *ACDEB* difiere de la cantidad $(x_A + 2x_D + x_B)$ sólo por una constante. Puesto que la longitud del cable es constante durante el movimiento, esta cantidad también debe permanecer constante. De tal modo, considerando los tiempos $t = 0$ y $t = 1.333$ s, se escribe

$$x_A + 2x_D + x_B = (x_A)_0 + 2(x_D)_0 + (x_B)_0 \qquad (1)$$
$$[x_A - (x_A)_0] + 2[x_D - (x_D)_0] + [x_B - (x_B)_0] = 0 \qquad (2)$$

Sin embargo, se sabe que $x_A - (x_A)_0 = 8$ in. y $x_D - (x_D)_0 = 4$ in.; al sustituir estos valores en (2), se obtiene

$$8 + 2(4) + [x_B - (x_B)_0] = 0 \qquad x_B - (x_B)_0 = -16 \text{ in.}$$

De tal modo: El cambio en la elevación de $B = 16$ in.↑ ◀

Al diferenciar (1) dos veces, se obtienen ecuaciones que relacionan las velocidades y las aceleraciones de *A*, *B* y *D*. Al sustituir las velocidades y aceleraciones de *A* y *D* en $t = 1.333$ s, se tiene

$$v_A + 2v_D + v_B = 0: \qquad 12 + 2(3) + v_B = 0$$
$$v_B = -18 \text{ in./s} \qquad v_B = 18 \text{ in./s}\uparrow \blacktriangleleft$$

$$a_A + 2a_D + a_B = 0: \qquad 9 + 2(0) + a_B = 0$$
$$a_B = -9 \text{ in./s}^2 \qquad a_B = 9 \text{ in./s}^2\uparrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se obtuvieron las ecuaciones que describen el *movimiento rectilíneo uniforme* (velocidad constante) y el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* (aceleración constante). También se presentó el concepto de *movimiento relativo.* Las ecuaciones para el movimiento relativo [ecuaciones (11.9) a (11.11)] pueden aplicarse a los movimientos independientes o dependientes de cualesquiera de las partículas que se mueven a lo largo de la misma recta.

A. Movimiento independiente de una o más partículas. La solución de problemas de este tipo debe organizarse del modo siguiente:

1. Iniciar la solución listando la información proporcionada, elaborando un dibujo del sistema y seleccionando el origen y la dirección positiva del eje de coordenadas [problema resuelto 11.4]. Siempre es ventaja tener una representación visual de problemas de este tipo.

2. Escribir las ecuaciones que describen los movimientos de las diversas partículas, así como aquellas que describen cómo se relacionan estos movimientos [ecuación (5) del problema resuelto 11.4].

3. Definir las condiciones iniciales, esto es, especifique el estado del sistema correspondiente a $t = 0$. Esto es en especial importante si los movimientos de las partículas se inician en tiempos diferentes. En tales casos, es posible recurrir a cualesquiera de los dos enfoques.

a) Sea $t = 0$ el tiempo cuando las partículas empiezan a moverse. Se debe determinar entonces la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 de cada una de las demás partículas.

b) Sea $t = 0$ el tiempo en el que empieza a moverse la primera partícula. En ese caso, en cada una de las ecuaciones que describen el movimiento de otra partícula, se reemplaza t por $t - t_0$, donde t_0 es el tiempo en el cual esa partícula específica empieza a moverse. Es importante reconocer que las ecuaciones que se obtienen de esta manera sólo son válidas para $t \geq t_0$.

B. Movimiento dependiente de dos o más partículas. En problemas de este tipo las partículas del sistema están conectadas entre sí, por lo general mediante cuerdas o cables. El método de solución de estos problemas es similar al del grupo de problemas precedente, salvo que en este caso no será necesario describir las *conexiones físicas* entre las partículas. En los siguientes problemas, la conexión la proporciona uno o más cables. Para cada cable se tendrán que escribir ecuaciones similares a las últimas tres ecuaciones de la sección 11.6. Se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Hacer un bosquejo del sistema y seleccionar un sistema de coordenadas, indicando de manera clara el sentido positivo para cada uno de los ejes coordenados. Por ejemplo, en el problema resuelto 11.5 las longitudes se miden hacia abajo a partir del soporte horizontal superior. De tal modo, se concluye que estos desplazamientos, velocidades y aceleraciones, los cuales tienen valores positivos, están dirigidos hacia abajo.

2. Escribir la ecuación (de ligadura) que describe la represión impuesta por cada cable sobre el movimiento de las partículas implicadas. Al diferenciar dos veces esta ecuación, se obtendrán las relaciones correspondientes entre velocidades y aceleraciones.

3. Si varias direcciones de movimiento están implicadas, se debe seleccionar un eje de coordenadas y un sentido positivo para cada una de estas direcciones. También se debe intentar ubicar los orígenes de sus ejes de coordenadas, de modo que las ecuaciones de restricciones sean lo más simples posible. Por ejemplo, en el problema resuelto 11.5 es más fácil definir las diversas coordenadas, midiéndolas hacia abajo desde el soporte superior, que hacerlo hacia arriba desde el soporte inferior.

Por último, se debe recordar que el método de análisis que se describe en esta lección y las ecuaciones correspondientes únicamente pueden utilizarse para partículas que se mueven con *movimiento rectilíneo uniforme o uniformemente acelerado.*

Problemas

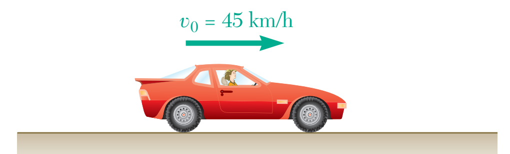


Figura P11.33

11.33 Una automovilista entra a una carretera a 45 km/h y acelera uniformemente hasta 99 km/h. De acuerdo con el odómetro del automóvil, la conductora sabe que recorrió 0.2 km mientras aceleraba. Determine *a*) la aceleración del automóvil, *b*) el tiempo que se requiere para alcanzar 99 km/h.

11.34 Un camión recorre 220 m en 10 s mientras se desacelera a una razón constante de 0.6 m/s^2. Determine *a*) su velocidad inicial, *b*) su velocidad final, *c*) la distancia recorrida durante los primeros 1.5 s.

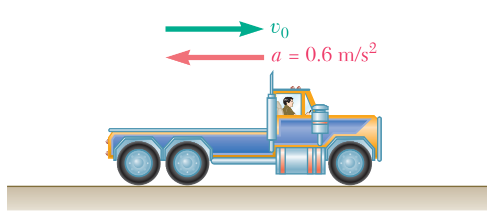


Figura P11.34

11.35 Si se supone una aceleración uniforme de 11 ft/s^2 y se sabe que la rapidez de un automóvil cuando pasa por *A* es de 30 mi/h, determine *a*) el tiempo requerido para que el automóvil llegue a *B*, *b*) la rapidez del automóvil cuando pasa por *B*.

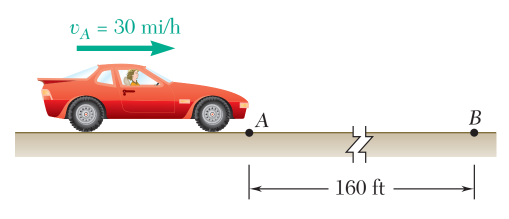


Figura P11.35

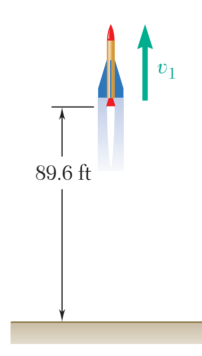


Figura P11.36

11.36 Un grupo de estudiantes lanza un cohete a escala en dirección vertical. Con base en los datos registrados, determinan que la altitud del cohete fue de 89.6 ft en la parte final del vuelo en la que el cohete aún tenía impulso, y que el cohete aterriza 16 s después. Si se sabe que el paracaídas de descenso no pudo abrir y que el cohete descendió en caída libre hasta el suelo después de alcanzar la altura máxima, y suponiendo que $g = 32.2$ ft/s^2, determine *a*) la rapidez v_1 del cohete al final del vuelo con impulso, *b*) la altura máxima alcanzada por el cohete.

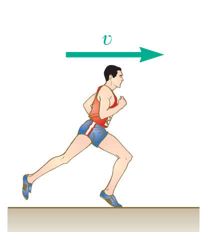


Figura *P11.37*

11.37 Un atleta en una carrera de 100 m acelera de manera uniforme durante los primeros 35 m y luego corre con una velocidad constante. Si el tiempo del atleta para los primeros 35 m es de 5.4 s, determine *a*) su aceleración, *b*) su velocidad final y *c*) el tiempo en que completa la carrera.

11.38 Un paquete pequeño se suelta desde el reposo en A y se mueve a lo largo del transportador $ABCD$ formado por ruedas deslizantes. El paquete tiene una aceleración uniforme de 4.8 m/s^2 mientras desciende sobre las secciones AB y CD, y su velocidad es constante entre B y C. Si la velocidad del paquete en D es de 7.2 m/s, determine *a*) la distancia d entre C y D, *b*) el tiempo requerido para que el paquete llegue a D.

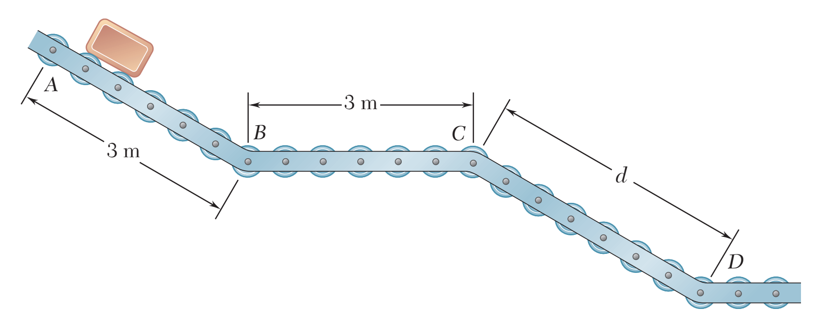


Figura *P11.38*

11.39 Un oficial de policía en una patrulla estacionada en una zona donde la rapidez es de 70 km/h observa el paso de un automóvil que marcha a una rapidez constante. Al oficial le parece que el conductor podría estar intoxicado y arranca la patrulla, acelera uniformemente hasta 90 km/h en 8 s y mantiene una velocidad constante de 90 km/h, alcanza al automovilista 42 s después. Si se sabe que transcurrieron 18 s antes de que el oficial empezara a perseguir al automovilista, determine *a*) la distancia que recorrió el oficial antes de alcanzar al automovilista, *b*) la rapidez del automovilista.

11.40 Cuando un corredor de relevos A ingresa a la zona de intercambio, de 20 m de largo, con una rapidez de 12.9 m/s empieza a desacelerar. Entrega la estafeta al corredor B 1.82 s después, y su compañero deja la zona de intercambio con la misma velocidad. Determine *a*) la aceleración uniforme de cada uno de los corredores, *b*) el momento en el que el corredor B debe empezar a correr.

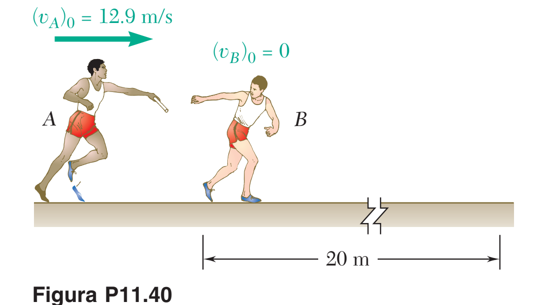


Figura P11.40

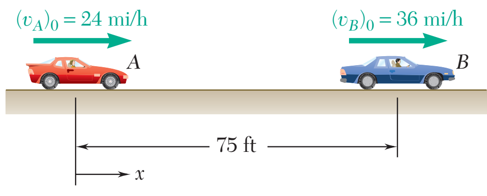


Figura P11.41

11.41 Los automóviles A y B viajan en carriles adyacentes de una carretera y en $t = 0$ tienen las posiciones y velocidades que se muestran en la figura. Si se sabe que el automóvil A tiene una aceleración constante de 1.8 ft/s^2 y que B tiene una desaceleración constante de 1.2 ft/s^2, determine *a*) cuándo y dónde A alcanzará a B, *b*) la rapidez de cada automóvil en ese momento.

11.42 En una carrera de lanchas, la lancha A se adelanta a la lancha B por 120 ft y ambos botes viajan a una rapidez constante de 105 mi/h. En $t = 0$, las lanchas aceleran a tasas constantes. Si se sabe que cuando B rebasa a A, $t = 8$ s y $v_A = 135$ mi/h, determine *a*) la aceleración de A, *b*) la aceleración de B.

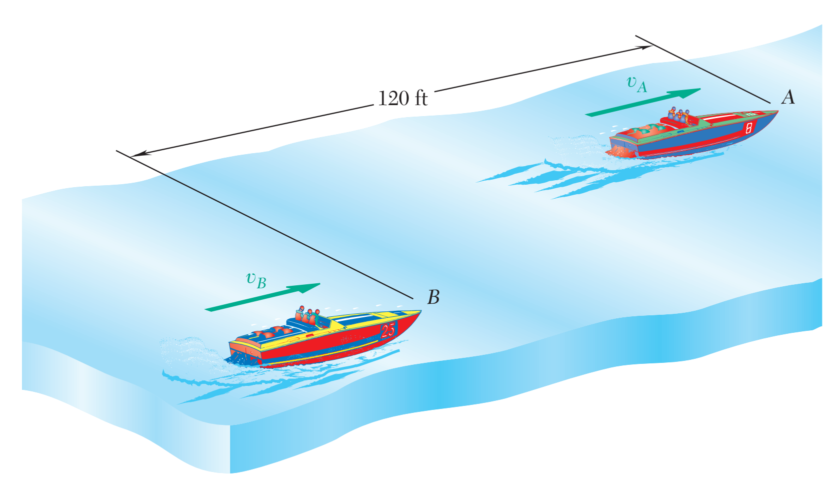


Figura P11.42

11.43 En una rampa se colocan cajas a intervalos uniformes de tiempo t_R y se deslizan hacia abajo de la rampa con aceleración uniforme. Si se sabe que cuando se suelta la caja B, la caja A ya se ha deslizado 6 m y que 1 s después están separadas por una distancia de 10 m, determine *a*) el valor de t_R, *b*) la aceleración de las cajas.

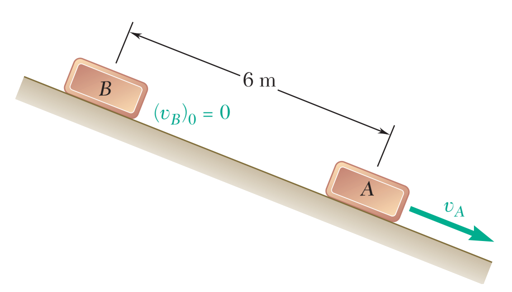


Figura P11.43

11.44 Dos automóviles A y B se aproximan uno al otro en los carriles adyacentes de una autopista. En $t = 0$, A y B están a 1 km de distancia, sus velocidades son $v_A = 108$ km/h y $v_B = 63$ km/h, y se encuentran en los puntos P y Q, respectivamente. Si se sabe que A pasa por el punto Q 40 segundos después que B, y que B pasa por el punto P 42 s después que A, determine *a*) las aceleraciones uniformes de A y B, *b*) cuándo los vehículos pasan uno al lado del otro, *c*) la rapidez de B en ese momento.

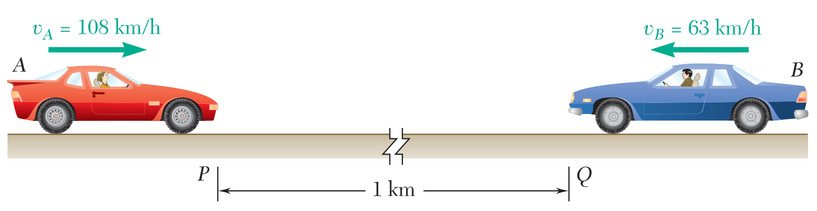


Figura P11.44

11.45 El automóvil A está estacionado en el carril con dirección al norte de una autopista y el automóvil B viaja en el carril con dirección al sur a una rapidez constante de 60 mi/h. En $t = 0$, A empieza a acelerar a una razón constante a_A, mientras que en $t = 5$ s, B empieza a frenar con una desaceleración constante de magnitud $a_A/6$. Si se sabe que cuando los automóviles pasan uno al lado del otro, $x = 294$ ft y $v_A = v_B$, determine *a*) la aceleración a_A, *b*) el momento en que los vehículos pasan uno al lado del otro, *c*) la distancia entre los automóviles en $t = 0$.

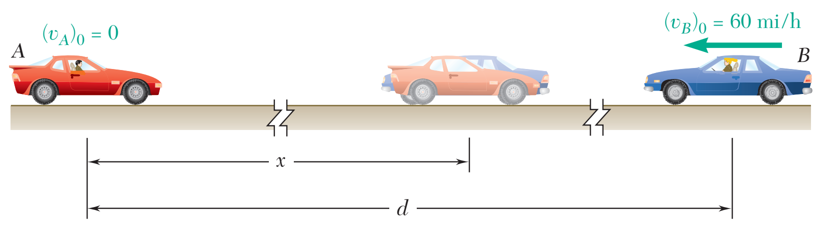


Figura *P11.45*

11.46 Dos bloques A y B se colocan sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura. En $t = 0$, A se proyecta hacia arriba sobre el plano con una velocidad inicial de 27 ft/s y B se suelta desde el reposo. Los bloques pasan uno junto al otro 1 s después, y B llega a la parte baja del plano inclinado cuando $t = 3.4$ s. Si se sabe que la máxima distancia que alcanza el bloque A desde la base del plano es de 21 ft y que las aceleraciones de A y B (debidas a la gravedad y la fricción) son constantes y están dirigidas hacia abajo sobre el plano inclinado, determine *a*) las aceleraciones de A y B, *b*) la distancia d, *c*) la rapidez de A cuando los bloques pasan uno junto al otro.

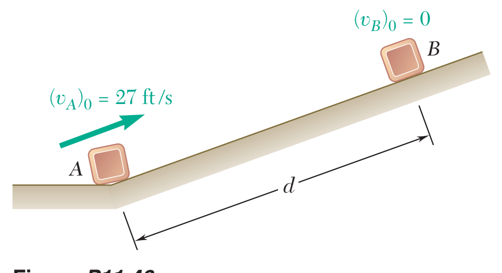


Figura *P11.46*

11.47 El bloque deslizante A se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 6 m/s. Determine, *a*) la velocidad del bloque B, *b*) la velocidad de la parte D del cable, *c*) la velocidad relativa de la porción C del cable con respecto a la porción D.

11.48 El bloque B inicia su movimiento desde el reposo y desciende con una aceleración constante. Si se sabe que después de que el bloque A se ha movido 400 mm, su velocidad es de 4 m/s, determine *a*) las aceleraciones de A y B, *b*) la velocidad y el cambio en la posición del bloque B después de 2 s.

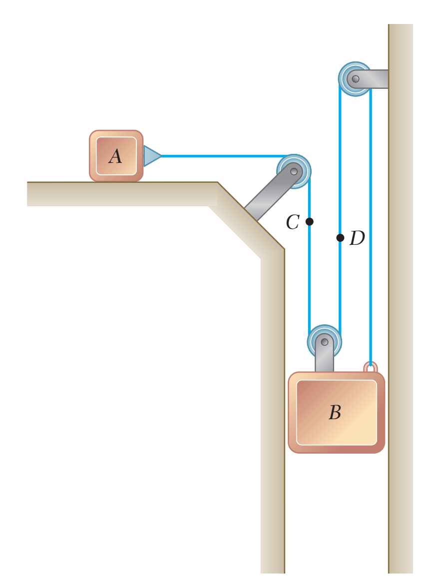


Figura P11.47 y P11.48

11.49 El elevador mostrado en la figura se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 15 ft/s. Determine *a*) la velocidad del cable *C*, *b*) la velocidad del contrapeso *W*, *c*) la velocidad relativa del cable *C* con respecto al elevador, *d*) la velocidad relativa del contrapeso *W* con respecto al elevador.

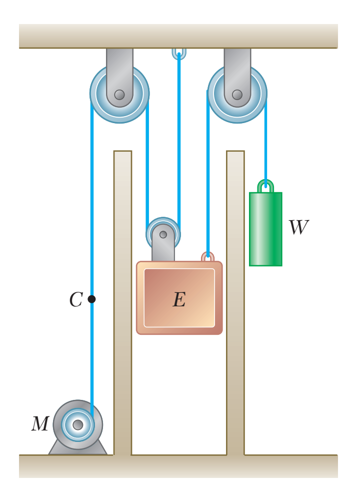


Figura P11.49 y P11.50

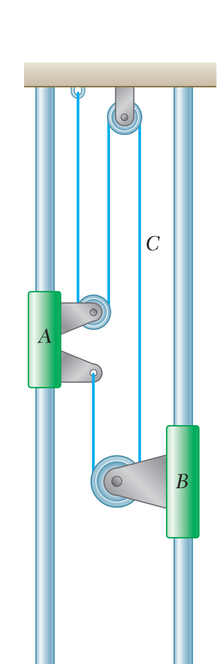


Figura *P11.51* y *P11.52*

11.50 El elevador mostrado en la figura inicia su movimiento desde el reposo y se mueve hacia arriba con una aceleración constante. Si el contrapeso *W* recorre 30 ft en 5 s, determine *a*) la aceleración del elevador y el cable *C*, *b*) la velocidad del elevador después de 5 s.

11.51 El collarín *A* empieza a moverse desde el reposo y se desplaza hacia arriba con una aceleración constante. Si se sabe que después de 8 s la velocidad relativa del collarín *B* con respecto al collarín *A* es de 24 in./s, determine *a*) las aceleraciones de *A* y *B*, *b*) la velocidad y el cambio en la posición de *B* después de 6 s.

11.52 En la posición mostrada, el collarín *B* se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 12 in./s. Determine *a*) la velocidad del collarín *A*, *b*) la velocidad de la porción *C* del cable, *c*) la velocidad relativa de la porción *C* del cable con respecto al collarín *B*.

11.53 El bloque deslizante *B* se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 300 mm/s. Determine *a*) la velocidad del bloque deslizante *A*, *b*) la velocidad de la porción *C* del cable, *c*) la velocidad de la porción *D* del cable, *d*) la velocidad relativa de la porción *C* del cable con respecto al bloque deslizante *A*.

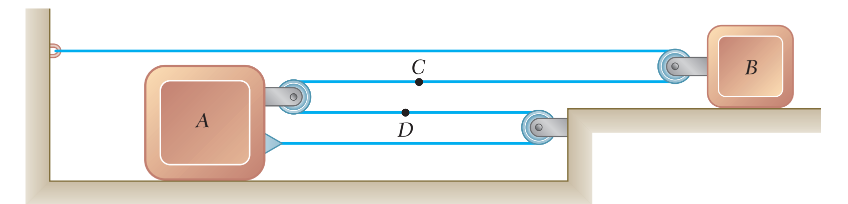


Figura P11.53 y P11.54

11.54 En el instante mostrado, el bloque deslizante *B* se está moviendo con una aceleración constante y su rapidez es de 150 mm/s. Si se sabe que después de que el bloque deslizante *A* se ha movido 240 mm hacia la derecha, su velocidad es de 60 mm/s, determine *a*) las aceleraciones de *A* y *B*, *b*) la aceleración de la porción *D* del cable, *c*) la velocidad y el cambio en la posición del bloque deslizante *B* luego de 4 s.

11.55 El bloque B se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 20 mm/s. En $t = 0$, el bloque A se mueve hacia arriba con una aceleración constante y su velocidad es de 30 mm/s. Si se sabe que en $t = 3$ s el bloque deslizante C se ha movido 57 mm a la derecha, determine *a*) la velocidad del bloque deslizante C en $t = 0$, *b*) las aceleraciones de A y C, *c*) el cambio en la posición del bloque A después de 5 s.

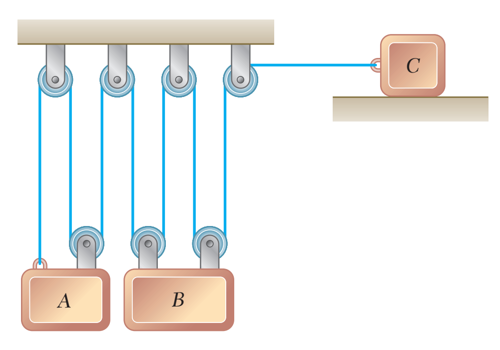


Figura P11.55 y P11.56

11.56 El bloque B empieza a moverse desde el reposo, el bloque A se mueve con una aceleración constante y el bloque deslizante C se desplaza hacia la derecha con una aceleración constante de 75 mm/s^2. Si se sabe que en $t = 2$ s las velocidades de B y C son 480 mm/s hacia abajo y 280 mm/s hacia la derecha, respectivamente, determine *a*) las aceleraciones de A y B, *b*) las velocidades iniciales de A y C, *c*) el cambio en la posición del bloque deslizante C después de 3 s.

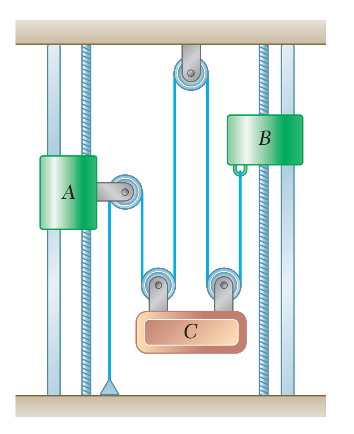
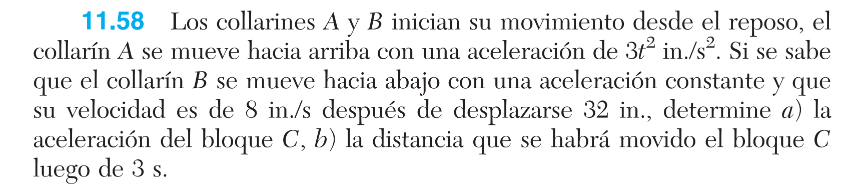


Figura P11.57 y P11.58

11.57 El collarín A inicia su movimiento desde el reposo en $t = 0$ y se mueve hacia abajo con una aceleración constante de 7 in./s^2. El collarín B se desplaza hacia arriba con una aceleración constante y su velocidad inicial es de 8 in./s. Si se sabe que el collarín B se mueve 20 in. entre $t = 0$ y $t = 2$ s, determine *a*) las aceleraciones del collarín B y el bloque C, *b*) el tiempo en el cual la velocidad del bloque C es cero, *c*) la distancia que habrá recorrido el bloque C en ese tiempo.



11.58 Los collarines A y B inician su movimiento desde el reposo, el collarín A se mueve hacia arriba con una aceleración de $3t^2$ in./s^2. Si se sabe que el collarín B se mueve hacia abajo con una aceleración constante y que su velocidad es de 8 in./s después de desplazarse 32 in., determine *a*) la aceleración del bloque C, *b*) la distancia que se habrá movido el bloque C luego de 3 s.

11.59 El sistema mostrado inicia su movimiento desde el reposo y cada componente se mueve con una aceleración constante. Si la aceleración re-lativa del bloque C con respecto al collarín B es de 60 mm/s^2 hacia arriba y la aceleración relativa del bloque D con respecto al bloque A es de 110 mm/s^2 hacia abajo, determine *a*) la velocidad del bloque C después de 3 s, *b*) el cambio en la posición de bloque D luego de 5 s.

******11.60*** El sistema mostrado inicia su movimiento desde el reposo y la longitud del cordón superior se ajusta de manera que A, B y C se encuentren inicialmente al mismo nivel. Cada componente se mueve con una aceleración constante y después de 2 s el cambio relativo en la posición del bloque C con respecto al bloque A es de 280 mm hacia arriba. Si se sabe que cuando la velocidad relativa del collarín B con respecto al bloque A es de 80 mm/s hacia abajo, los desplazamientos de A y B son, respectivamente, de 160 mm y de 320 mm hacia abajo, determine *a*) las aceleraciones de A y B si $a_B >$ 10 mm/s^2, *b*) el cambio en la posición del bloque D cuando la velocidad del bloque C es de 600 mm/s hacia arriba.

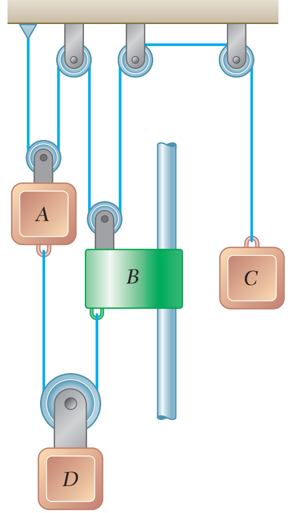


Figura *P11.59* y *P11.60*

*11.7. SOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO

En la sección 11.2 se observó que las fórmulas fundamentales

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

tienen un significado geométrico. La primera fórmula expresa que la velocidad en cualquier instante es igual a la pendiente de la curva *x*-*t* en el mismo instante (figura 11.10). La segunda indica que la acelera-

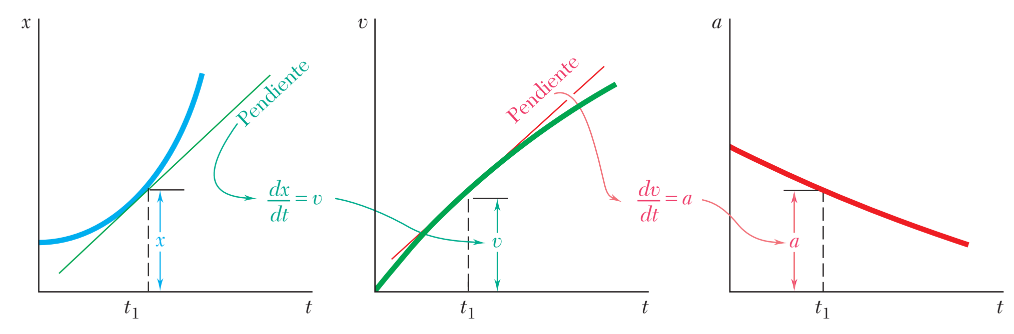


Figura 11.10

ción es igual a la pendiente de la curva *v*-*t*. Estas dos propiedades pueden utilizarse para determinar de manera gráfica las curvas de *v*-*t* y *a*-*t* de un movimiento cuando se conoce la curva *x*-*t*.

Al integrar las dos fórmulas fundamentales desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2, se escribe

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \qquad \text{y} \qquad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \tag{11.12}$$

La primera fórmula expresa que el área medida bajo la curva *v*-*t* desde t_1 hasta t_2 es igual al cambio en *x* durante ese intervalo de tiempo (figura 11.11). De manera similar, la segunda fórmula expresa que el área medida bajo la curva *a*-*t* desde t_1 hasta t_2 es igual al cambio en *v* durante ese intervalo de tiempo. Estas dos propiedades pueden utilizarse para determinar de manera gráfica la curva de movimiento *x*-*t* cuando se conoce su curva *v*-*t* o su curva *a*-*t* (véase el problema 11.6).

Las soluciones gráficas resultan en particular útiles cuando el movimiento que se considera se define a partir de datos experimentales y cuando *x*, *v* y *a* no son funciones analíticas de *t*. También es posible utilizarlas de manera ventajosa cuando el movimiento consta de distintas partes, y cuando su análisis requiere escribir una ecuación diferente para cada una de sus partes. Sin embargo, al utilizar una solución gráfica debe tenerse el cuidado de notar que 1) el área bajo la curva *v*-*t* mide el *cambio en x*, no la *x* misma, y de la misma forma, que el área bajo la curva *a*-*t* mide el cambio en *v*; 2) un área sobre el eje *t* corresponde a un *incremento* en *x* o *v*, en tanto que un área ubicada debajo del eje *t* mide un *decremento* en *x* o *v*.

Figura 11.11

Será útil recordar al dibujar las curvas de movimiento que si la velocidad es constante, se representará mediante una línea recta horizontal; la coordenada de posición *x* será entonces una función lineal de *t* y se representará por medio de una línea recta oblicua. Si la aceleración es constante y diferente de cero, se representará mediante una línea recta horizontal; *v* será en ese caso una función lineal de *t*, repre-

sentada por una línea recta oblicua, y x se expresará como un polinomio de segundo grado en t, representado por una parábola. Si la aceleración es una función lineal de t, la velocidad y la coordenada de posición serán iguales, respectivamente, a polinomios de segundo y tercer grados; a se representará entonces mediante una línea recta oblicua, v por medio de una parábola y x por una función cúbica. En general, si la aceleración es un polinomio de grado n en t, la velocidad será un polinomio de grado $n + 1$ y la coordenada de posición un polinomio de grado $n + 2$; estos polinomios se representan mediante curvas de movimiento de un grado correspondiente.

*11.8. OTROS MÉTODOS GRÁFICOS

Para determinar la posición de una partícula en un instante dado a partir directamente de la curva a-t puede emplearse una solución gráfica alternativa. Al denotar los valores de x y v en $t = 0$ como x_0 y v_0 y sus valores en $t = t_1$ como x_1 y v_1 y observar que es posible dividir el área bajo la curva v-t en un rectángulo de área v_0t_1 y elementos diferenciales horizontales de área $(t_1 - t)\,dv$ (figura 11.12*a*), se escribe

$$x_1 - x_0 = \text{área bajo la curva } v\text{-}t = v_0t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\,dv$$

Al sustituir $dv = a\,dt$ en la integral, se obtiene

$$x_1 - x_0 = v_0t_1 + \int_0^{t_1} (t_1 - t)\,a\,dt$$

Al referirse a la figura 11.12*b*), se advierte que la integral representa el primer momento del área bajo la curva a-t con respecto a la línea $t = t_1$ que limita el área de la derecha. En consecuencia, este método de solución se conoce como el *método del momento-área.* Si se conoce la abscisa $\bar{t}$ del centroide C del área, la coordenada de posición x_1 puede obtenerse al escribir

$$x_1 = x_0 + v_0t_1 + (\text{área bajo la curva } a\text{-}t)(t_1 - \bar{t}) \qquad (11.13)$$

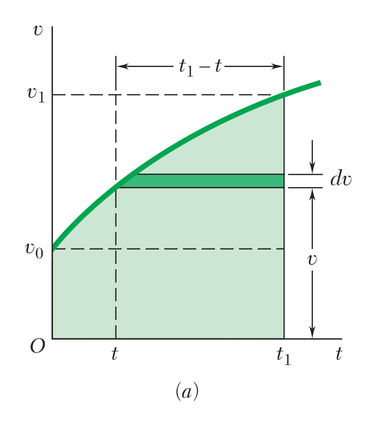
Si el área bajo la curva a-t es un área compuesta, es posible obtener el último término en (11.13) al multiplicar cada área componente por la distancia desde su centroide hasta la línea $t = t_1$. Las áreas sobre el eje t deben considerarse como positivas y las áreas por debajo del eje t como negativas.

Otro tipo de curva de movimiento, la curva v-x, se utiliza en algunas ocasiones. Si se ha graficado una curva de estas características (figura 11.13), se puede obtener la aceleración a en cualquier tiempo dibujando la normal AC de la curva y *midiendo la subnormal BC.* En realidad, al observar que el ángulo entre AC y AB es igual al ángulo θ entre el horizontal y la tangente en A (cuya pendiente es $\tan\theta = dv/dx$), se escribe

$$BC = AB \tan\theta = v\frac{dv}{dx}$$

y en consecuencia, de la fórmula (11.4),

$$BC = a$$



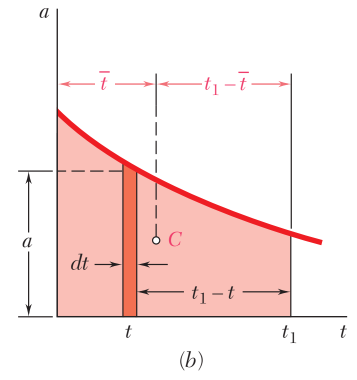


Figura 11.12

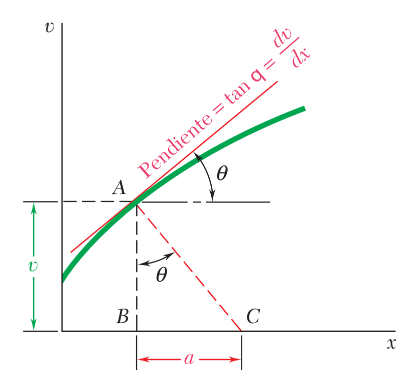
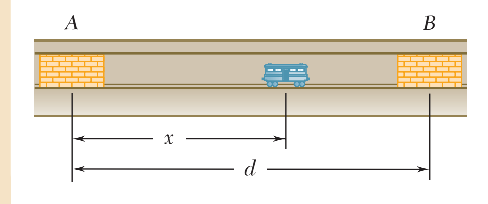


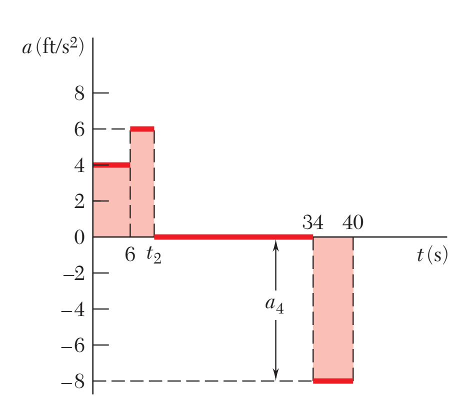
Figura 11.13

PROBLEMA RESUELTO 11.6



Un vagón de transporte subterráneo sale de la estación A; aumenta su rapidez a razón de 4 ft/s² durante 6 s y después a razón de 6 ft/s² hasta que llega a la rapidez de 48 ft/s. El vagón mantiene la misma rapidez hasta que se aproxima a la estación B; en ese momento se aplican los frenos, impartiéndosele al vagón una desaceleración constante y provocando que se detenga en 6 s. El tiempo de recorrido total desde A hasta B es de 40 s. Dibuje las curvas a-t, v-t y x-t y determine la distancia entre las estaciones A y B.

SOLUCIÓN



Curva aceleración-tiempo. Puesto que la aceleración es constante o cero, la curva a-t está conformada por segmentos de línea recta horizontales. Los valores de t_2 y a_4 se determinan de la manera siguiente:

$0 < t < 6$: Cambio en v = área bajo la curva a-t

$$v_6 - 0 = (6 \text{ s})(4 \text{ ft/s}^2) = 24 \text{ ft/s}$$

$6 < t < t_2$: Puesto que la velocidad se incrementa de 24 a 48 ft/s,

Cambio en v = área bajo la curva a-t

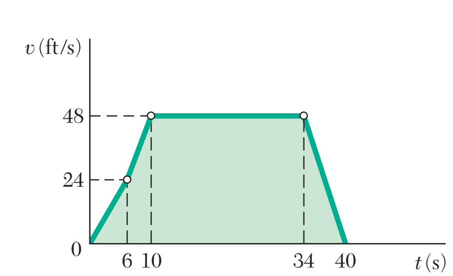
$$48 \text{ ft/s} - 24 \text{ ft/s} = (t_2 - 6)(6 \text{ ft/s}^2) \qquad t_2 = 10 \text{ s}$$

$t_2 < t < 34$: Puesto que la velocidad es constante, la aceleración es cero.

$34 < t < 40$: Cambio v = área bajo la curva a-t

$$0 - 48 \text{ ft/s} = (6 \text{ s})a_4 \qquad a_4 = -8 \text{ ft/s}^2$$

Al ser negativa la aceleración, el área correspondiente está por debajo del eje t; esta área representa una disminución en la velocidad.



Curva velocidad-tiempo. Puesto que la aceleración es constante o cero, la curva v-t está conformada por segmentos de línea recta que conectan los puntos determinados antes.

Cambio en x = área bajo la curva v-t

$0 < t < 6$: $x_6 - 0 = \frac{1}{2}(6)(24) = 72$ ft

$6 < t < 10$: $x_{10} - x_6 = \frac{1}{2}(4)(24 + 48) = 144$ ft

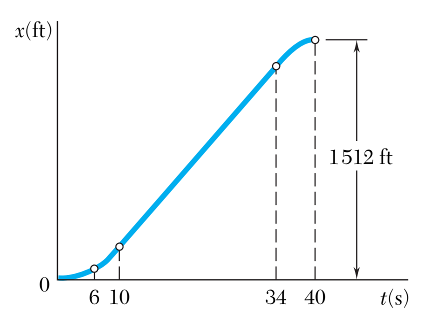
$10 < t < 34$: $x_{34} - x_{10} = (24)(48) = 1\,152$ ft

$34 < t < 40$: $x_{40} - x_{34} = \frac{1}{2}(6)(48) = 144$ ft

Al sumar los cambios en x, se obtiene la distancia de A a B:

$$d = x_{40} - 0 = 1512 \text{ ft}$$

$$d = 1\,512 \text{ ft} \quad ◀$$



Curva posición-tiempo. Los puntos determinados deben unirse mediante tres arcos de parábola y un segmento de línea recta. Al construir la curva x-t, se debe tener presente que para cualquier valor de t la pendiente de la tangente a la curva x-t es igual al valor de v en ese instante.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección (secciones 11.7 y 11.8) se revisaron y desarrollaron varias *técnicas gráficas para la solución de problemas de movimiento rectilíneo.* Es posible utilizar estas técnicas para resolver problemas directamente o para complementar métodos de solución analíticos al proporcionar una descripción visual y, en consecuencia, una mejor comprensión del movimiento de un cuerpo determinado. Se sugiere dibujar una o más curvas de movimiento para varios de los problemas de esta lección, incluso si éstos no son parte de la tarea asignada.

1. *Dibujo de curvas x-t, v-t y a-t y aplicación de métodos gráficos.* Las siguientes propiedades se indicaron en la sección 11.7 y deben recordarse cuando se utilicen métodos de solución gráficos.

a) Las pendientes de las curvas x-t y v-t en el tiempo t_1 son respectivamente iguales a la *velocidad* y la *aceleración* en el tiempo t_1.

b) Las áreas bajo las curvas a-t y v-t entre los tiempos t_1 y t_2 son respectivamente iguales al cambio Δv en la velocidad y al cambio Δx en la coordenada de posición durante ese intervalo de tiempo.

c) Si se conoce una bajo curvas de movimiento, las propiedades fundamentales que se han resumido en los párrafos *a* y *b* permitirán construir las otras dos curvas. Sin embargo, al usar las propiedades del párrafo *b,* es necesario conocer la velocidad y la coordenada de posición en el tiempo t_1 para determinar la velocidad y la coordenada de posición en el tiempo t_2. Por lo tanto, en el problema resuelto 11.6, saber que el valor inicial de la velocidad era cero permite encontrar la velocidad en $t = 6$ s: $v_6 = v_0 + \Delta v = 0 + 24$ ft/s $= 24$ ft/s.

Se han estudiado previamente los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante o flector para una viga, y se debe reconocer la analogía que existe entre las tres curvas de movimiento en los tres diagramas que representan respectivamente la carga distribuida, la fuerza cortante y el momento flector en una viga. De tal modo, todas las técnicas relativas a la construcción de estos diagramas pueden aplicarse cuando se dibujen las curvas de movimiento.

2. *Empleo de métodos aproximados.* Cuando las curvas *a-t* y *v-t* no se representan por medio de funciones analíticas o cuando se basan en datos experimentales, en ocasiones es necesario usar métodos aproximados para calcular las áreas bajo estas curvas. En esos casos, el área dada es aproximada por una serie de rectángulos de ancho Δt. Cuando más pequeño sea el valor de Δt, tanto menor sería el error introducido por la aproximación. La velocidad y la coordenada de posición se obtienen al escribir

$$v = v_0 + \Sigma a_{\text{prom}}\,\Delta t \qquad x = x_0 + \Sigma v_{\text{prom}}\,\Delta t$$

donde a_{prom} y v_{prom} son las alturas de un rectángulo de aceleración y un rectángulo de velocidad, respectivamente.

(*continúa*)

3. Aplicación del método del momento-área. Esta técnica gráfica se emplea cuando se proporciona la curva *a-t* y el cambio en la coordenada de posición se va a determinar. En la sección 11.8 se mostró que es posible expresar la coordenada de posición x_1 como

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área bajo la curva } a\text{-}t)(t_1 - \bar{t}) \qquad (11.13)$$

Hay que tener en cuenta que cuando el área bajo la curva *a-t* es un área compuesta, es necesario usar el mismo valor de t_1 para calcular la contribución de cada una de las áreas componentes.

4. Determinación de la aceleración a partir de la curva v-x. En la sección 11.8 vimos que es posible determinar la aceleración de una curva *v-x* mediante medición directa. Sin embargo, es importante advertir que este método resulta aplicable sólo si se usa la misma escala lineal para los ejes v y x (por ejemplo, 1 in. = 10 ft y 1 in. = 10 ft/s). Cuando no se satisface esta condición, la aceleración puede aun determinarse de la ecuación

$$a = v\,\frac{dv}{dx}$$

donde la pendiente dv/dx se obtiene como sigue: primero se dibuja la tangente a la curva en el punto de interés. Después, mediante el empleo de las escalas apropiadas, se miden a lo largo de esa tangente incrementos correspondientes Δx y Δv. La pendiente deseada es igual a la razón $\Delta v/\Delta x$.

Problemas

11.61 Una partícula se mueve en línea recta con la aceleración que se muestra en la figura. Si se sabe que la partícula inicia desde el origen con $v_0 = -18$ ft/s, *a*) construya las curvas *v-t* y *x-t* para $0 < t < 20$ s, *b*) determine la posición y la velocidad de la partícula y la distancia total recorrida cuando $t = 12$ s.

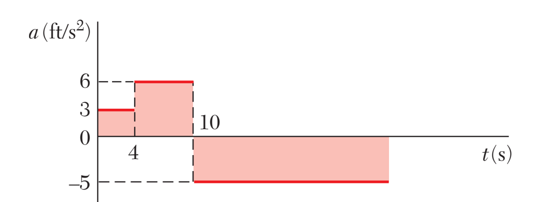


Figura P11.61

11.62 Para la partícula y el movimiento del problema 11.61 construya las curvas *v-t* y *x-t* para $0 < t < 20$ s, y determine *a*) el máximo valor de la velocidad de la partícula, *b*) el valor máximo de la coordenada de posición.

11.63 Una partícula se mueve en línea recta con la velocidad que se muestra en la figura. Si se sabe que $x = -540$ ft en $t = 0$, *a*) construya las curvas *a-t* y *x-t* para $0 < t < 50$ s, y determine *b*) la distancia total recorrida por la partícula cuando $t = 50$ s, *c*) los dos tiempos en los cuales $x = 0$.

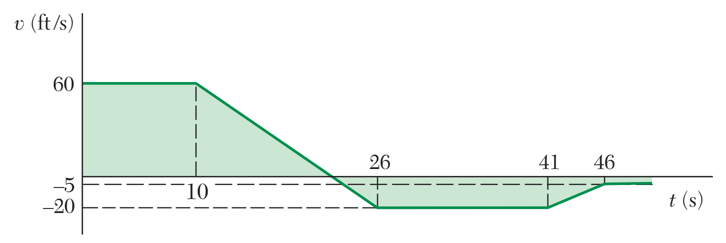


Figura P11.63

11.64 Una partícula se mueve a determinada velocidad en línea recta. Si se sabe que $x = -540$ ft en $t = 0$, *a*) construya las curvas *a-t* y *x-t* para $0 < t < 50$ s y determine *b*) el valor máximo de la coordenada de posición de la partícula, *c*) los valores de *t* para los cuales la partícula se encuentra en $x = 100$ ft.

11.65 Un paracaidista cae libremente a razón de 200 km/h cuando abre su paracaídas a una altura de 600 m. Luego de una rápida y constante desaceleración, desciende a una razón constante de 50 km/h desde 586 m hasta 30 m, donde maniobra el paracaídas en el viento para frenar aún más su descenso. Si se sabe que el paracaidista aterriza con una velocidad descendente despreciable, determine *a*) el tiempo que requiere para aterrizar después de abrir su paracaídas, *b*) la desaceleración inicial.

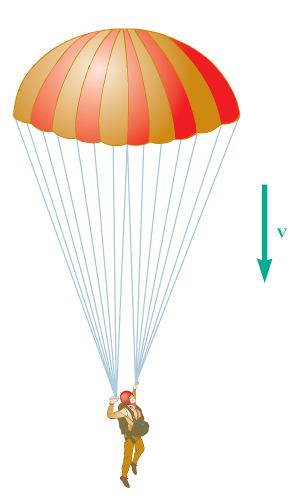


Figura P11.65

11.66 El componente de una máquina se recubre con pintura de spray mientras se monta sobre una tarima que se desplaza a 4 m en 20 s. La tarima tiene una velocidad inicial de 80 mm/s y puede acelerarse a una razón máxima de 60 mm/s^2. Si se sabe que el proceso de pintura requiere 15 s para terminarse y se lleva a cabo mientras la tarima se mueve a una velocidad constante, determine el valor más pequeño posible de la rapidez máxima de la tarima.

11.67 Un sensor de temperatura se conecta al deslizador *AB* que se mueve a lo largo de 60 in. hacia delante y hacia atrás. Las velocidades máximas del deslizador son 12 in./s hacia la derecha y 30 in./s hacia la izquierda. Cuando el deslizador se mueve a la derecha, acelera y desacelera a una razón constante de 6 in./s^2; cuando se desplaza a la izquierda, acelera y desacelera a razón constante de 20 in./s^2. Determine el tiempo que se requiere para que el deslizador realice un ciclo completo, asimismo construya las curvas *v-t* y *x-t* de su movimiento.

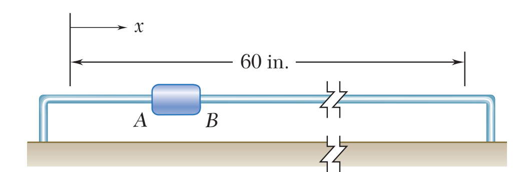


Figura *P11.67*

11.68 Un tren que viaja a 40 mi/h se encuentra a 3 mi de una estación. El tren desacelera de modo que su rapidez es de 20 mi/h cuando se encuentra a 0.5 mi de la estación. Si el tren llega a la estación 7.5 min después de que empieza a desacelerar y suponiendo desaceleraciones constantes, determine *a*) el tiempo que se requiere para que recorra las primeras 2.5 mi, *b*) la velocidad del tren cuando llega a la estación, *c*) la desaceleración constante final del tren.

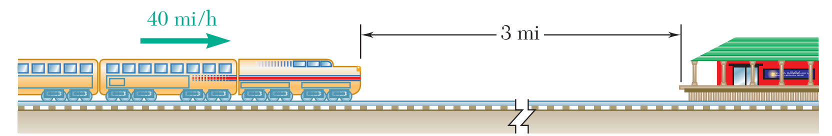


Figura *P11.68*

11.69 Dos puntos de revisión *A* y *B* en una carrera se ubican sobre la misma autopista con una separación de 12 km. Los límites de velocidad de los primeros 8 km y de los últimos 4 km de la sección son, respectivamente, 100 km/h y 70 km/h. Los conductores deben detenerse en cada punto de revisión, y el tiempo especificado entre los puntos *A* y *B* es de 8 min con 20 s. Si se sabe que el conductor acelera y desacelera a la misma tasa constante, determine la magnitud de su aceleración si viaja el mayor tiempo posible en el límite de velocidad.

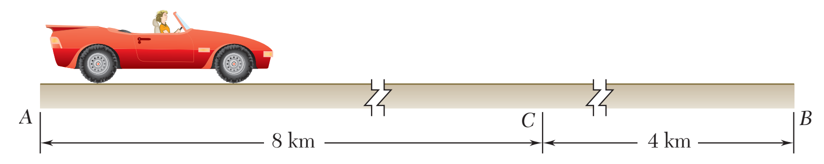


Figura P11.69

11.70 En una prueba realizada en un tanque de agua para la botadura de un pequeño bote a escala, la velocidad horizontal inicial del modelo es de 6 m/s y su aceleración horizontal varía linealmente de -12 m/s^2 en $t = 0$ a -2 m/s^2 en $t = t_1$ y después se mantiene igual a -2 m/s^2 hasta que $t = 1.4$ s. Si se sabe que $v = 1.8$ m/s cuando $t = t_1$, determine *a*) el valor de t_1, *b*) la velocidad y posición del modelo en $t = 1.4$ s.

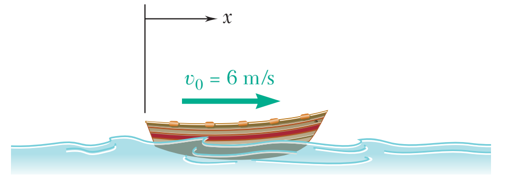


Figura P11.70

11.71 Un automóvil y un camión viajan a una rapidez constante de 35 mi/h; el automóvil está 40 ft detrás del camión. El conductor del auto quiere rebasar al camión, esto es, desea colocar su automóvil en B, 40 ft por delante del camión, y después regresar a la rapidez de 35 mi/h. La aceleración máxima del automóvil es de 5 ft/s^2 y la máxima desaceleración obtenida al aplicar los frenos es de 20 ft/s^2. ¿Cuál es el tiempo más corto en el que el conductor del automóvil puede completar la operación de rebase si en ningún momento sobrepasa la rapidez de 50 mi/h? Dibuje la curva v-t.

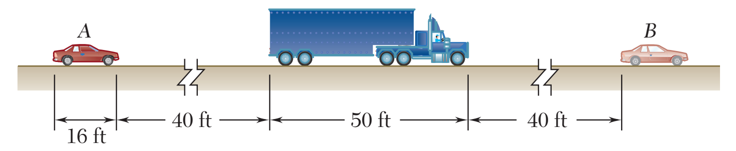


Figura P11.71

11.72 Retome el problema 11.71, y ahora suponga que el conductor del automóvil no presta ninguna atención al límite de rapidez mientras rebasa y se concentra en alcanzar la posición B y volver a tomar la velocidad de 35 mi/h en el menor tiempo posible. ¿Cuál es la máxima rapidez alcanzada? Dibuje la curva v-t.

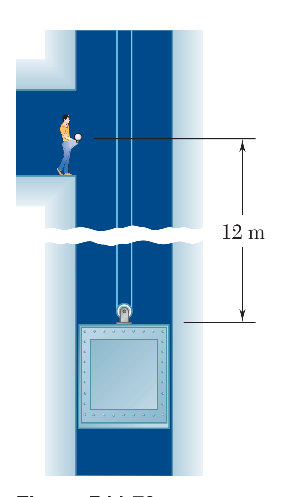


Figura P11.73

11.73 Un elevador inicia desde el reposo y se mueve hacia arriba, acelerando a una razón de 1.2 m/s^2, hasta que alcanza una rapidez de 7.8 m/s, la cual mantiene. Dos segundos después de que el elevador empieza a moverse, un hombre que se encuentra a 12 m por encima de la posición inicial del elevador lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. Determine el momento en el que la pelota golpeará al elevador.

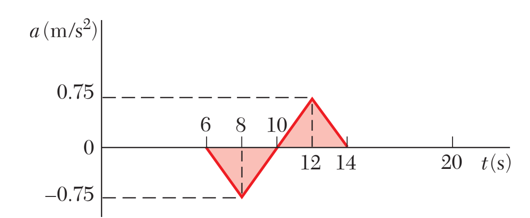


Figura P11.74

11.74 El registro de aceleración que se muestra en la figura se obtuvo de un pequeño avión que viajaba a lo largo de una trayectoria recta. Si se sabe que $x = 0$ y $v = 60$ m/s cuando $t = 0$, determine *a*) la velocidad y la posición del avión cuando $t = 20$ s, *b*) su velocidad promedio durante el intervalo $6 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$.

11.75 El automóvil A viaja sobre una autopista a una rapidez constante $(v_A)_0 = 60$ mi/h y se encuentra a 380 ft de la entrada de una rampa de acceso, cuando el automóvil B entra al carril de aceleración en ese punto a una rapidez $(v_B)_0 = 15$ mi/h. El automóvil B acelera de manera uniforme y entra al carril de tráfico principal después de recorrer 200 ft en 5 s. Después continúa acelerando a la misma tasa hasta que alcanza una rapidez de 60 mi/h, que mantiene. Determine la distancia final entre los dos automóviles.

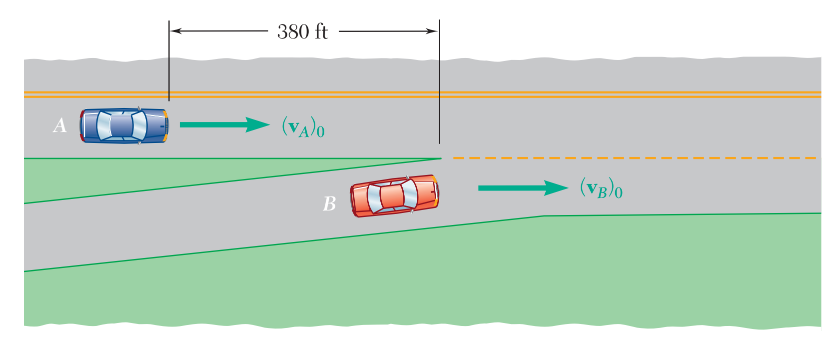


Figura *P11.75*

11.76 El automóvil A viaja a 40 mi/h cuando entra a una zona cuya rapidez máxima es de 30 mi/h. La conductora del automóvil A desacelera a una razón de 16 ft/s^2 hasta que alcanza una rapidez de 30 mi/h, la cual mantiene. Cuando el automóvil B, que se encontraba inicialmente a 60 ft detrás del automóvil A y viajaba a una rapidez constante de 45 mi/h, entra a la zona con el límite de velocidad indicado, su conductor desacelera a razón de 20 ft/s^2, hasta que alcanza una velocidad de 28 mi/h. Si el conductor del automóvil B mantiene una velocidad de 28 mi/h, determine *a*) la distancia mínima a la que el automóvil B se acerca al automóvil A, *b*) el tiempo en el cual el automóvil A se encuentra a 70 ft enfrente del automóvil B.

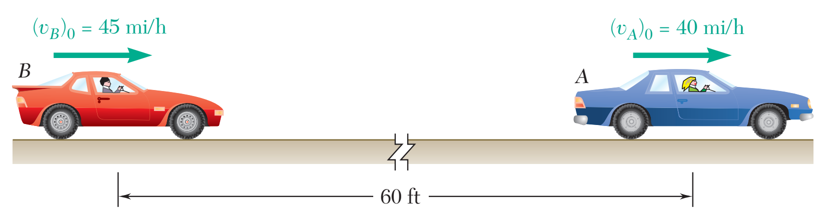


Figura *P11.76*

11.77 Un automóvil viaja a una rapidez constante de 54 km/h cuando su conductora ve a un niño corriendo sobre el camino. La conductora aplica los frenos hasta que el niño regresa a la acera y después acelera para recuperar su rapidez original de 54 km/h; en la figura se muestra el registro de la aceleración del automóvil. Si se supone que $x = 0$ cuando $t = 0$, determine *a*) el tiempo t_1 en el cual la velocidad es de nuevo de 54 km/h, *b*) la posición del automóvil en ese momento, *c*) la velocidad promedio del automóvil durante el intervalo $1 \text{ s} \leq t \leq t_1$.

Figura P11.77

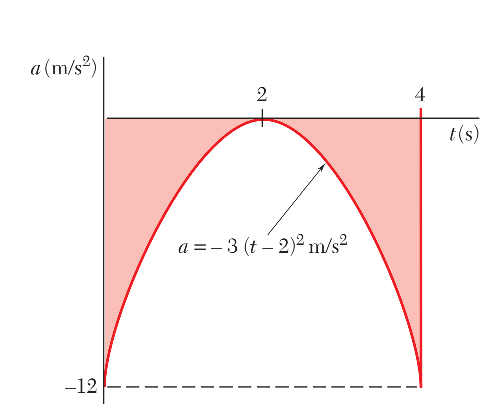


Figura P11.78

11.78 Como se muestra en la figura, desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s, la aceleración de una partícula dada puede representarse mediante una parábola. Si se sabe que $x = 0$ y $v = 8$ m/s cuando $t = 0$, *a*) construya las curvas v-t y x-t para $0 < t < 4$ s, *b*) determine la posición de la partícula en $t = 3$ s. (*Sugerencia*: Utilice la tabla que se presenta en las guardas posteriores del libro).

11.79 Durante un proceso de manufactura, una banda transportadora empieza a moverse desde el reposo y recorre un total de 1.2 ft antes de quedar temporalmente en reposo. Si se sabe que el tirón repentino, o tasa de cambio en la aceleración, se limita a ±4.8 ft/s^2 por segundo, determine *a*) el tiempo más corto que se requiere para que la banda se mueva 1.2 ft, *b*) los valores máximo y el promedio de la velocidad de la banda durante ese tiempo.

11.80 Un tren de enlace en un aeropuerto viaja entre dos terminales que se encuentran a 1.6 mi de distancia. Para mantener el confort de los pasajeros, la aceleración del tren se limita a ±4 ft/s^2, y el tirón repentino, o tasa de cambio en la aceleración, se limita a ±0.8 ft/s^2 por segundo. Si el tren de enlace tiene una rapidez máxima de 20 mi/h, determine *a*) el tiempo más corto para que el tren viaje entre las dos terminales, *b*) su velocidad promedio correspondiente.

11.81 El registro de aceleración que se muestra en la figura se obtuvo durante las pruebas de rapidez de un automóvil deportivo. Si se sabe que el automóvil inicia desde el reposo, determine de manera aproximada *a*) la velocidad del automóvil en $t = 8$ s, *b*) la distancia recorrida por el automóvil en $t = 20$ s.

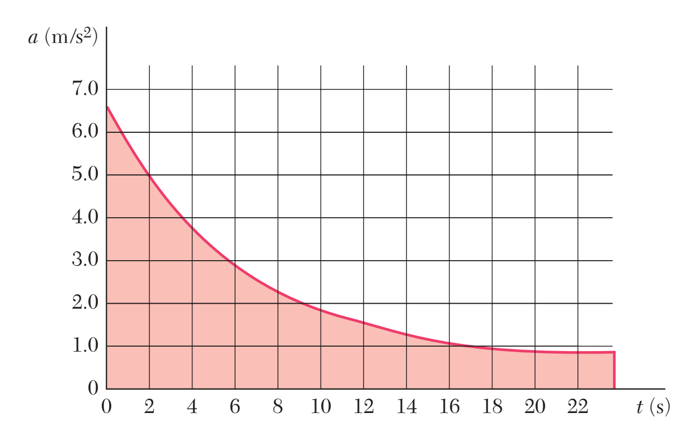


Figura *P11.81*

11.82 Se requieren dos segundos para dejar en reposo la varilla de un pistón neumático; el registro de aceleración de la varilla del pistón durante los 2 s es como se indica en la figura. Determine de manera aproximada *a*) la velocidad inicial de la varilla del pistón, *b*) la distancia recorrida por la varilla del pistón antes de quedar en reposo.

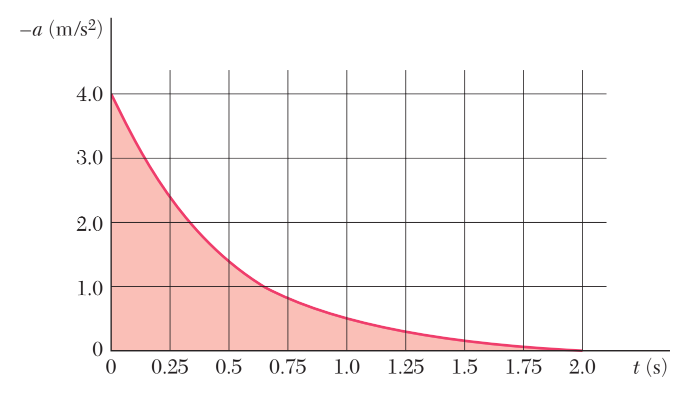


Figura *P11.82*

11.83 Un avión de entrenamiento tiene una velocidad de 126 ft/s cuando aterriza sobre un portaaviones. Conforme el mecanismo de retención del carguero detiene al avión, se registran la velocidad y la aceleración de este último; los resultados se representan en la figura (curva continua). Determine de manera aproximada *a*) el tiempo requerido para que el aeroplano se detenga, *b*) la distancia recorrida en ese tiempo.

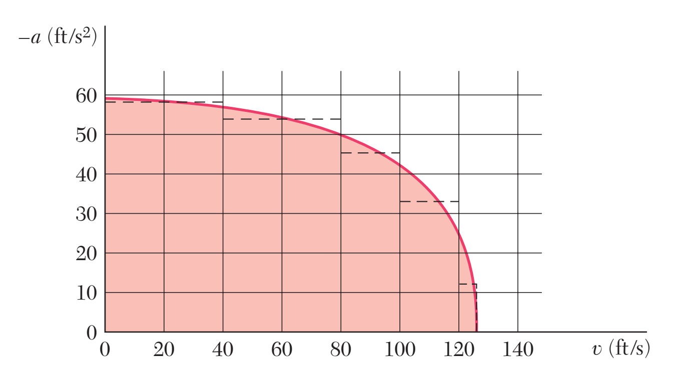


Figura P11.83

11.84 En la figura se muestra una parte de la curva v-x determinada experimentalmente para el carro de un transbordador. Determine de manera aproximada la aceleración del carro *a*) cuando $x = 10$ in., *b*) cuando $v = 80$ in./s.

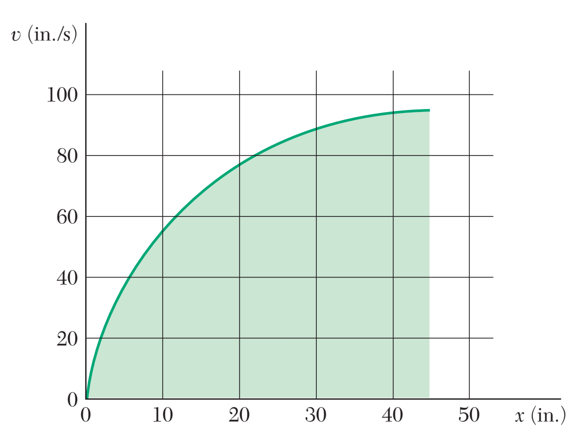


Figura P11.84

11.85 Utilice el método de la sección 11.8 a fin de deducir la fórmula $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ para la coordenada de posición de una partícula en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

11.86 Utilice el método de la sección 11.8 para determinar la posición de la partícula del problema 11.61 cuando $t = 14$.

11.87 Durante las pruebas realizadas a una nueva lancha salvavidas, un acelerómetro adherido a la lancha proporciona el registro que se muestra en la figura. Si la lancha tiene una velocidad de 7.5 ft/s en $t = 0$ y llega al reposo en el tiempo t_1, utilice el método de la sección 11.8 para determinar *a*) el tiempo t_1, *b*) la distancia que recorre la lancha antes de quedar en reposo.

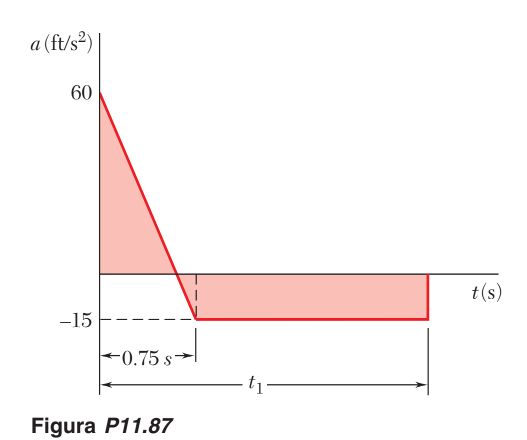


Figura *P11.87*

11.88 Para la partícula del problema 11.63, dibuje la curva a-t y determine mediante el método de la sección 11.8, *a*) la posición de la partícula cuando $t = 52$ s, *b*) el valor máximo de su coordenada de posición.

11.9. VECTOR DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una curva diferente a una línea recta, se afirma que describe un *movimiento curvilíneo.* Para definir la posición P ocupada por la partícula en un tiempo determinado t, se elige un sistema de referencia fijo, tal como los ejes x, y, z que se muestran en la figura 11.14*a*), y se dibuja el vector $\mathbf{r}$ que une al origen O y al punto P. Puesto que el vector $\mathbf{r}$ está caracterizado por su magnitud r y su dirección con respecto a los ejes de referencia, éste define por completo la posición de la partícula con respecto a esos ejes; el vector $\mathbf{r}$ se conoce como el *vector de posición* de la partícula en el tiempo t.

Considérese ahora el vector $\mathbf{r}'$ que define la posición P' ocupada por la misma partícula en un tiempo posterior $t + \Delta t$. El vector $\Delta\mathbf{r}$ que une a P y a P' representa el cambio en el vector de posición durante el intervalo del tiempo Δt, pues, como se puede verificar fácilmente en la figura 11.14*a*), el vector $\mathbf{r}'$ se obtiene al sumar los vectores $\mathbf{r}$ y $\Delta\mathbf{r}$ de acuerdo con el método de triángulo. $\Delta\mathbf{r}$ representa un cambio de *dirección,* así como un cambio de *magnitud* del vector de posición $\mathbf{r}$. La *velocidad promedio* de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente de $\Delta\mathbf{r}$ y Δt. Puesto que $\Delta\mathbf{r}$ es un vector y Δt es un escalar, el cociente de $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ es un vector unido a P, de la misma dirección que $\Delta\mathbf{r}$ y de magnitud igual a la magnitud de $\Delta\mathbf{r}$ dividida entre Δt (figura 11.14*b*).

La *velocidad instantánea* de la partícula en el tiempo t se obtiene al elegir intervalos de tiempo Δt cada vez más cortos y, de manera correspondiente, incrementos vectoriales $\Delta\mathbf{r}$ cada vez menores. La velocidad instantánea se representa en consecuencia mediante el vector

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (11.14)$$

A medida que Δt y $\Delta\mathbf{r}$ disminuyen, las posiciones P y P' se acercan cada vez más entre sí; el vector $\mathbf{v}$ obtenido en el límite debe, por lo tanto, ser tangente a la trayectoria de la partícula (figura 11.14*c*).

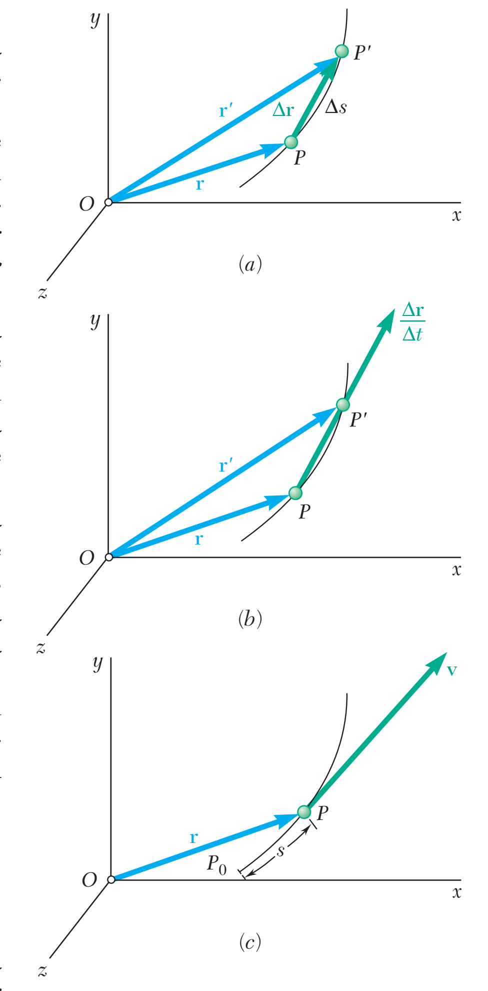


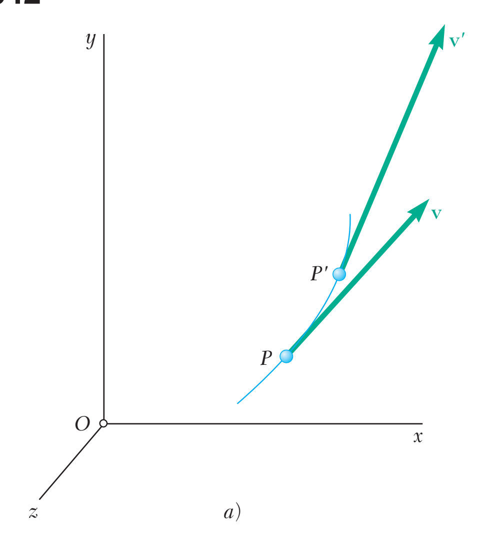
Figura 11.14

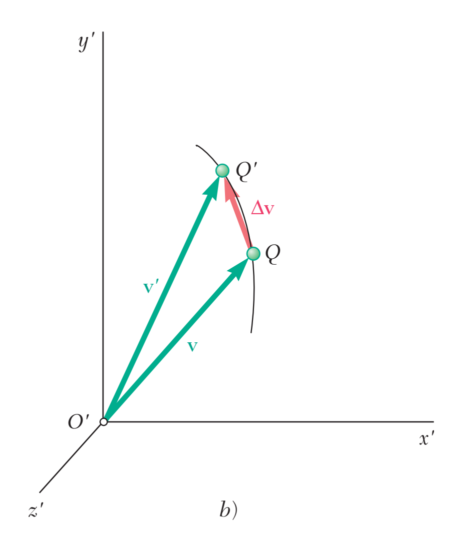
Puesto que el vector de posición $\mathbf{r}$ depende del tiempo t, se conoce como una *función vectorial* de la variable escalar t y se denota mediante $\mathbf{r}(t)$. Extendiendo el concepto de derivada de una función escalar que se presenta en cálculo elemental, el límite del cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ se conoce como la *derivada* de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Se escribe

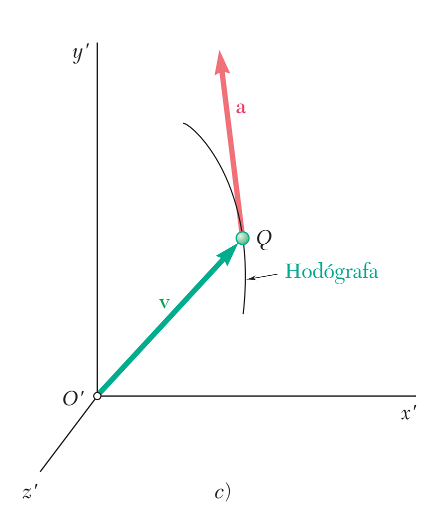
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (11.15)$$

La magnitud v del vector $\mathbf{v}$ se conoce como la *rapidez* de la partícula y es posible obtenerla al sustituir, en vez del vector $\Delta\mathbf{r}$ en la fórmula (11.14), la magnitud de este vector representado por el segmento de línea recta PP'. Sin embargo, la longitud del segmento PP' se acerca a la longitud Δs del arco PP' cuando Δt disminuye (figura 11.14*a*), por lo que se puede escribir

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad (11.16)$$







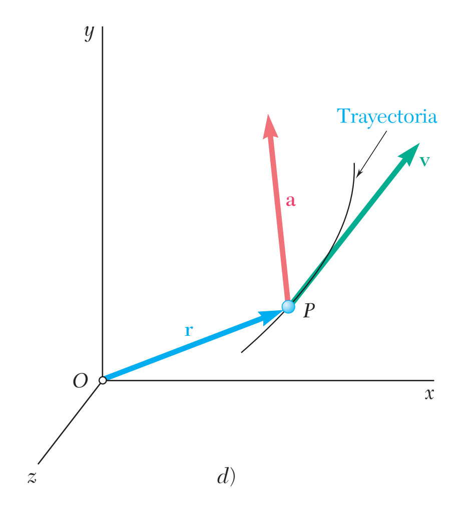


Figura 11.15

La rapidez v puede obtenerse entonces diferenciando con respecto a t la longitud s del arco que describe la partícula.

Considere la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula en el tiempo t y su velocidad $\mathbf{v}'$ en un tiempo posterior $t + \Delta t$ (figura 11.15*a*). Se dibujarán ambos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$ a partir del mismo origen O' (figura 11.15*b*). El vector $\Delta\mathbf{v}$ que une a Q y a Q' representa el cambio en la velocidad de la partícula durante el intervalo de tiempo Δt, ya que el vector $\mathbf{v}'$ puede obtenerse al sumar los vectores $\mathbf{v}$ y $\Delta\mathbf{v}$. Hay que advertir que $\Delta\mathbf{v}$ representa un cambio en la *dirección* de la velocidad, así como un cambio en la *rapidez*. La *aceleración promedio* de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente entre $\Delta\mathbf{v}$ y Δt. Puesto que $\Delta\mathbf{v}$ es un vector y Δt un escalar, el cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ es un vector de la misma dirección que $\Delta\mathbf{v}$.

La *aceleración instantánea* de la partícula en el tiempo t se obtiene al tomar valores cada vez más y más pequeños de Δt y $\Delta\mathbf{v}$. La aceleración instantánea se representa en consecuencia por medio del vector

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \tag{11.17}$$

Al advertir que la velocidad $\mathbf{v}$ es una función vectorial $\mathbf{v}(t)$ del tiempo t, es posible referirse al límite del cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ como la derivada de $\mathbf{v}$ con respecto a t. Se escribe

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.18}$$

Se observa que la aceleración $\mathbf{a}$ es tangente a la curva descrita por la punta Q del vector $\mathbf{v}$ cuando este último se dibuja desde un origen fijo O' (figura 11.15*c*) y que, en general, la aceleración no es tangente a la trayectoria de la partícula (figura 11.15*d*). La curva descrita por la punta de $\mathbf{v}$ e indicada en la figura 11.15*c*) se conoce como la *hodógrafa* del movimiento.

11.10. DERIVADAS DE FUNCIONES VECTORIALES

En la sección anterior se estudió que la velocidad **v** de una partícula en movimiento curvilíneo puede representarse mediante la derivada de la función vectorial **r**(t) que caracteriza a la posición de la partícula. De manera similar, la aceleración **a** de la partícula se representa mediante la derivada de una función vectorial **v**(t). Esta sección proporciona una definición formal de la derivada de una función vectorial y establece reglas que gobiernan la diferenciación de sumas y productos de funciones vectoriales.

Sea **P**(u) una función vectorial de la variable escalar u. Por lo anterior se entiende que el escalar u define por completo la magnitud y dirección del vector **P**. Si el vector **P** se dibuja desde un origen fijo O y se deja variar el escalar u, la punta de **P** describirá una curva determinada en el espacio. Considérense los vectores **P** que corresponden, respectivamente, a los valores u y $u + \Delta u$ de la variable escalar (figura 11.16*a*). Sea Δ**P** el vector que une las puntas de los dos vectores dados, se escribe

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)$$

Al dividir todo entre Δu y dejar que Δu tienda a cero, *se define la derivada de la función vectorial* **P**(u):

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)}{\Delta u} \tag{11.19}$$

Conforme Δu tiende a cero, la línea de acción de Δ**P** vuelve tangente a la curva de la figura 11.16*a*). De este modo, la derivada $d\mathbf{P}/du$ de la función vectorial **P**(u) *es tangente a la curva descrita por la punta* **P**(u) (figura 11.16*b*).

Las reglas comunes para la diferenciación de sumas y productos de funciones escalares pueden extenderse a las funciones vectoriales. Considérese primero la *suma de dos funciones vectoriales* **P**(u) y **Q**(u) de la misma variable escalar u. De acuerdo con la definición dada en (11.19), la derivada del vector **P** + **Q** es

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} + \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta u} \right)$$

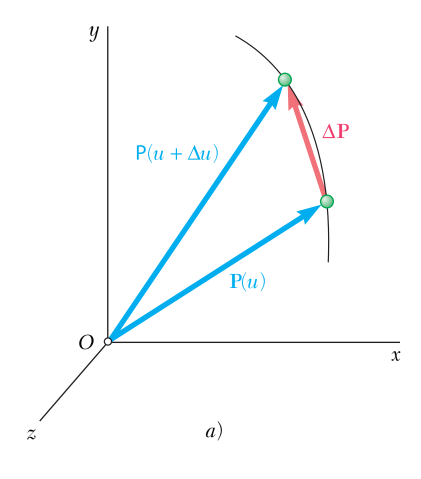
o, puesto que el límite de una suma es igual a la suma de los límites de sus términos,

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} + \frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.20}$$

Hay que considerar ahora el *producto de una función escalar* $f(u)$ *y una función vectorial* **P**(u) de la misma variable. La derivada del vector f**P** es

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{(f + \Delta f)(\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P}) - f\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u}\mathbf{P} + f\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta u} \right)$$



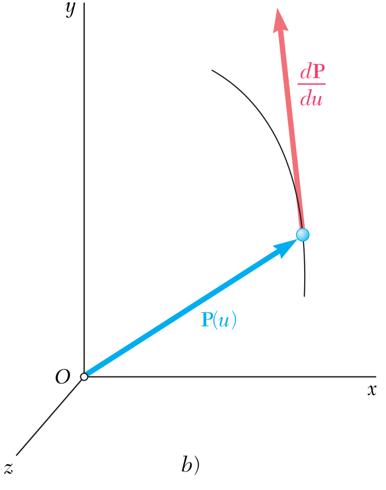


Figura 11.16

o al recordar las propiedades de los límites de sumas y productos,

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \frac{df}{du}\mathbf{P} + f\frac{d\mathbf{P}}{du} \tag{11.21}$$

Las derivadas del *producto escalar* y el *producto vectorial* de dos funciones vectoriales $\mathbf{P}(u)$ y $\mathbf{Q}(u)$ pueden obtenerse de manera similar. Se tiene

$$\frac{d(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{P}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.22}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du}\times\mathbf{Q} + \mathbf{P}\times\frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.23}^{\dagger}$$

Las propiedades antes establecidas pueden emplearse para determinar las *componentes rectangulares de la derivada de una función vectorial* $\mathbf{P}(u)$. Descomponiendo $\mathbf{P}$ en componentes a lo largo de los ejes rectangulares fijos x, y, z, se escribe

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k} \tag{11.24}$$

donde P_x, P_y, P_z son las componentes escalares rectangulares del vector $\mathbf{P}$, e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ los vectores unitarios correspondientes, respectivamente, a los ejes x, y y z (sección 2.12). De acuerdo con (11.20), la derivada de $\mathbf{P}$ es igual a la suma de las derivadas de los términos en el miembro del lado derecho. Puesto que cada uno de estos términos es el producto de una escalar y una función vectorial, se debe usar (11.21). Pero los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tienen una magnitud constante (igual a 1) y en direcciones fijas. Por lo tanto, sus derivadas son cero, y se escriben

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{du}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{du}\mathbf{k} \tag{11.25}$$

Si se advierte que los coeficientes de los vectores unitarios son, por definición, las componentes escalares del vector $d\mathbf{P}/du$, se concluye que *las componentes escalares rectangulares de la derivada* $d\mathbf{P}/du$ *de la función vectorial* $\mathbf{P}(u)$ se obtienen al diferenciar las componentes escalares correspondientes de $\mathbf{P}$.

Razón de cambio de un vector. Cuando el vector $\mathbf{P}$ es una función del tiempo t, su derivada $d\mathbf{P}/dt$ representa la *razón de ca mbio* de $\mathbf{P}$ con respecto al sistema de referencia $Oxyz$. Descomponiendo $\mathbf{P}$, en componentes rectangulares, se tiene, por (11.25),

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt}\mathbf{k}$$

o, al utilizar puntos para indicar diferenciación con respecto a t,

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k} \tag{11.25'}$$

[†]Puesto que el producto vectorial no es conmutativo (sección 3.4), debe mantenerse el orden de los factores en la ecuación (11.23).

Como se estudiará en la sección 15.10, la razón de cambio de un vector cuando se observa desde un *sistema de referencia móvil* es, en general, diferente de su razón de cambio cuando se observa desde un sistema de referencia fijo. Sin embargo, si el sistema de referencia móvil $O'x'y'z'$ está en *traslación,* esto es, si sus ejes permanecen paralelos a los ejes correspondientes del sistema fijo $Oxyz$ (figura 11.17), se usan los mismos vectores unitarios **i**, **j**, **k** en ambos sistemas de referencia, y en un instante determinado el vector **P** tiene las mismas componentes P_x, P_y, P_z en ambos sistemas de referencia. Se concluye de (11.25′) que la razón de cambio **P** es la misma con respecto a los sistemas de referencia $Oxyz$ y $O'x'y'z'$. En consecuencia, se establece que *la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y con respecto a un sistema de referencia en traslación.* Esta propiedad simplificará en gran medida el trabajo, ya que se tratará muchas veces con sistemas de referencia en traslación.

Figura 11.17

11.11. COMPONENTES RECTANGULARES DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN

Cuando la posición de una partícula P se define en cualquier instante mediante sus coordenadas rectangulares x, y y z, resulta conveniente descomponer la velocidad **v** y la aceleración **a** de la partícula en componentes rectangulares (figura 11.18).

Al descomponer el vector de posición **r** de la partícula en componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{11.26}$$

donde las coordenadas x, y, z son funciones de t. Al diferenciar dos veces, se obtiene

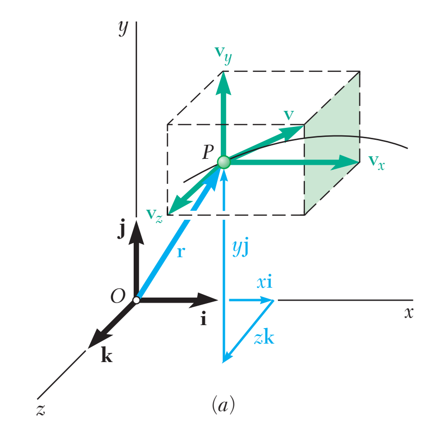
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \tag{11.27}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{11.28}$$

donde $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ y $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ representan, respectivamente, la primera y la segunda derivadas de x, y y z con respecto a t. Se tiene de (11.27) y (11.28) que las componentes escalares de la velocidad y la aceleración son

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$



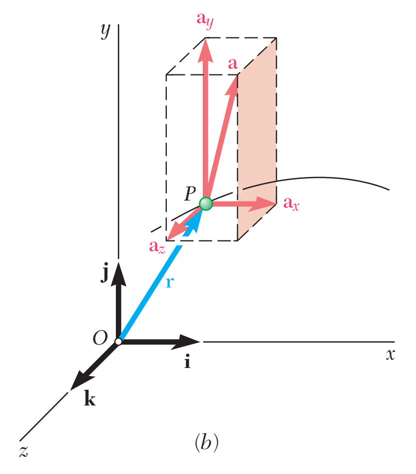


Figura 11.18

Un valor positivo de v_x indica que el componente vectorial $\mathbf{v}_x$ está dirigido hacia la derecha, y un valor negativo, que se dirige hacia la izquierda. El sentido de cada uno de los otros componentes vectoriales puede determinarse de manera similar a partir del signo de la componente escalar correspondiente. Si se desea, es posible obtener las magnitudes y direcciones de la velocidad y la aceleración de sus componentes escalares mediante los métodos de las secciones 2.7 y 2.12.

El uso de las componentes rectangulares para describir la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula es en particular efectivo cuando la componente a_x de la aceleración sólo depende de t, x, y/o v_x, y cuando, en forma similar, a_y depende únicamente de t, y y/o v_y, y a_z de t, z y/o v_x. Las ecuaciones (11.30) pueden integrarse en ese caso de

manera independiente, y lo mismo sucede con las ecuaciones (11.29). En otras palabras, es posible considerar por separado el movimiento de la partícula en dirección x, su movimiento en la dirección y, y su movimiento en la dirección z.

En el caso del *movimiento de un proyectil*, por ejemplo, se demuestra (véase la sección 12.5) que las componentes de la aceleración son

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$

si se ignora la resistencia del aire. Al denotar mediante x_0, y_0 y z_0 las coordenadas del cañón y por medio de $(v_x)_0$, $(v_y)_0$ y $(v_z)_0$ las componentes de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ del proyectil (una bala), se integra dos veces en t y se obtiene

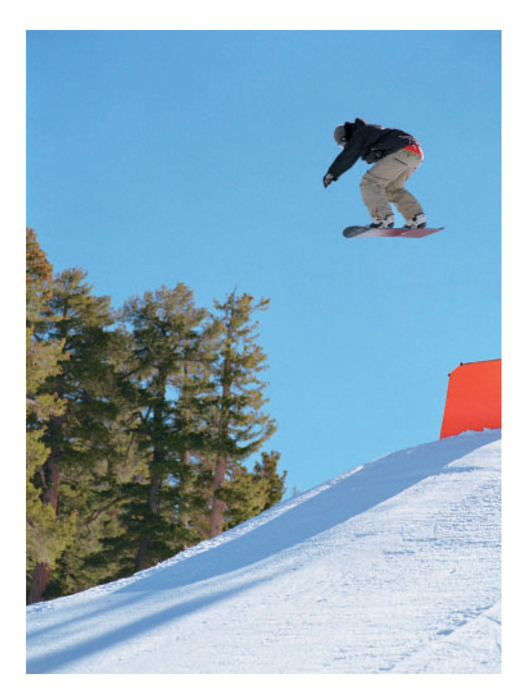
$$v_x = \dot{x} = (v_x)_0 \qquad v_y = \dot{y} = (v_y)_0 - gt \qquad v_z = \dot{z} = (v_z)_0$$
$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad z = z_0 + (v_z)_0 t$$

Si el proyectil se lanza en el plano xy desde el origen O, se tiene $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ y $(v_z)_0 = 0$, y las ecuaciones de movimiento se reducen a

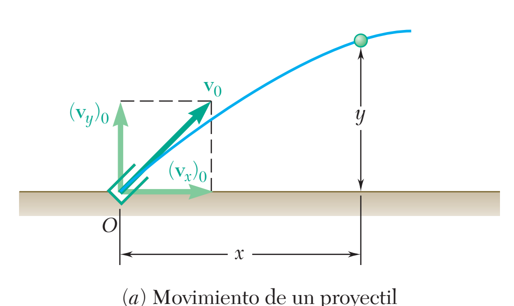
$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt \qquad v_z = 0$$
$$x = (v_x)_0 t \qquad y = (v_y)_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad z = 0$$

Estas ecuaciones muestran que el proyectil permanece en el plano xy, que su movimiento en la dirección horizontal es uniforme, y que su movimiento en la dirección vertical es uniformemente acelerado. El movimiento de un proyectil puede entonces sustituirse por dos movimientos rectilíneos independientes, los cuales se visualizan con facilidad si se supone que el proyectil se lanza verticalmente con una velocidad inicial $(\mathbf{v}_y)_0$ desde una plataforma que se mueve con una velocidad horizontal constante $(\mathbf{v}_x)_0$ (figura 11.19). La coordenada x del proyectil es igual en cualquier instante a la distancia recorrida por la plataforma, y es posible calcular su coordenada y como si el proyectil se moviera a lo largo de una línea vertical.

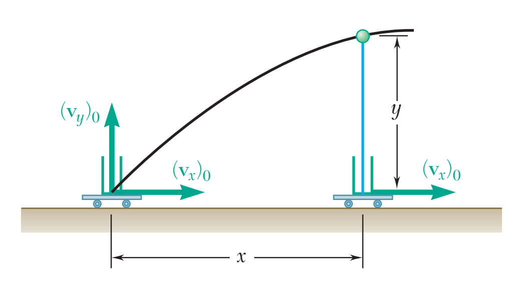
Se puede observar que las ecuaciones que definen las coordenadas x y y de un proyectil en cualquier instante son las ecuaciones paramétricas de una parábola. Por lo tanto, la trayectoria de un proyectil es *parabólica*. Sin embargo este resultado deja de ser válido cuando se toma en cuenta la resistencia del aire o la variación con la altura de la aceleración de la gravedad.



Fotografía 11.3 El movimiento en el aire de este patinador de nieve se describe como una parábola, suponiendo que es posible despreciar la resistencia del aire.



(*a*) Movimiento de un proyectil



(*b*) Movimientos rectilíneos equivalentes

Figura 11.19

11.12. MOVIMIENTO RELATIVO A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN TRASLACIÓN

En la sección anterior se utilizó un solo sistema de referencia para describir el movimiento de una partícula. En la mayoría de los casos este sistema de referencia estaba unido a la tierra y se consideró fijo. A continuación se analizarán situaciones en las que es conveniente utilizar de manera simultánea varios sistemas de referencia. Si uno de los sistemas de referencia está unido a la tierra, se denominará *sistema de referencia fijo*, y los otros sistemas de referencia *sistemas de referencia en movimiento*. No obstante, debe entenderse que la selección de un sistema de referencia fijo es puramente arbitraria. Cualquier sistema de referencia puede designarse como “fijo”; todos los demás sistemas de referencia que no se unan rígidamente a este sistema de referencia se describirán en ese caso como “móviles”.

Considere dos partículas A y B que se mueven en el espacio (figura 11.20); los vectores $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ definen sus posiciones en cualquier instante dado con respecto a un sistema de referencia fijo *Oxyz*. Considere ahora un sistema de ejes x', y', z' centrado en A y paralelo a los ejes x, y, z. Mientras el origen de estos ejes se mueve, su orientación permanece invariable; el sistema de referencia $Ax'y'z'$ está en *traslación* con respecto a *Oxyz*. El vector $\mathbf{r}_{B/A}$ que une a A y B define *la posición de B relativa al sistema de referencia móvil* $Ax'y'z'$ (o, en forma breve, *la posición de B relativa a A*).

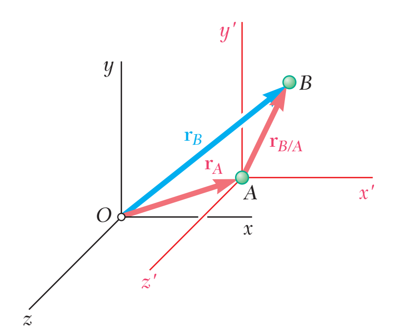


Figura 11.20

En la figura 11.20 se advierte que el vector de posición $\mathbf{r}_B$ de la partícula B es la suma del vector de posición $\mathbf{r}_A$ de la partícula A y del vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativa a A; se escribe

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{11.31}$$

Al diferenciar (11.31) con respecto a t dentro del sistema de referencia fijo, y utilizar puntos para indicar derivadas respecto al tiempo, se tiene

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \tag{11.32}$$

Las derivadas $\dot{\mathbf{r}}_A$ y $\dot{\mathbf{r}}_B$ representan, respectivamente, las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de las partículas A y B. Como $Ax'y'z'$ está en traslación, la derivada $\dot{\mathbf{r}}_{B/A}$ representa la razón de cambio de $\mathbf{r}_{B/A}$ con respecto al sistema de referencia $Ax'y'z'$, así como con respecto al sistema de referencia fijo (sección 11.10). Por lo tanto, esta derivada define *la velocidad* $\mathbf{v}_{B/A}$ *de B relativa al sistema de referencia* $Ax'y'z'$ (o en forma breve, *la velocidad* $\mathbf{v}_{B/A}$ *de B relativa a A*). Se escribe

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{11.33}$$



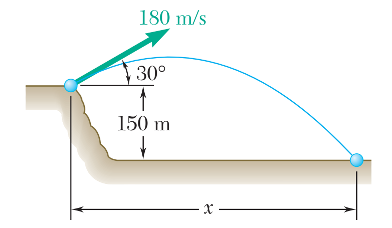
Fotografía 11.4 Al momento de aterrizar, el piloto de un helicóptero debe tomar en cuenta el movimiento relativo del barco.

Al diferenciar la ecuación (11.33) con respecto a t, y utilizar la derivada $\dot{\mathbf{v}}_{B/A}$ para definir *la aceleración* $\mathbf{a}_{B/A}$ *de B relativa al sistema de referencia* $Ax'y'z'$ (o, en forma breve, *la aceleración* $\mathbf{a}_{B/A}$ *de B relativa a A*), se escribe

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{11.34}$$

El movimiento de B con respecto al sistema de referencia fijo *Oxyz* se denomina *movimiento absoluto de B*. Las ecuaciones que se obtuvieron en esta sección muestran que *el movimiento absoluto de B puede obtenerse combinando el movimiento de A y el movimiento relativo de B con respecto al sistema de referencia móvil unido a A*. La ecuación (11.33), por ejemplo, expresa que la velocidad absoluta $\mathbf{v}_B$ de la partícula B puede obtenerse al sumar vectorialmente la velocidad de A y la velocidad de B relativa al sistema de referencia $Ax'y'z'$. La ecuación (11.34) expresa una propiedad similar en términos de las aceleraciones.[†] Sin embargo se debe recordar que *el sistema de referencia* $Ax'y'z'$ *está en traslación*; esto es, mientras se mueve con A, mantiene la misma orientación. Como se verá después (sección 15.14), será necesario utilizar relaciones diferentes en el caso de un sistema de referencia en rotación.

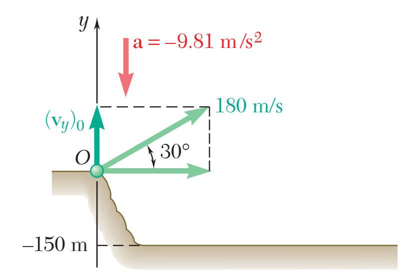
[†]Note que el producto de los subíndices A y B/A que se usa en el miembro del lado derecho de las ecuaciones (11.31) a (11.34) es igual al subíndice B utilizado en el miembro del lado izquierdo.



PROBLEMA RESUELTO 11.7

Un proyectil se lanza desde el borde de un acantilado de 150 m con una velocidad inicial de 180 m/s a un ángulo de 30° con la horizontal. Si se ignora la resistencia del aire, encuentre *a*) la distancia horizontal desde el cañón hasta el punto en el que el proyectil golpea el suelo, *b*) la elevación máxima sobre el suelo que alcanza el proyectil.

SOLUCIÓN



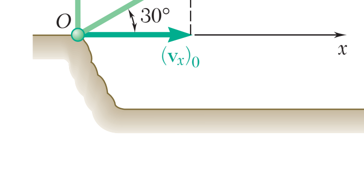
Los movimientos vertical y horizontal se considerarán por separado.

Movimiento vertical. ***Movimiento uniformemente acelerado.*** Eligiendo el sentido positivo del eje y hacia arriba y situando el origen O en el cañón, se tiene

$$(v_y)_0 = (180 \text{ m/s}) \text{ sen } 30° = +90 \text{ m/s}$$
$$a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

Al sustituir en las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, se tiene

$$v_y = (v_y)_0 + at \qquad v_y = 90 - 9.81t \qquad (1)$$
$$y = (v_y)_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y = 90t - 4.90t^2 \qquad (2)$$
$$v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2ay \qquad v_y^2 = 8\,100 - 19.62y \qquad (3)$$



Movimiento horizontal. ***Movimiento uniforme.*** Al elegir el sentido positivo del eje x hacia la derecha, se tiene

$$(v_x)_0 = (180 \text{ m/s}) \cos 30° = +155.9 \text{ m/s}$$

Al sustituir en las ecuaciones del movimiento uniforme, se obtiene

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = 155.9t \qquad (4)$$

***a*) Distancia horizontal.** Cuando el proyectil choca con el suelo, se tiene

$$y = -150 \text{ m}$$

Al sustituir este valor en la ecuación (2) para el movimiento vertical, se escribe

$$-150 = 90t - 4.90t^2 \qquad t^2 - 18.37t - 30.6 = 0 \qquad t = 19.91 \text{ s}$$

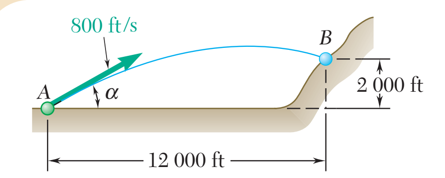
Si se sustituye $t = 19.91$ s en la ecuación (4) para el movimiento horizontal, se encuentra

$$x = 155.9(19.91) \qquad x = 3\,100 \text{ m} \blacktriangleleft$$

***b*) Elevación máxima.** Cuando el proyectil alcanza su máxima elevación, se tiene que $v_y = 0$; al considerar este valor en la ecuación (3) para el movimiento vertical, se escribe

$$0 = 8\,100 - 19.62y \qquad y = 413 \text{ m}$$

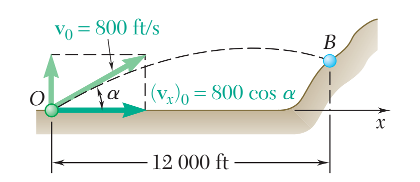
Máxima elevación sobre el suelo = 150 m + 413 m = 563 m ◀



PROBLEMA RESUELTO 11.8

Un proyectil se lanza con una velocidad inicial de 800 ft/s a un blanco ubicado a 2 000 ft por arriba del cañón A y a una distancia horizontal de 12 000 ft. Si se ignora la resistencia del aire, determine el valor del ángulo de disparo α.

SOLUCIÓN



Los movimientos horizontal y vertical se considerarán por separado.

Movimiento horizontal. Al ubicar el origen del eje de coordenadas en el cañón, se tiene

$$(v_x)_0 = 800 \cos \alpha$$

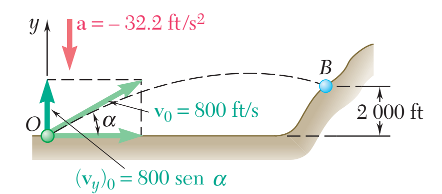
Al sustituir en la ecuación de movimiento horizontal uniforme, se obtiene

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = (800 \cos \alpha)t$$

El tiempo que se requiere para que el proyectil se mueva una distancia horizontal de 12 000 ft se obtiene al fijar x igual a 12 000 ft.

$$12\,000 = (800 \cos \alpha)t$$

$$t = \frac{12\,000}{800 \cos \alpha} = \frac{15}{\cos \alpha}$$



Movimiento vertical

$$(v_y)_0 = 800 \text{ sen } \alpha \qquad a = -32.2 \text{ ft/s}^2$$

Al sustituir en la ecuación de movimiento vertical uniformemente acelerado, se obtiene

$$y = (v_y)_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y = (800 \text{ sen } \alpha)t - 16.1t^2$$

El proyectil da en el blanco. Cuando $x = 12\,000$ ft, se debe tener $y = 2\,000$ ft. Al sustituir el valor de y y dejando t igual al valor que acaba de encontrarse, se escribe

$$2\,000 = 800 \text{ sen } \alpha \frac{15}{\cos \alpha} - 16.1 \left(\frac{15}{\cos \alpha}\right)^2$$

Como $1/\cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, se tiene

$$2\,000 = 800(15) \tan \alpha - 16.1(15^2)(1 + \tan^2\alpha)$$
$$3\,622 \tan^2 \alpha - 12\,000 \tan \alpha + 5\,622 = 0$$

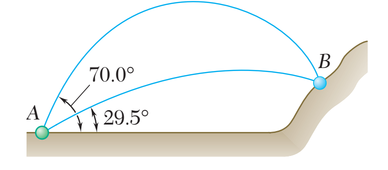


Al resolver esta ecuación cuadrática para $\tan \alpha$, se tiene

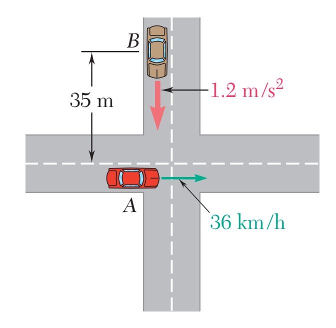


$$\tan \alpha = 0.565 \qquad \text{y} \qquad \tan \alpha = 2.75$$

$$\alpha = 29.5° \qquad \text{y} \qquad \alpha = 70.0° \quad ◀$$



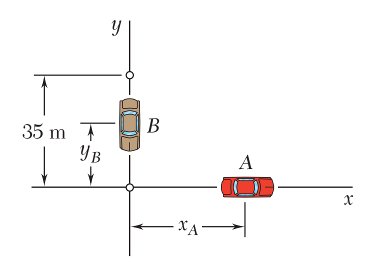
El proyectil dará en el blanco si se usa cualquiera de estos dos ángulos de disparo (véase la figura).



PROBLEMA RESUELTO 11.9

El automóvil A viaja hacia el este con una rapidez constante de 36 km/h. Cuando el automóvil A cruza la intersección que se muestra, el automóvil B parte del reposo desde una distancia de 35 m al norte de la intersección y se mueve hacia el sur con una aceleración constante de 1.2 m/s^2. Determine la posición, velocidad y aceleración de B relativa a A 5 s después de que A cruza la intersección.

SOLUCIÓN



Se eligen los ejes x y y con el origen en la intersección de las dos calles y con los sentidos positivos dirigidos respectivamente al este y al norte.

Movimiento del automóvil *A*. Se expresa primero la rapidez en m/s:

$$v_A = \left(36\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}}\right) = 10 \text{ m/s}$$

Al notar que el movimiento de A es uniforme, se escribe, para cualquier tiempo t,

$$a_A = 0$$
$$v_A = +10 \text{ m/s}$$
$$x_A = (x_A)_0 + v_A t = 0 + 10t$$

Para $t = 5$ s, se tiene

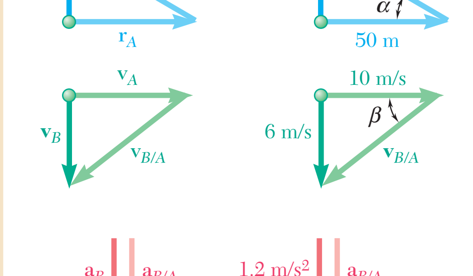
$$a_A = 0 \qquad \mathbf{a}_A = 0$$
$$v_A = +10 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_A = 10 \text{ m/s} \rightarrow$$
$$x_A = +(10 \text{ m/s})(5 \text{ s}) = +50 \text{ m} \qquad \mathbf{r}_A = 50 \text{ m} \rightarrow$$

Movimiento del automóvil *B*. El movimiento de B es uniformemente acelerado y se escribe

$$a_B = -1.2 \text{ m/s}^2$$
$$v_B = (v_B)_0 + at = 0 - 1.2\,t$$
$$y_B = (y_B)_0 + (v_B)_0 t + \tfrac{1}{2}a_B t^2 = 35 + 0 - \tfrac{1}{2}(1.2)t^2$$

Para $t = 5$ s, se tiene

$$a_B = -1.2 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_B = 1.2 \text{ m/s}^2 \downarrow$$
$$v_B = -(1.2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = -6 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_B = 6 \text{ m/s} \downarrow$$
$$y_B = 35 - \tfrac{1}{2}(1.2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2 = +20 \text{ m} \qquad \mathbf{r}_B = 20 \text{ m} \uparrow$$



Movimiento de *B* relativo a *A*. Se dibuja el triángulo que corresponde a la ecuación vectorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ y se obtiene la magnitud de dirección del vector de posición de B relativo a A.

$$r_{B/A} = 53.9 \text{ m} \qquad \alpha = 21.8° \qquad \mathbf{r}_{B/A} = 53.9 \text{ m} ⦣ 21.8° \quad ◀$$

Al proceder de manera similar, se encuentra la velocidad y la aceleración de B relativa a A.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$v_{B/A} = 11.66 \text{ m/s} \qquad \beta = 31.0° \qquad \mathbf{v}_{B/A} = 11.66 \text{ m/s} ⦣ 31.0° \quad ◀$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_{B/A} = 1.2 \text{ m/s}^2 \downarrow \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de esta sección se analiza el *movimiento bidimensional y tridimensional* de una partícula. En tanto que las interpretaciones físicas de la velocidad y la aceleración son las mismas que las primeras lecciones del capítulo, se debe recordar que estas cantidades son vectores. Además, hay que entender, a partir del conocimiento de vectores en estática, que a menudo será ventajoso expresar vectores de posición, velocidades y aceleraciones en términos de sus componentes escalares rectangulares [ecuaciones (11.27) y (11.28)]. Además, dados dos vectores **A** y **B**, recuérdese que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ si **A** y **B** son perpendiculares entre sí, en tanto que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ si **A** y **B** son paralelos.

A. Análisis del movimiento de un proyectil. Muchos de los problemas que siguen a continuación tienen que ver con el movimiento bidimensional de un proyectil, donde es posible ignorar la resistencia del aire. En la sección 11.11 se formularon las ecuaciones que describen este tipo de movimiento, y se observó que la componente horizontal de la velocidad permanece constante (movimiento uniforme) en tanto que la componente vertical de la aceleración fue constante (movimiento uniformemente acelerado). Se consideraron por separado los movimientos horizontal y vertical de la partícula. Suponiendo que el proyectil se lanza desde el origen, se pueden escribir las dos ecuaciones

$$x = (v_x)_0 t \qquad y = (v_y)_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

1. Si se conoce la velocidad inicial y el ángulo de disparo, el valor de y correspondiente a cualquier valor dado de x (o el valor de x para cualquier valor de y) se obtiene resolviendo una de las ecuaciones anteriores para t y sustituyendo t en la otra ecuación [problema resuelto 11.7].

2. Si se conocen la velocidad inicial y las coordenadas de un punto de la trayectoria, y se desea *determinar el ángulo de disparo* α, la solución inicia expresando las componentes $(v_x)_0$ y $(v_y)_0$ de la velocidad inicial como funciones del ángulo α. Estas expresiones y los valores conocidos de x y y se sustituyen después en las ecuaciones anteriores. Por último, se resuelve la primera ecuación respecto a t y se sustituye ese valor de t en la segunda ecuación para obtener una ecuación trigonométrica en α, la cual se puede resolver para esa incógnita [problema resuelto 11.8].

(*continúa*)

B. Solución de problemas de movimiento relativo en traslación bidimensional. En la sección 11.12 se vio que el movimiento absoluto de una partícula *B* puede obtenerse al combinar el movimiento de una partícula *A* y el *movimiento relativo* de *B* con respecto a un sistema de referencia unido a *A* que está en *traslación.* En ese caso es posible expresar la velocidad y la aceleración de *B* como se muestra en las ecuaciones (11.33) y (11.34), respectivamente.

1. Para visualizar el movimiento relativo de B con respecto a A, imagine que está usted unido a la partícula *A* cuando observa el movimiento de la partícula *B*. Por ejemplo, para un pasajero en el automóvil *A* del problema resuelto 11.9, el automóvil *B* parece dirigirse en dirección suroeste (el *sur* debe ser obvio; y el *oeste* se debe al hecho de que el automóvil *A* se mueve hacia el este: el automóvil *B* parece viajar entonces hacia el oeste). Esta conclusión es consistente con la dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$.

2. Para resolver un problema de movimiento relativo primero se escriben las ecuaciones vectoriales (11.31), (11.33) y (11.34), las cuales relacionan los movimientos de las partículas *A* y *B*. Después debe usarse cualquiera de los siguientes métodos:

a) Construir los triángulos vectoriales correspondientes y resolverlos para el vector de posición, velocidad y aceleración deseados [problema resuelto 11.9].

b) Expresar todos los vectores en términos de sus componentes rectangulares y resolver los dos conjuntos independientes de ecuaciones escalares que se obtuvieron de ese modo. Si se decide por este método, asegúrese de elegir la misma dirección positiva para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de cada partícula.

Problemas

11.89 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = 4t^3 - 5t^2 + 5t$ y $y = 5t^2 - 15t$, donde x y y se expresan en milímetros y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración cuando *a*) $t = 1$ s; *b*) $t = 2$ s.

11.90 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = 2 \cos \pi t$ y $y = 1 - 4 \cos 2\pi t$, donde x y y se expresan en metros y t en segundos. Muestre que la trayectoria de la partícula es parte de la parábola que se muestra en la figura y determine la velocidad y la aceleración cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 1.5$ s.

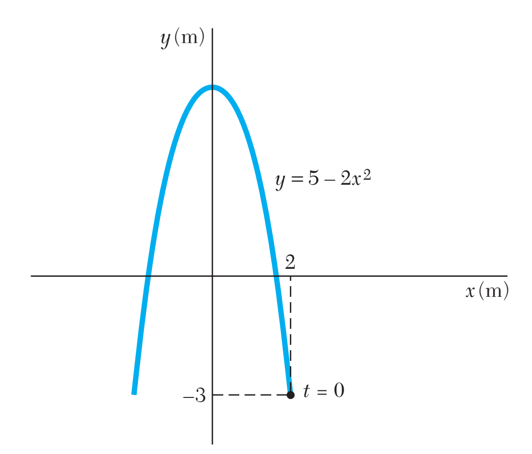


Figura P11.90

11.91 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = t^2 - 8t + 7$ y $y = 0.5t^2 + 2t - 4$, donde x y y se expresan en metros y t en segundos. Determine *a*) la magnitud de la velocidad mínima alcanzada por la partícula, *b*) el tiempo, la posición y la dirección correspondientes a dicha velocidad.

11.92 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = 4t - 2 \operatorname{sen} t$ y $y = 4 - 2 \cos t$, donde x y y se expresan en pulgadas y t en segundos. Bosqueje la trayectoria de la partícula y determine *a*) las magnitudes de las velocidades máxima y mínima alcanzadas por la partícula, *b*) los tiempos, las posiciones y las direcciones correspondientes a dichas velocidades.

11.93 El movimiento de una partícula se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = A(\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + A(\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}$, donde t se expresa en segundos. Determine los valores de t para los cuales el vector de posición y el vector de aceleración son *a*) perpendiculares, *b*) paralelos.

11.94 El movimiento amortiguado de una partícula que vibra se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = x_1(1 - 1/(t + 1))\mathbf{i} + (y_1 e^{-\pi t/2} \cos 2\pi t)\mathbf{j}$, donde t se expresa en segundos. Para $x_1 = 30$ mm y $y_1 = 20$ mm, determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 1.5$ s.

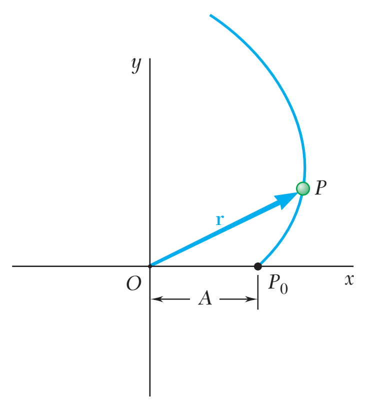


Figura *P11.93*

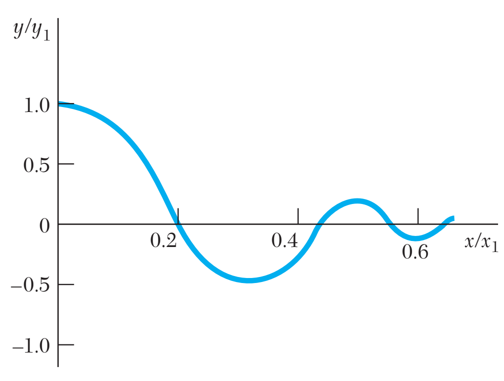


Figura *P11.94*

11.95 El movimiento tridimensional de una partícula se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = (Rt \cos \omega_n t)\mathbf{i} + ct\mathbf{j} + (Rt \operatorname{sen} \omega_n t)\mathbf{k}$. Determine las magnitudes de la velocidad y de la aceleración de la partícula. (La curva espacial que describe la partícula es una hélice cónica.)

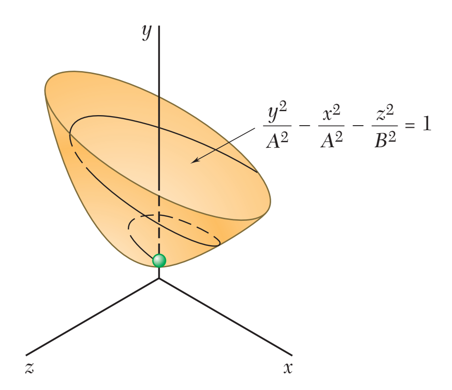


Figura *P11.96*

***11.96** El movimiento tridimensional de una partícula se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = (At \cos t)\mathbf{i} + (A\sqrt{t^2+1})\,\mathbf{j} + (Bt \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$, donde r y t se expresan en pies y segundos, respectivamente. Demuestre que la curva descrita por la partícula se encuentra sobre el hiperboloide $(y/A)^2 - (x/A)^2 - (z/B)^2 = 1$. Para $A = 3$ y $B = 1$, determine *a*) las magnitudes de la velocidad y de la aceleración cuando $t = 0$, *b*) el valor diferente de cero más pequeño de t para el cual el vector de posición y el vector de velocidad son perpendiculares entre sí.

11.97 Un avión diseñado para dejar caer agua sobre incendios forestales vuela sobre una línea recta horizontal a 315 km/h a una altura de 80 m. Determine la distancia d a la que el piloto debe soltar el agua de manera que caiga sobre el incendio en B.

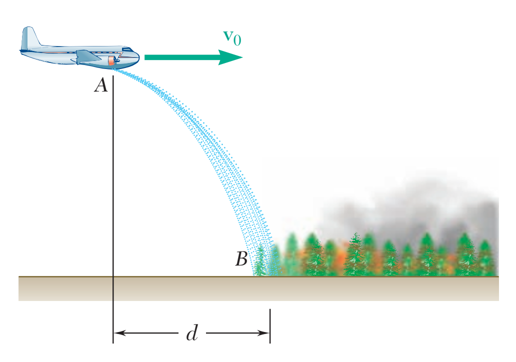


Figura P11.97

11.98 Tres niños se lanzan bolas de nieve entre sí. El niño A lanza una bola de nieve con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$. Si la bola de nieve pasa justo sobre la cabeza del niño B y golpea al niño C, determine *a*) el valor de v_0, *b*) la distancia d.

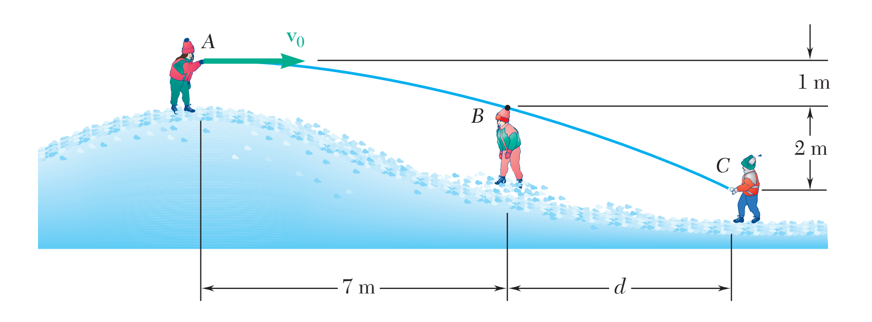


Figura P11.98

11.99 Mientras entrega periódicos, una joven lanza uno de ellos con velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$. Determine el intervalo de valores de v_0 si el periódico debe caer entre los puntos B y C.

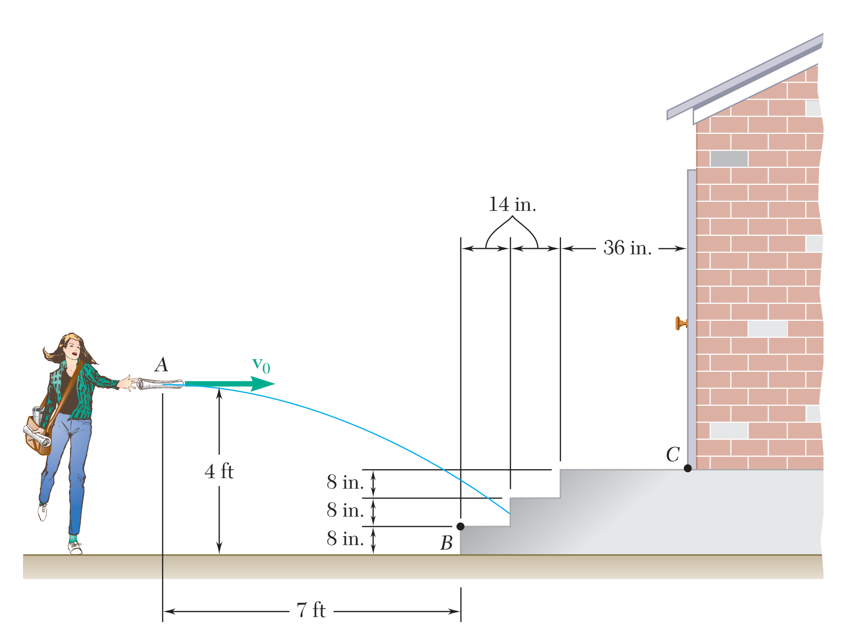


Figura P11.99

11.100 Una máquina lanzadora "dispara" pelotas de béisbol con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$. Si se sabe que la altura h varía entre 31 in. y 42 in., determine *a*) el rango de valores de v_0, *b*) los valores de α correspondientes a h = 31 in. y h = 42 in.

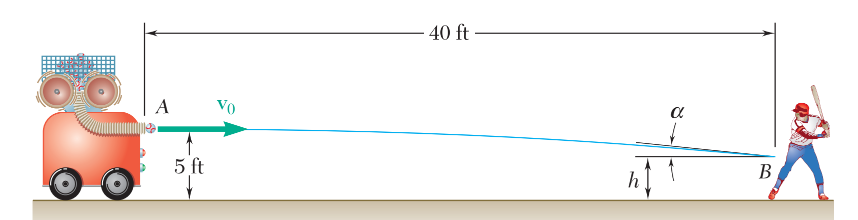


Figura P11.100

11.101 Un jugador de voleibol sirve la pelota con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ que tiene una magnitud 13.40 m/s y forma un ángulo de 20° con la horizontal. Determine *a*) si la pelota pasará sobre el borde superior de la red, *b*) a qué distancia de la red aterrizará la pelota.

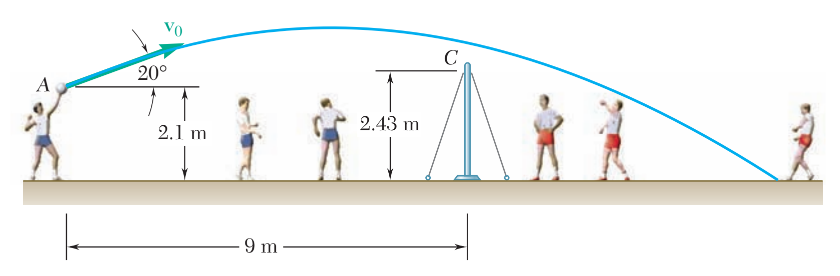


Figura P11.101

11.102 Se vierte leche dentro de un vaso que tiene una altura de 140 mm y un diámetro interior de 66 mm. Si la velocidad inicial de la leche es de 1.2 m/s a un ángulo de 40° con la horizontal, determine el rango de valores de la altura h para los cuales la leche entrará en el vaso.

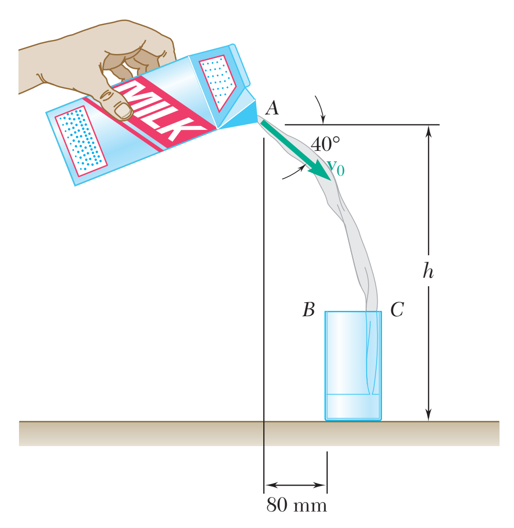


Figura P11.102

11.103 Un golfista golpea la pelota con una velocidad inicial de 160 ft/s, a un ángulo de 25° con la horizontal. Si el terreno de juego desciende con un ángulo promedio de 5°, determine la distancia d entre el golfista y el punto B donde la pelota toca el terreno por primera vez.

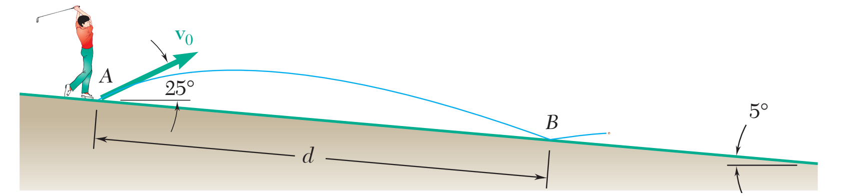


Figura *P11.103*

11.104 Por el cañón de un desagüe fluye agua con una velocidad inicial de 2.5 ft/s a un ángulo de 15° con la horizontal. Determine el rango de valores de la distancia d para los cuales el agua caerá dentro del recipiente BC.

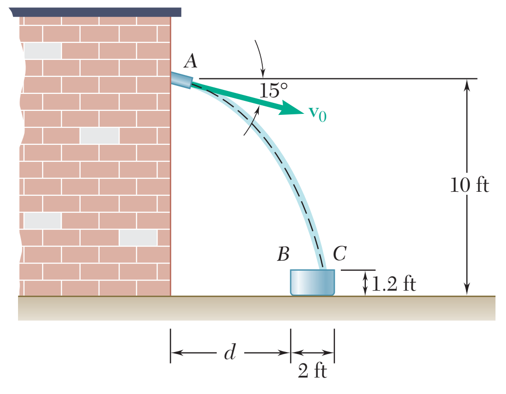


Figura *P11.104*

11.105 Mediante una banda transportadora se descarga arena en A y cae en la parte superior de un montículo en B. Si se sabe que la banda transportadora forma un ángulo $\alpha = 20°$ con la horizontal, determine la velocidad v_0 de la banda.

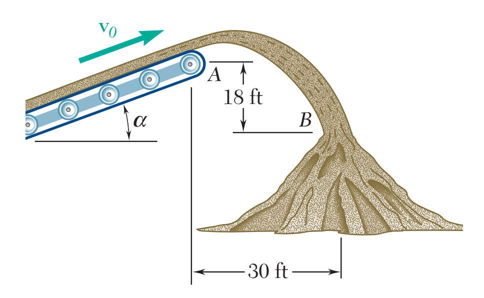


Figura P11.105

11.106 Una jugadora de basquetbol lanza un tiro cuando se encuentra a 16 ft del tablero. Si la pelota tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a un ángulo de 30° con la horizontal, determine el valor de v_0 cuando d es igual a *a*) 9 in., *b*) 17 in.

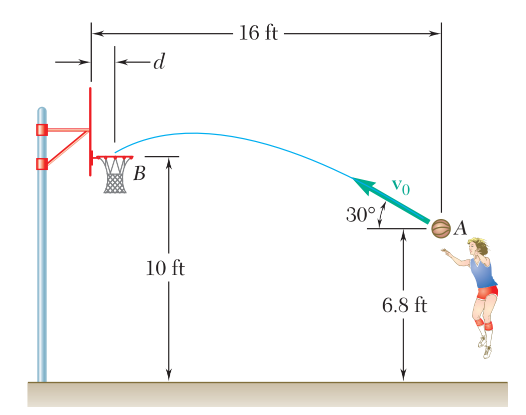


Figura P11.106

11.107 Un grupo de niños está lanzando pelotas a través de una llanta con 0.72 m de diámetro interior, la cual cuelga de un árbol. Un niño lanza una pelota con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a un ángulo de 3° con la horizontal. Determine el intervalo de valores de v_0 para los cuales la pelota pasará a través de la llanta.

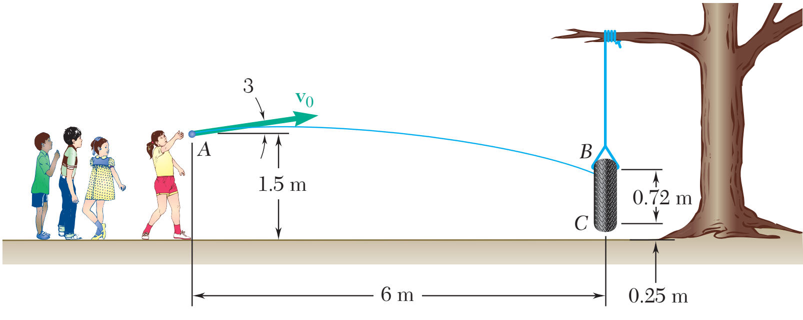


Figura P11.107

11.108 La boquilla en A descarga agua de enfriamiento con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a un ángulo de 6° con la horizontal sobre una rueda rectificadora de 350 mm de diámetro. Determine el rango de valores de la velocidad inicial para la cual el agua caerá sobre la rueda entre los puntos B y C.

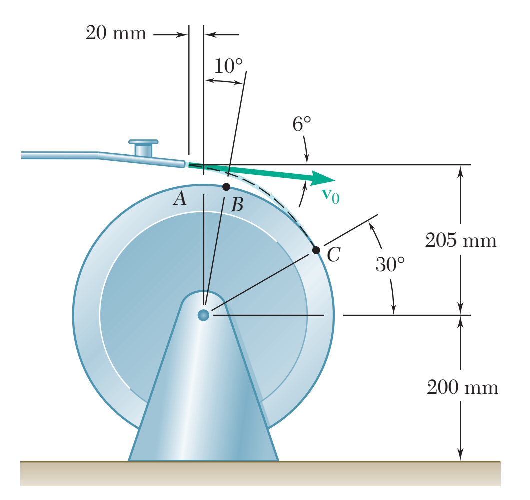


Figura P11.108

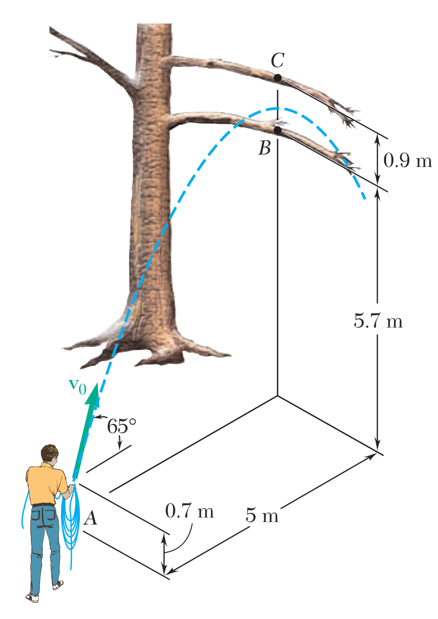


Figura *P11.109*

11.109 Mientras sostiene uno de sus extremos, un trabajador lanza un lazo de cuerda sobre la rama más baja de un árbol. Si lanza la cuerda con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a un ángulo de 65° con la horizontal, determine el intervalo de valores de v_0 para los cuales la cuerda sólo sobrepasará a la rama más baja.

11.110 Una pelota se deja caer sobre un escalón en el punto A y rebota con una velocidad $\mathbf{v}_0$ a un ángulo de 15° con la vertical. Determine el valor de v_0 si se sabe que justo antes de que la pelota rebote en el punto B su velocidad v_B forma un ángulo de 12° con la vertical.

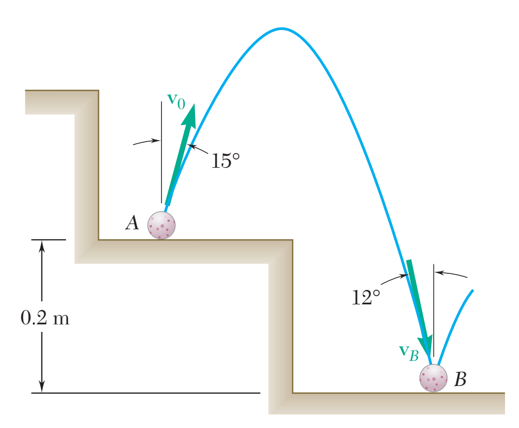


Figura *P11.110*

11.111 Un cohete a escala se lanza desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de 250 ft/s. Si el paracaídas de descenso del cohete no se abre y éste aterriza a 400 ft de A, determine *a*) el ángulo α que $\mathbf{v}_0$ forma con la vertical, *b*) la máxima altura h que alcanza el cohete, *c*) la duración del vuelo.

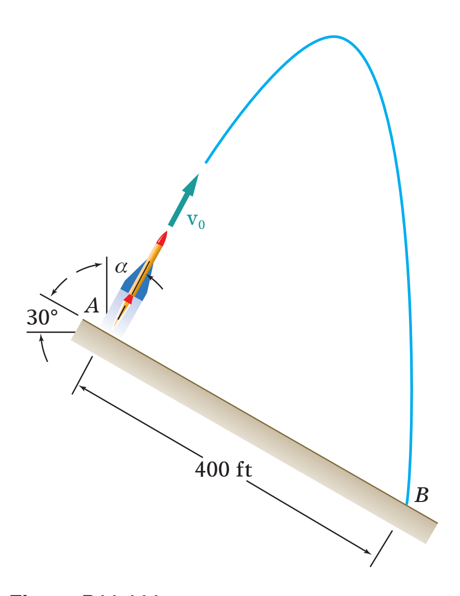


Figura P11.111

11.112 La velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de un disco de hockey es de 105 mi/h. Determine *a*) el valor máximo (menor que 45°) del ángulo α para el cual el disco entra en la portería, *b*) el tiempo correspondiente que se requiere para que el disco llegue a la portería.

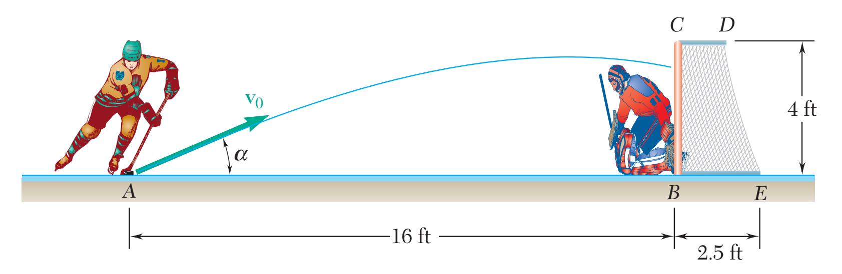


Figura P11.112

11.113 El lanzador en un juego de softbol lanza una pelota con una velocidad $\mathbf{v}_0$ de 72 km/h a un ángulo α con la horizontal. Si la altura de la pelota en el punto B es de 0.68 m, determine *a*) el ángulo α, *b*) el ángulo θ que forma la velocidad de la pelota en el punto B con la horizontal.

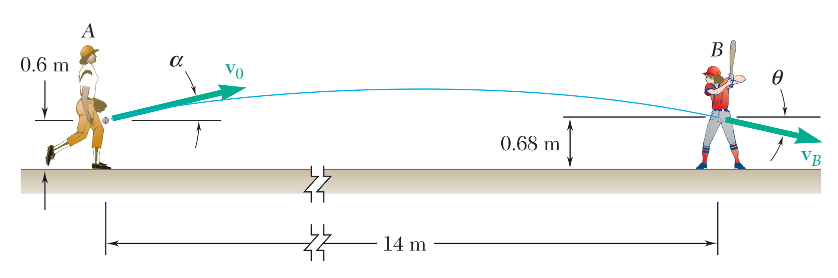


Figura P11.113

***11.114** Un montañista planea saltar desde A hasta B por encima de un precipicio. Determine el valor mínimo de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ del montañista y el valor correspondiente del ángulo α para que pueda caer en el punto B.

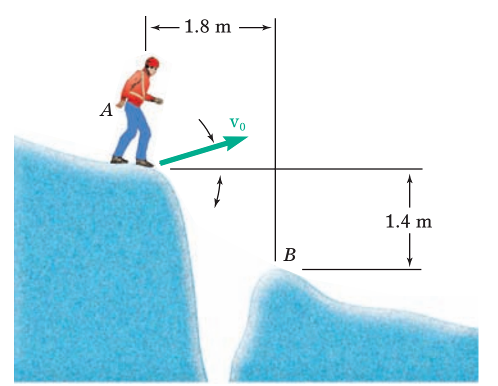


Figura *P11.114*

11.115 Un rociador de jardín que descarga agua con una velocidad ini-cial $\mathbf{v}_0$ de 8 m/s se usa para regar un jardín de vegetales. Determine la dis-tan-cia d al punto B más lejano que será rociado y el ángulo α correspondiente cuando *a*) los vegetales apenas comienzan a crecer, *b*) la altura h de la planta de maíz es de 1.8 m.

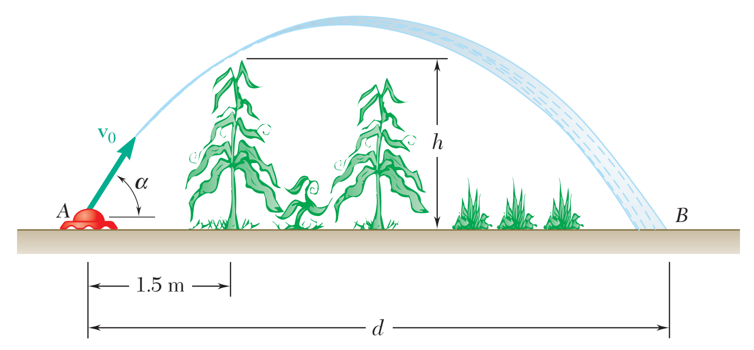


Figura P11.115

11.116 Un trabajador utiliza agua a alta presión para limpiar el interior de un largo tubo de desagüe. Si el agua se descarga con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de 11.5 m/s, determine *a*) la distancia *d* hasta el punto *B* más lejano sobre la parte superior de la tubería que el agua puede limpiar desde la posición del trabajador en *A*, *b*) el ángulo α correspondiente.

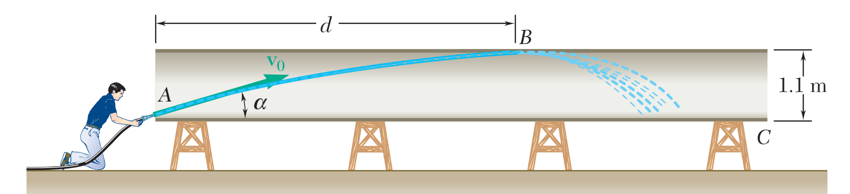


Figura *P11.116*

11.117 Un bloque deslizante *A* se mueve hacia abajo a una rapidez de 0.5 m/s, la velocidad con respecto a *A* de la porción *B* de la banda entre las poleas locas *C* y *D* es $\mathbf{v}_{CD/A} = 2$ m/s $\measuredangle\theta$. Determine la velocidad de la porción *CD* de la banda cuando *a*) $\theta = 45°$, *b*) $\theta = 60°$.

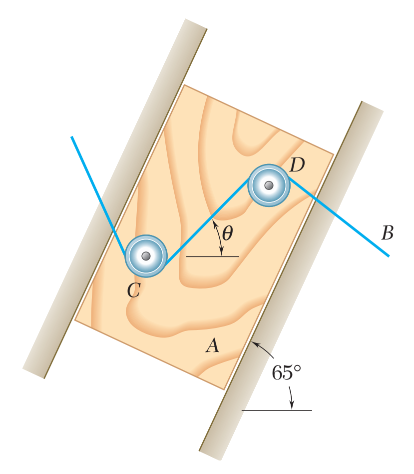


Figura P11.117

11.118 Las velocidades de los esquiadores *A* y *B* son las que se muestran en la figura. Determine la velocidad de *A* con respecto a *B*.

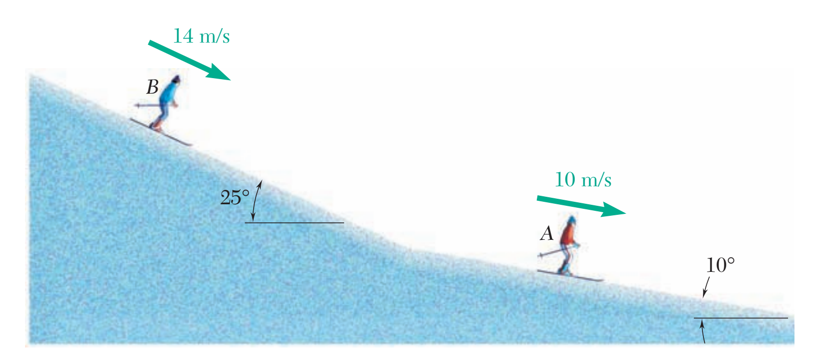


Figura P11.118

11.119 Un radar con base en tierra indica que un transbordador sale de su muelle a una velocidad $\mathbf{v}$ = 9.8 nudos $\angle$70°, en tanto que los instrumentos a bordo del transbordador indican una velocidad de 10 nudos y una dirección de 30° hacia el suroeste con relación al río. Determine la velocidad de este último.

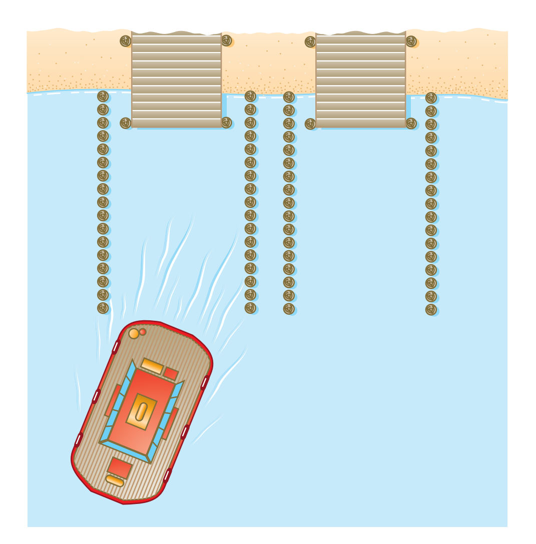


Figura P11.119

11.120 Los aviones *A* y *B* vuelan a la misma altura y rastrean el ojo del huracán *C*. La velocidad relativa de *C* con respecto a *A* es $\mathbf{v}_{C/A}$ = 235 mi/h $\angle$ 75° y la velocidad relativa de *C* con respecto a *B* es $\mathbf{v}_{C/B}$ = 260 mi/h $\measuredangle$ 40°. Determine *a*) la velocidad relativa de *B* con respecto a *A*, *b*) la velocidad de *A* si el radar ubicado en tierra indica que el huracán se mueve con una rapidez de 24 mi/h rumbo al norte, *c*) el cambio en la posición de *C* con respecto a *B* durante un intervalo de 15 minutos.

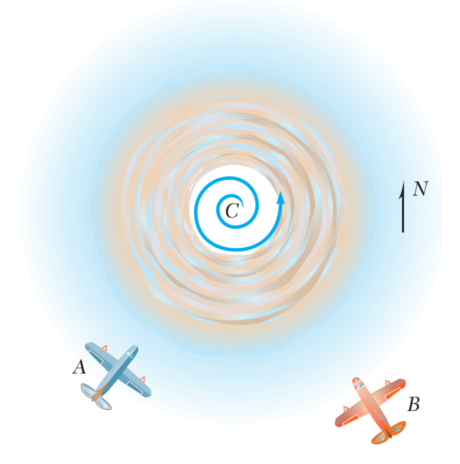


Figura P11.120

11.121 Las velocidades de los trenes *A* y *B* son las que se indican en la figura. Si se sabe que la rapidez de cada tren es constante y *B* alcanza el cruce 10 min después de que *A* lo hizo, determine *a*) la velocidad relativa de *B* con respecto a *A*, *b*) la distancia entre los frentes de las máquinas 3 min después de que *A* pasó por el crucero.

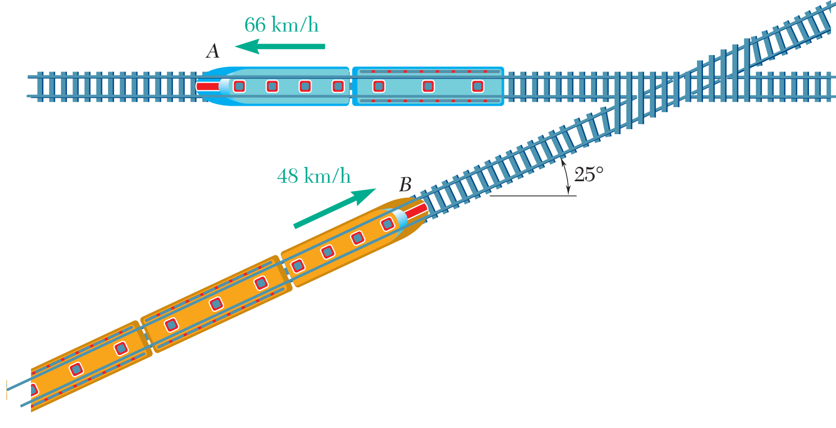


Figura *P11.121*

11.122 Si se sabe que la velocidad del bloque B con respecto al bloque A es $\mathbf{v}_{B/A} = 5.6$ m/s $\measuredangle 70°$, determine las velocidades de A y B.

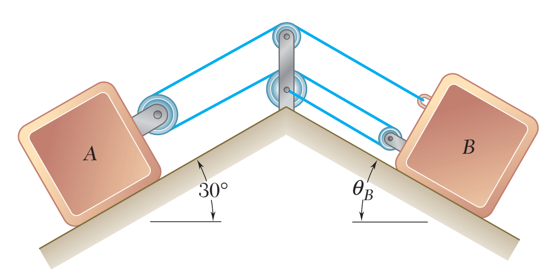


Figura *P11.122*

11.123 Si se sabe que en el instante mostrado el bloque A tiene una velocidad de 8 in./s y una aceleración de 6 in./s^2, ambas dirigidas hacia abajo sobre el plano inclinado, determine *a*) la velocidad del bloque B, *b*) la aceleración del bloque B.

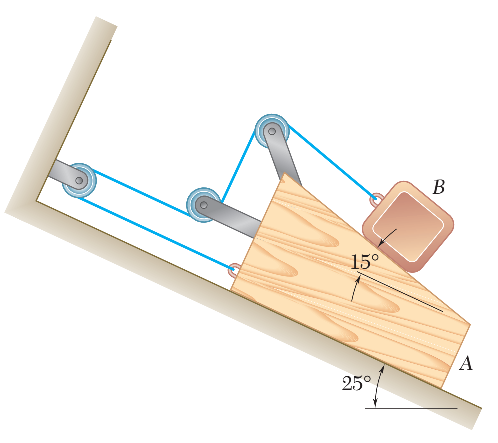


Figura P11.123

11.124 Si se sabe que en el instante mostrado el ensamble A tiene una velocidad de 9 in./s y una aceleración de 15 in./s^2, ambas dirigidas hacia abajo, determine *a*) la velocidad del bloque B, *b*) la aceleración del bloque B.

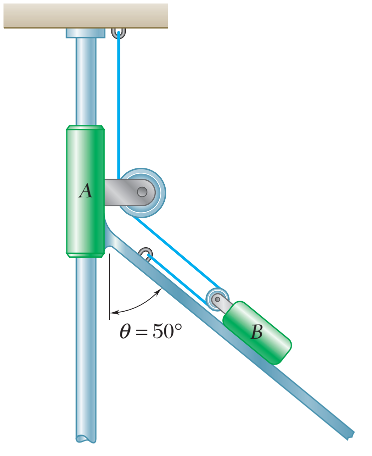


Figura P11.124

11.125 El ensamble de la barra *A* y la cuña *B* inicia su movimiento desde el reposo y se mueve hacia la derecha con una aceleración constante de 2 mm/s^2. Determine *a*) la aceleración de la cuña *C*, *b*) la velocidad de la cuña *C* cuando $t = 10$ s.

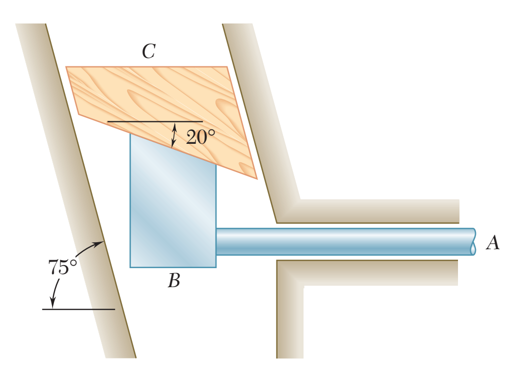


Figura P11.125

11.126 Cuando el camión que se muestra empieza a retroceder con una aceleración constante de 1.2 m/s^2, la sección externa *B* de su brazo comienza a retraerse con una aceleración constante de 0.5 m/s^2 en relación con el camión. Determine *a*) la aceleración de la sección *B*, *b*) la velocidad de la sección *B* cuando $t = 2$ s.

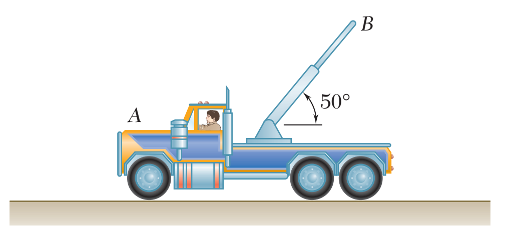


Figura P11.126

11.127 La banda transportadora *A*, que forma un ángulo de 20° con la horizontal, se mueve a una rapidez constante de 4 ft/s y se usa para cargar un avión. Si el trabajador lanza una bolsa de equipaje *B* con una velocidad inicial de 2.5 ft/s a un ángulo de 30° con la horizontal, determine la velocidad de la bolsa de equipaje relativa a la banda cuando cae sobre esta última.

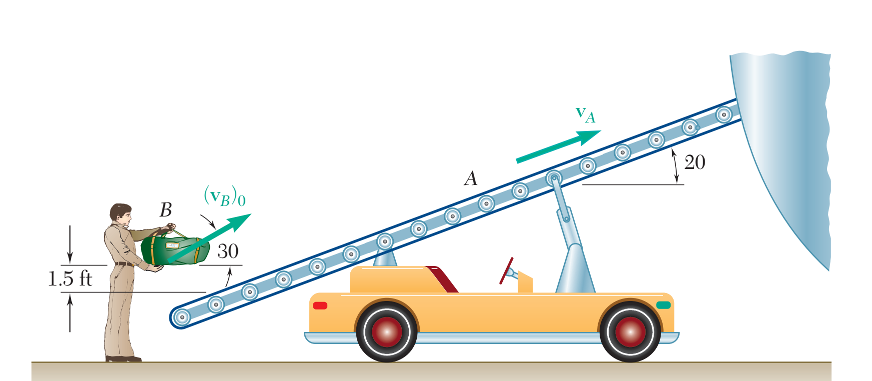


Figura P11.127

11.128 Determine la velocidad requerida de la banda *B* para que la velocidad relativa con la cual la arena golpea a dicha banda sea *a*) vertical, *b*) lo más pequeña posible.

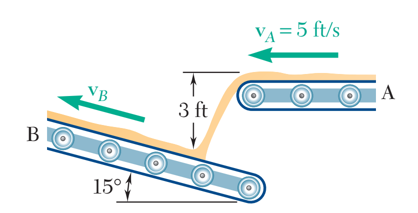


Figura P11.128

11.129 Cuando se observa desde un barco que se mueve hacia el este a 9 km/h, el viento parece soplar desde el sur. Después de que el barco ha cambiado su curso y su rapidez, y se mueve hacia el norte a 6 km/h, el viento parece soplar desde el suroeste. Si se supone que la velocidad del viento es constante durante el periodo de observación, determine la magnitud y la dirección reales del viento.

11.130 Cuando una pequeña lancha viaja hacia el norte a 5 km/h, una bandera montada sobre su popa forma un ángulo $\theta = 50°$ con la línea central de la lancha en la forma que se indica en la figura. Un breve tiempo después, cuando el bote se desplaza hacia el este a 20 km/h, el ángulo θ es otra vez de 50°. Determine la rapidez y la dirección del viento.

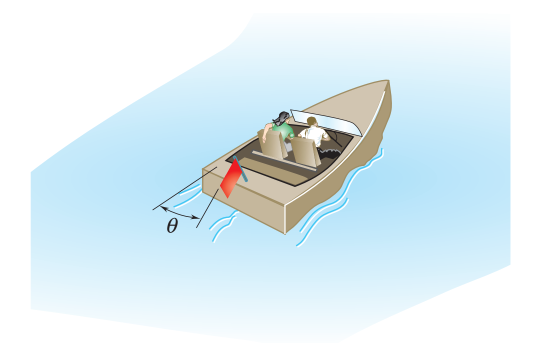


Figura P11.30

11.131 Como parte de una exhibición en una tienda departamental, un modelo de tren D corre sobre una vía ligeramente inclinada entre las escaleras eléctricas que suben y las que bajan. Cuando el tren y los compradores pasan por el punto A, el tren aparenta bajar a un ángulo de 22° con la horizontal desde la perspectiva de un comprador sobre la escalera B que sube, mientras que para un comprador sobre la escalera C que baja, el tren aparenta moverse hacia arriba a un ángulo de 23° con la horizontal y parece trasladarse hacia la izquierda. Si se sabe que la rapidez de las escaleras es de 3 ft/s, determine la rapidez y la dirección del tren.

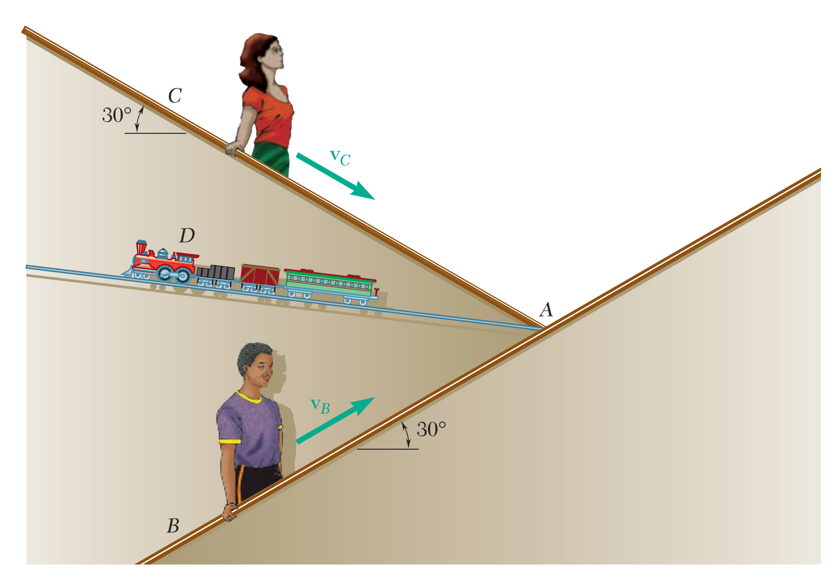


Figura *P11.131*

11.132 Las trayectorias de las gotas de lluvia durante una tormenta parecen formar un ángulo de 75° con la vertical y apuntar hacia la izquierda cuando se observan por la ventana del lado izquierdo de un automóvil que viaja hacia el norte a una rapidez de 40 mi/h. Cuando se observan por la ventana del lado derecho de un automóvil que viaja hacia el sur a una rapidez de 30 mi/h, las gotas de lluvia parecen formar un ángulo de 60° con la vertical. Si el conductor del automóvil que viaja hacia el norte se detuviera, ¿a qué ángulo y con qué rapidez observaría que caen las gotas?

11.13. COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL

En la sección 11.9 se indicó que la velocidad de una partícula es un vector tangente a la trayectoria de la misma, pero que, en general, la aceleración no es tangente a la trayectoria. En ocasiones resulta conveniente descomponer la aceleración en componentes dirigidas, respectivamente, a lo largo de la tangente y la normal de la trayectoria de la partícula.

Movimiento plano de una partícula. Primero considérese una partícula que se mueve a lo largo de una curva contenida en el plano de la figura. Sea P la posición de la partícula en un instante dado. Se une en P a un vector unitario $\mathbf{e}_t$ tangente a la trayectoria de la partícula y que apunta en la dirección de movimiento (figura 11.21*a*). Sea $\mathbf{e}'_t$ el vector unitario correspondiente a la posición P' de la partícula en un instante posterior. Si se dibujan ambos vectores desde el mismo origen O', se define el vector $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$ (figura 11.21*b*). Puesto que $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$ son de longitud unitaria, sus puntas se encuentran sobre un círculo de radio 1. Si se denota por $\Delta\theta$ el ángulo formado por $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$, se encuentra que la magnitud de $\Delta\mathbf{e}_t$ es $2 \operatorname{sen} (\Delta\theta/2)$. Al considerar ahora que el vector $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$, se advierte que a medida que $\Delta\theta$ se aproxima a cero, este vector se vuelve tangente al círculo unitario de la figura 11.21*b*), esto es, perpendicular a $\mathbf{e}_t$, y que su magnitud tiende a

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} (\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} (\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

En consecuencia, el vector obtenido en el límite es un vector unitario a lo largo de la normal a la trayectoria de la partícula, en la dirección hacia la cual cambia $\mathbf{e}_t$. Al denotar este vector por $\mathbf{e}_n$, se escribe

$$\mathbf{e}_n = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\theta}$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} \tag{11.35}$$

Puesto que la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula es tangente a la trayectoria, puede expresarse como el producto del escalar v y el vector unitario $\mathbf{e}_t$. Se tiene

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{11.36}$$

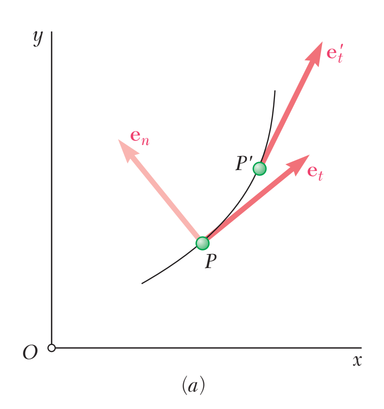
Para obtener la aceleración de la partícula, (11.36) se diferenciará con respecto a t. Al aplicar la regla de la diferenciación del producto de un escalar de una función escalar (sección 11.10), se escribe

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \tag{11.37}$$

Pero

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Al recordar de (11.16) que $ds/dt = v$, de (11.35) que $d\mathbf{e}_t/d\theta = \mathbf{e}_n$, y del cálculo elemental que $d\theta/ds$ es igual a $1/\rho$, donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en P (figura 11.22), se tiene



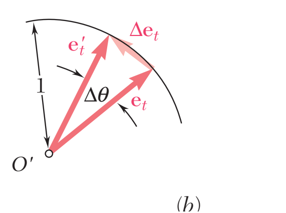


Figura 11.21

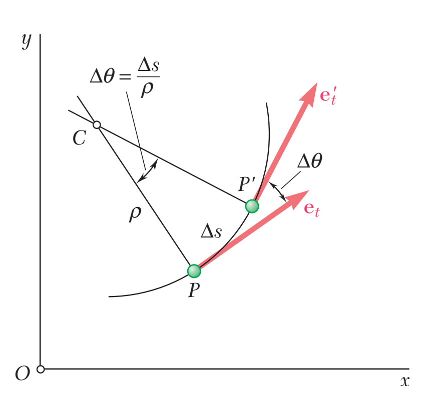


Figura 11.22

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.38}$$



Fotografía 11.5 Los pasajeros de un tren que pasa por una curva experimentarán una aceleración normal hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

Si se sustituye en (11.37), se obtiene

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.39}$$

De tal modo, las componentes escalares de la aceleración son

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{11.40}$$

Las relaciones obtenidas expresan que la *magnitud de la componente tangencial* de la aceleración es igual a la *razón de cambio de la velocidad de la partícula,* en tanto que la *magnitud de la componente normal* es igual al *cuadrado de la velocidad dividida entre el radio de curvatura de la trayectoria en P.* Si aumenta la velocidad de la partícula, a_t es positiva y la componente vectorial $\mathbf{a}_t$ apunta en la dirección de movimiento. Si disminuye la velocidad de la partícula, a_t es negativa y $\mathbf{a}_t$ apunta contra la dirección del movimiento. La componente vectorial $\mathbf{a}_n$, por otro lado, *siempre se dirige hacia el centro de curvatura C de la trayectoria* (figura 11.23).

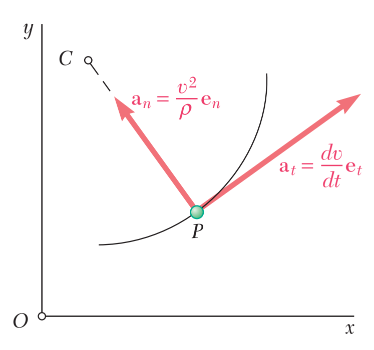


Figura 11.23

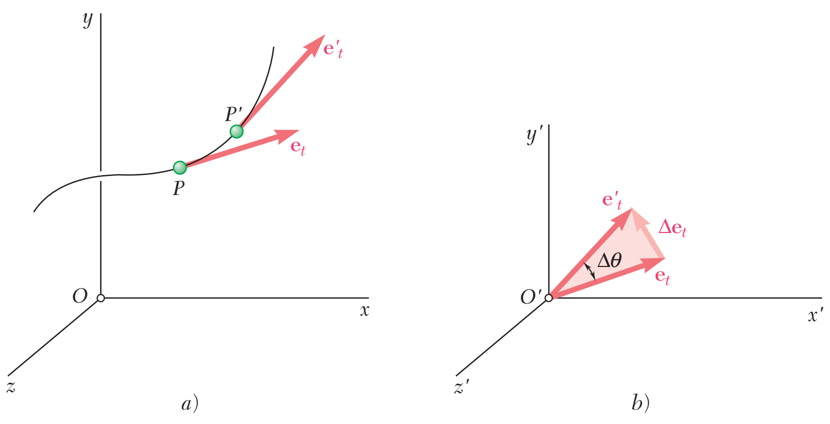
De lo anterior se concluye que la magnitud de la componente tangencial de la aceleración refleja un cambio en la magnitud de la velocidad de la partícula, mientras que su componente normal refleja un cambio en su dirección de movimiento. La aceleración de una partícula será cero sólo si ambas de sus componentes son cero. En consecuencia, la aceleración de una partícula que se mueve con velocidad constante a lo largo de una curva no será cero, a menos que la partícula pase por un punto de inflexión de la curva (donde el radio de curvatura es infinito) o a menos que la curva sea una línea recta.

El hecho de que la componente normal de la aceleración dependa del radio de curvatura de la trayectoria que sigue la partícula se toma en cuenta en el diseño de estructuras o mecanismos tan diferentes como las alas de los aviones, las vías de ferrocarril y las levas. Para evitar cambios repentinos en la aceleración de las partículas de aire que fluyen por las alas, los perfiles de éstas se diseñan sin ningún cambio brusco en la curvatura. Se tiene igual cuidado al diseñar curvas de vías de ferrocarril, para evitar cambios bruscos en la aceleración de los vagones (lo cual podría dañar el equipo y ser incómodo para los pasaje-

ros). Por ejemplo, a una sección recta de la vía nunca le sigue de inmediato una sección circular. Se recurre a secciones de transición especiales que ayudan a pasar de manera suave del radio de curvatura infinito de la sección recta al radio finito de la vía circular. Del mismo modo, en el diseño de levas de alta velocidad se evitan los cambios abruptos en la aceleración utilizando curvas de transición que producen un cambio continuo de aceleración.

Movimiento de una partícula en el espacio. Las relaciones (11.39) y (11.40) se cumplen en el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio. Sin embargo, puesto que hay un número infinito de líneas rectas que son perpendiculares a la tangente en un punto dado P de una curva en el espacio, es necesario definir con más precisión la dirección del vector unitario $\mathbf{e}_n$.

Se considerarán de nuevo los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$ tangentes a la trayectoria de la partícula en dos puntos vecinos P y P' (figura 11.24*a*) y el vector $\Delta\mathbf{e}_t$ que representa la diferencia entre $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}'_t$ (figura 11.24*b*). Imagine ahora un plano que pasa por P (figura 11.24*a*) paralelo al plano definido por los vectores $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}'_t$ y $\Delta\mathbf{e}_t$ (figura 11.24*b*). Este plano contiene la tangente a la curva en P y es paralelo a la tangente en P'. Si



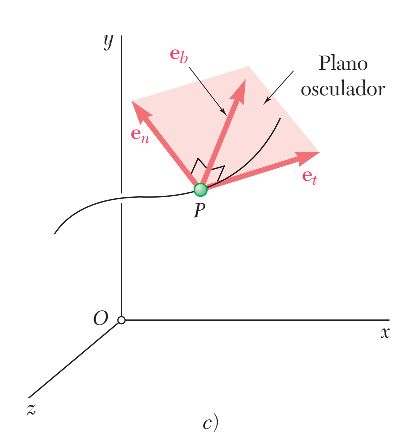
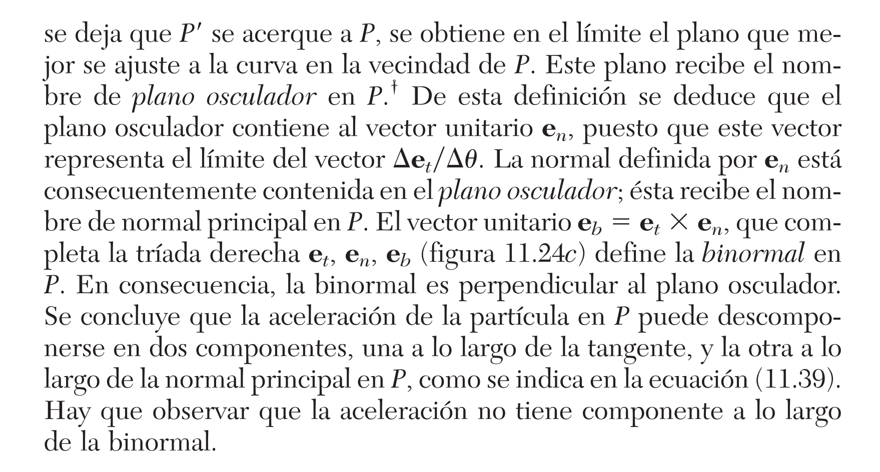


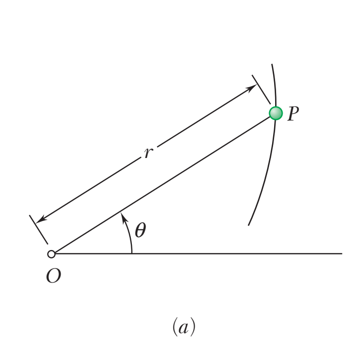
Figura 11.24


se deja que P' se acerque a P, se obtiene en el límite el plano que mejor se ajuste a la curva en la vecindad de P. Este plano recibe el nombre de *plano osculador* en P.† De esta definición se deduce que el plano osculador contiene al vector unitario $\mathbf{e}_n$, puesto que este vector representa el límite del vector $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$. La normal definida por $\mathbf{e}_n$ está consecuentemente contenida en el *plano osculador*; ésta recibe el nombre de normal principal en P. El vector unitario $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$, que completa la tríada derecha $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_b$ (figura 11.24*c*) define la *binormal* en P. En consecuencia, la binormal es perpendicular al plano osculador. Se concluye que la aceleración de la partícula en P puede descomponerse en dos componentes, una a lo largo de la tangente, y la otra a lo largo de la normal principal en P, como se indica en la ecuación (11.39). Hay que observar que la aceleración no tiene componente a lo largo de la binormal.

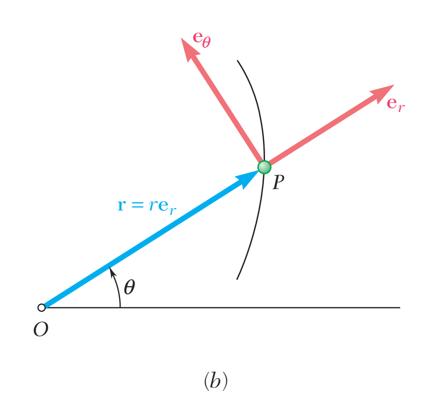
†Del latín *osculari,* besar.

11.14. COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

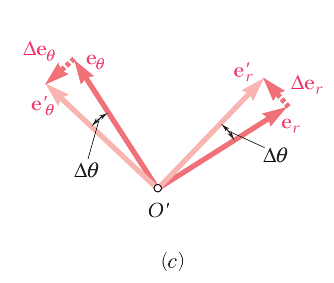
En ciertos problemas de movimiento plano, la posición de la partícula P se define mediante sus coordenadas polares r y θ (figura 11.25*a*). En ese caso es conveniente descomponer la velocidad y la aceleración de la partícula en componentes paralela y perpendicular, respectivamente, a la línea OP. Éstas se conocen como *componentes radial* y *transversal.*



(*a*)



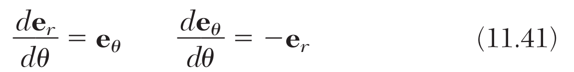
(*b*)



(*c*)

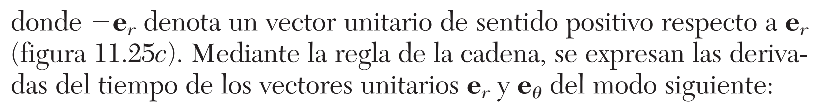
Figura 11.25

Se unen a P dos vectores unitarios, $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ (figura 11.25*b*). El vector $\mathbf{e}_r$ está dirigido a lo largo de OP y el vector $\mathbf{e}_\theta$ se obtiene al rotar $\mathbf{e}_r$ 90° en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. El vector unitario $\mathbf{e}_r$ define la dirección *radial*, esto es, la dirección en la cual P se movería si r aumentara y θ se mantuviera constante; el vector unitario $\mathbf{e}_\theta$ define la dirección *transversal*, es decir, la dirección en la que P se movería si θ aumentara y r se mantuviera constante. Una operación similar a la que se usó en la sección 11.13 para determinar la derivada del vector unitario $\mathbf{e}_t$ produce las relaciones



$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r \qquad (11.41)$$

donde $-\mathbf{e}_r$ denota un vector unitario de sentido positivo respecto a $\mathbf{e}_r$ (figura 11.25*c*). Mediante la regla de la cadena, se expresan las derivadas del tiempo de los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ del modo siguiente:



$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r\frac{d\theta}{dt}$$



Fotografía 11.6 Los pedales de un aparato entrenador elíptico realizan un movimiento curvilíneo.

o, al utilizar puntos para indicar derivación con respecto a t,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \qquad (11.42)$$

Para obtener la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula P, se expresa la posición del vector $\mathbf{r}$ de P como el producto del escalar r y el vector unitario $\mathbf{e}_r$ y se deriva con respecto a t:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

o, al recordar la primera de las relaciones (11.42),

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad (11.43)$$

Al derivar otra vez con respecto a t para obtener la aceleración, se escribe

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

o, al sustituir $\dot{\mathbf{e}}_r$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta$, de (11.42) y factorizar $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \qquad (11.44)$$

Las componentes escalares de la velocidad y la aceleración en las variaciones radial y transversal son, por lo tanto,

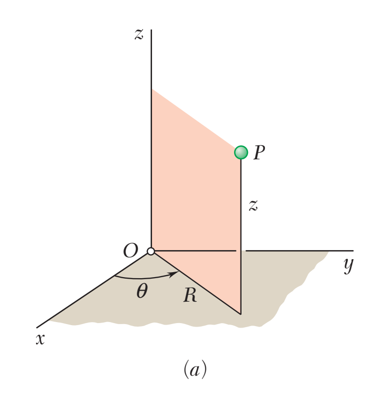
$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \qquad (11.45)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad (11.46)$$

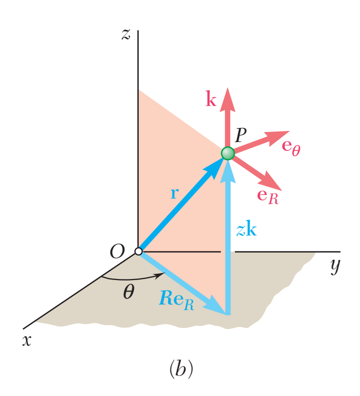
Es importante advertir que a_r *no* es igual a la derivada respecto al tiempo de v_r y que a_θ *no* es igual a la derivada en el tiempo de v_θ.

En el caso de una partícula que se mueve a lo largo de un círculo de centro O, se tiene $r =$ constante y $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, y las fórmulas (11.43) y (11.44) se reducen, respectivamente, a

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad (11.47)$$



(*a*)



(*b*)

Figura 11.26

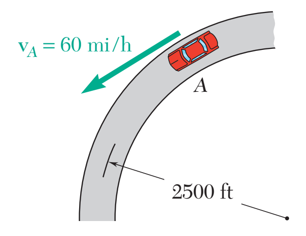
Extensión al movimiento de una partícula en el espacio: coordenadas cilíndricas. La posición de una partícula P en el espacio en algunas ocasiones se define mediante sus coordenadas cilíndricas R, θ y z (figura 11.26*a*). En ese caso es conveniente utilizar los vectores unitarios $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{k}$ que se indican en la figura 11.26*b*. Al descomponer el vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula P en componentes a lo largo de los vectores unitarios, se escribe

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{k} \qquad (11.48)$$

Al observar que $\mathbf{e}_R$ y $\mathbf{e}_\theta$ definen, respectivamente, las direcciones radial y transversal en el plano horizontal xy, y que el vector $\mathbf{k}$, el cual define la dirección *axial,* es constante en dirección así como en magnitud, se verifica con facilidad que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \qquad (11.49)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \qquad (11.50)$$



PROBLEMA RESUELTO 11.10

Un automovilista viaja sobre una sección curva de una autopista de 2 500 ft de radio a una rapidez de 60 mi/h. El automovilista aplica repentinamente los frenos, provocando que el automóvil se desacelere a una tasa constante. Si se sabe que después de 8 s la rapidez se ha reducido a 45 mi/h, determine la aceleración del automóvil inmediatamente después de que se han aplicado los frenos.

SOLUCIÓN

Componente tangencial de la aceleración. Primero se expresan las velocidades en ft/s.

$$60 \text{ mi/h} = \left(60\frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5\,280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}}\right) = 88 \text{ ft/s}$$

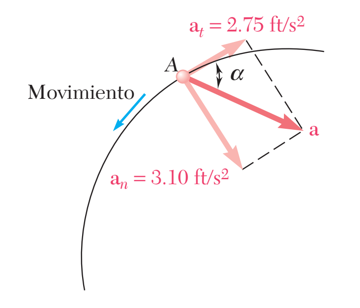
$$45 \text{ mi/h} = 66 \text{ ft/s}$$

Como el automóvil desacelera a una tasa constante, se tiene

$$a_t = \text{promedio } a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{66 \text{ ft/s} - 88 \text{ ft/s}}{8 \text{ s}} = -2.75 \text{ ft/s}^2$$

Componente normal de la aceleración. Inmediatamente después de que los frenos se han aplicado, la rapidez se mantiene en 88 ft/s, y se tiene

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(88 \text{ ft/s})^2}{2\,500 \text{ ft}} = 3.10 \text{ ft/s}^2$$



Magnitud y dirección de la aceleración. La magnitud y dirección de la resultante **a** de las componentes $\mathbf{a}_n$ y $\mathbf{a}_t$ son

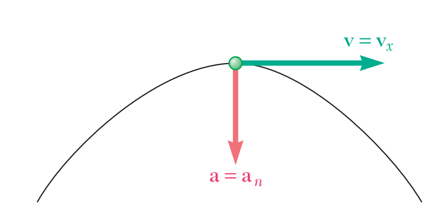
$$\tan \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{3.10 \text{ ft/s}^2}{2.75 \text{ ft/s}^2} \qquad \alpha = 48.4° \blacktriangleleft$$

$$a = \frac{a_n}{\text{sen } \alpha} = \frac{3.10 \text{ ft/s}^2}{\text{sen } 48.4°} \qquad \mathbf{a} = 4.14 \text{ ft/s}^2 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 11.11

Determine el radio mínimo de curvatura de la trayectoria descrita por el proyectil considerado en el problema resuelto 11.7.

SOLUCIÓN

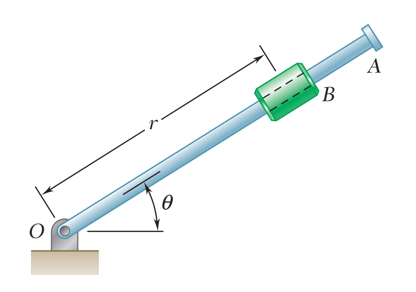


Puesto que $a_n = v^2/\rho$, tenemos que $\rho = v^2/a_n$. El radio será pequeño cuando v sea pequeño, o cuando a_n sea grande. La rapidez v es mínima en la parte superior de la trayectoria, pues $v_y = 0$ en ese punto; a_n es máxima en el mismo punto, ya que la dirección de la vertical coincide con la dirección de la normal. Por lo tanto, el radio mínimo de curvatura ocurre en la parte superior de la trayectoria. En este punto, se tiene

$$v = v_x = 155.9 \text{ m/s} \qquad a_n = a = 9.81 \text{ m/s}^2$$

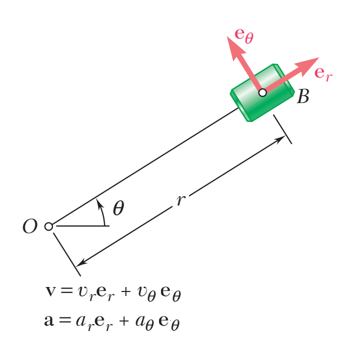
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(155.9 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \qquad \rho = 2\,480 \text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 11.12



La rotación del brazo OA de 0.9 m alrededor de O se define mediante la relación $\theta = 0.15t^2$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. El collarín B desliza a lo largo del brazo de modo tal que su distancia desde O es $r = 0.9 - 0.12t^2$, donde r se expresa en metros y t en segundos. Después de que el brazo OA ha girado 30°, determine *a*) la velocidad total del collarín, *b*) la aceleración total del collarín, *c*) la aceleración relativa del collarín con respecto al brazo.

SOLUCIÓN

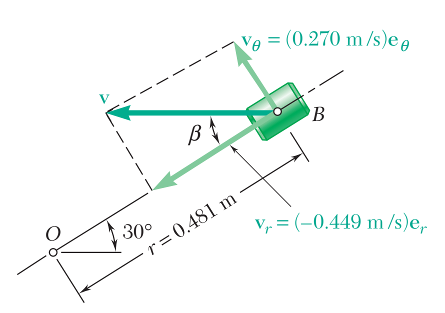


Tiempo *t* al cual *θ* = 30°. Al sustituir $\theta = 30° = 0.524$ rad en la expresión para θ, se obtiene

$$\theta = 0.15t^2 \qquad 0.524 = 0.15t^2 \qquad t = 1.869 \text{ s}$$

Ecuaciones de movimiento. Si se sustituye $t = 1.869$ s en las expresiones para r, θ y su primera y segunda derivadas, se tiene

$$r = 0.9 - 0.12t^2 = 0.481 \text{ m} \qquad \theta = 0.15t^2 = 0.524 \text{ rad}$$
$$\dot{r} = -0.24t = -0.449 \text{ m/s} \qquad \dot{\theta} = 0.30t = 0.561 \text{ rad/s}$$
$$\ddot{r} = -0.24 = -0.240 \text{ m/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = 0.30 = 0.300 \text{ rad/s}^2$$

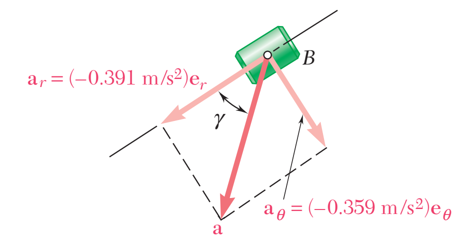


***a*) Velocidad de *B*.** Mediante las ecuaciones (11.45) se obtienen los valores de v_r y v_θ cuando $t = 1.869$ s.

$$v_r = \dot{r} = -0.449 \text{ m/s}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} = 0.481(0.561) = 0.270 \text{ m/s}$$

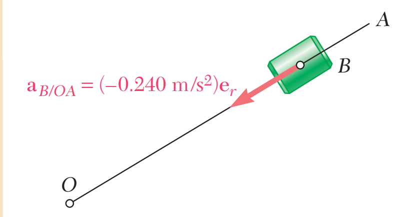
Al resolver el triángulo rectángulo que se muestra, se obtiene la magnitud y dirección de la velocidad.

$$v = 0.524 \text{ m/s} \qquad \beta = 31.0° \quad ◀$$



***b*) Aceleración de *B*.** Mediante las ecuaciones (11.46), se obtiene

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$= -0.240 - 0.481(0.561)^2 = -0.391 \text{ m/s}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$= 0.481(0.300) + 2(-0.449)(0.561) = -0.359 \text{ m/s}^2$$
$$a = 0.531 \text{ m/s}^2 \qquad \gamma = 42.6° \quad ◀$$



***c*) Aceleración de *B* con respecto al brazo *OA*.** Hay que observar que el movimiento del collarín con respecto al brazo es rectilíneo y está definido por la coordenada r. Se escribe

$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0.240 \text{ m/s}^2$$
$$a_{B/OA} = 0.240 \text{ m/s}^2 \text{ hacia } O. \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los siguientes problemas se pide expresar la velocidad y la aceleración de las partículas en términos de sus *componentes tangencial y normal*, o de sus *componentes radial y transversal.* Aunque es posible que esas componentes no le sean tan familiares como las rectangulares, descubrirá que aquellas componentes pueden simplificar la solución de muchos problemas, y que cierto tipo de movimiento se describe de manera más sencilla con ellas.

1. Empleo de componentes tangencial y normal. Estas componentes son las que se usan con mayor frecuencia cuando la partícula de interés viaja a lo largo de una trayectoria circular, o cuando se va a determinar el radio de curvatura. Hay que recordar que el vector unitario $\mathbf{e}_t$ es tangente a la trayectoria de la partícula (y, en consecuencia, se alinea con la velocidad) mientras el vector unitario $\mathbf{e}_n$ apunta a lo largo de la normal a la trayectoria y siempre está dirigido hacia su centro de curvatura. Se concluye que, cuando se mueve la partícula, las direcciones de los dos vectores unitarios están en constante cambio.

2. Expresión de la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal. En la sección 11.13 se obtuvo la siguiente ecuación, aplicable al movimiento tanto bidimensional como tridimensional de una partícula:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \qquad (11.39)$$

Las siguientes observaciones posiblemente ayuden a resolver los problemas de esta sección.

a) La componente tangencial de la aceleración mide la razón de cambio de la velocidad: $a_t = dv/dt$. Se deduce que cuando a_t es constante, es posible utilizar las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado con la aceleración igual a a_t. Además, cuando una partícula se mueve a velocidad constante, se tiene que $a_t = 0$ y la aceleración de la partícula se reduce a su componente normal.

b) La componente normal de la aceleración siempre está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria de la partícula, y su magnitud es $a_n = v^2/\rho$. Por consiguiente, la componente normal se determina con facilidad si se conoce la velocidad de la partícula y el radio de curvatura ρ de la trayectoria. De manera inversa, cuando se conoce la velocidad y la aceleración normal de la partícula, es posible obtener el radio de curvatura de la trayectoria al resolver esta ecuación para ρ [problema resuelto 11.11].

c) En el movimiento tridimensional de una partícula, se recurre a un tercer vector unitario, $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$, el cual define la dirección de la *binormal.* En vista de que este vector es perpendicular tanto a la velocidad como a la aceleración, puede obtenerse al escribir

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$$

3. Empleo de las componentes radial y transversal. Estas componentes se utilizan para analizar el movimiento plano de una partícula P, cuando la posición P se define mediante sus coordenadas polares r y θ. Como se muestra en la figura 11.25, el vector unitario $\mathbf{e}_r$, que define la dirección *radial,* se une al punto P y apunta alejándose del punto fijo O, en tanto que el vector unitario $\mathbf{e}_\theta$, que define la dirección *transversal,* se obtiene al rotar 90° $\mathbf{e}_r$ *en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.* La velocidad y la aceleración de la partícula se expresaron en términos de sus componentes radial y transversal en las ecuaciones (11.43) y (11.44), respectivamente. Se puede advertir que las expresiones obtenidas contienen la primera y segunda derivadas con respecto a t de ambas coordenadas r y θ.

En esta lección se encontrarán los siguientes tipos de problemas que implican a las componentes radial y transversal:

a) Tanto r como θ son funciones conocidas de t. En este caso se calcularán la primera y segunda derivadas de r y θ y se sustituyen las expresiones que se obtengan en las ecuaciones (11.43) y (11.44).

b) Existe cierta relación entre r y θ. Primero, es necesario que determine esta relación a partir de la geometría de un sistema dado, y utilizarla para expresar r como una función de θ. Una vez que se conoce la función $r = f(\theta)$, se puede aplicar la regla de la cadena para determinar $\dot{r}$ en términos de θ y $\dot{\theta}$ y $\ddot{r}$ en términos de θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$:

$$\dot{r} = f'(\theta)\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = f''(\theta)\dot{\theta}^2 + f'(\theta)\ddot{\theta}$$

Las expresiones que se obtienen se sustituyen entonces en las ecuaciones (11.43) y (11.44).

c) El movimiento tridimensional de una partícula, como se indicó al final de la sección 11.14, en muchos casos puede describirse de manera eficaz en términos de las *coordenadas cilíndricas* R, θ y z (figura 11.26). Los vectores unitarios deben consistir en $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{k}$. Las componentes correspondientes de la velocidad y la aceleración se indican en las ecuaciones (11.49) y (11.50). Advierta que la distancia radial R siempre se mide en un plano paralelo al plano xy, y tenga cuidado de no confundir el vector de posición $\mathbf{r}$ con su componente radial $R\mathbf{e}_R$.

Problemas

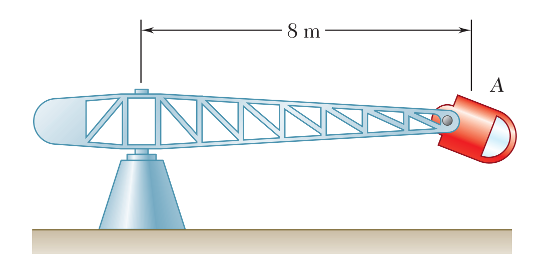


Figura P11.133

11.133 Determine la rapidez periférica de la cabina de pruebas centrífuga *A*, para la cual la componente normal de la aceleración es de 10*g*.

11.134 A fin de probar el desempeño de un automóvil, éste es conducido alrededor de una pista de pruebas circular con diámetro *d*. Determine *a*) el valor de *d* si cuando la rapidez del automóvil es de 72 km/h, la componente normal de la aceleración es de 3.2 m/s^2, *b*) la rapidez del automóvil si $d = 180$ m y se sabe que la componente normal de la aceleración es de 0.6*g*.

11.135 Determine el radio mínimo que debe usarse para una carretera si la componente normal de la aceleración de un automóvil que viaja a 45 mi/h no debe ser mayor que 2.4 ft/s^2.

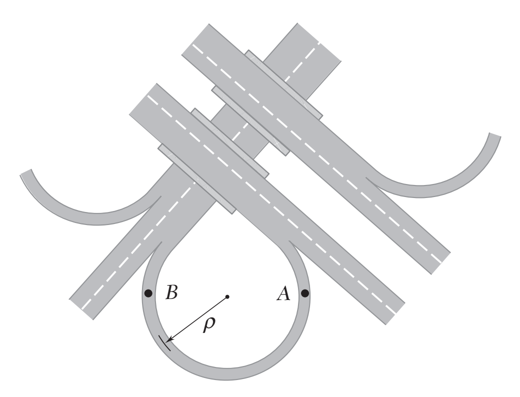


Figura P11.135

11.136 Determine la rapidez máxima que los carros de la montaña rusa pueden alcanzar a lo largo de la porción circular *AB* de la pista, si la componente normal de su aceleración no puede ser mayor que 3*g*.

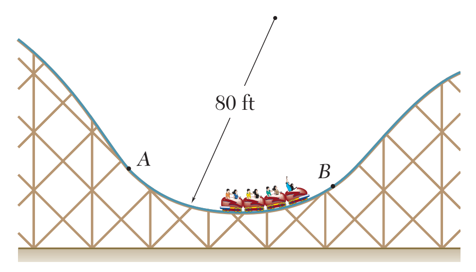


Figura P11.136

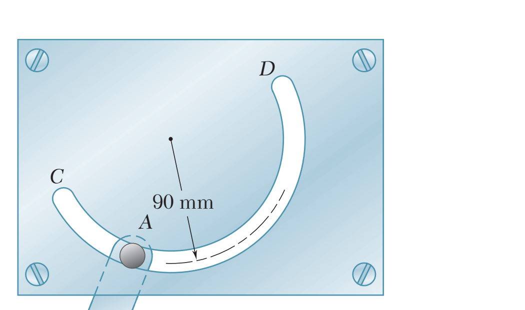


Figura P11.137

11.137 El pasador *A*, que se encuentra unido al eslabón *AB*, está restringido a moverse en la ranura circular *CD*. Si en $t = 0$ el pasador empieza a moverse del reposo de manera que su rapidez aumenta a razón constante de 20 mm/s^2, determine la magnitud de su aceleración total cuando *a*) $t = 0$. *b*) $t = 2$ s.

11.138 Un tren monorriel parte desde el reposo en una curva de 400 m de radio y acelera a una razón constante a_t. Si la aceleración total máxima del tren no debe exceder 1.5 m/s^2, determine *a*) la distancia más corta en la que el tren puede alcanzar una rapidez de 72 km/h, *b*) la razón constante de aceleración a_t correspondiente.

11.139 Una pista al aire libre tiene un diámetro de 420 ft. Una corredora aumenta su rapidez a razón constante desde 14 hasta 24 ft/s en una distancia de 95 ft. Determine la aceleración total de la corredora 2 s después de que empieza a aumentar su rapidez.

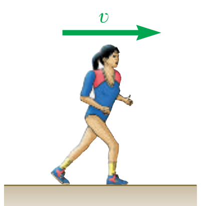


Figura P11.139

11.140 En un instante dado en una carrera de aviones, el avión *A* vuela horizontalmente en línea recta, y su rapidez aumenta a razón de 8 m/s^2. El avión *B* vuela a la misma altura que el avión *A* y, al rodear un pilar, sigue una trayectoria circular de 300 m de radio. Si se sabe que en un instante dado la rapidez de *B* está disminuyendo a razón de 3 m/s^2, determine, para las posiciones mostradas, *a*) la velocidad de *B* relativa a *A*, *b*) la aceleración de *B* en relación con *A*.

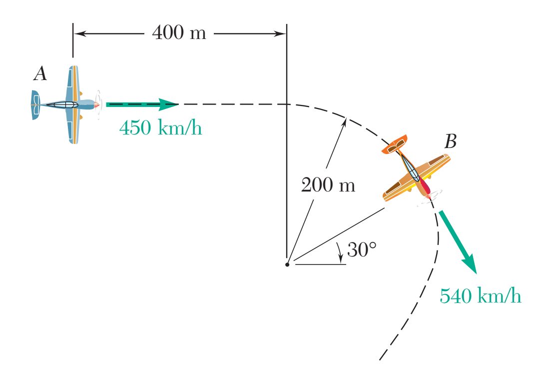


Figura *P11.140*

11.141 Un automovilista que viaja a lo largo de la parte recta de una carretera, está disminuyendo la rapidez de su automóvil a razón constante antes de salir de la carretera por una rampa circular con radio de 560 ft. Continúa desacelerando a la misma tasa constante de manera que 10 s después de entrar a la rampa, su rapidez ha bajado a 20 mi/h, a partir de entonces mantiene dicha rapidez. Si se sabe que a esta rapidez constante la aceleración total del automóvil es igual a un cuarto de su valor antes de entrar a la rampa, determine el valor máximo de la aceleración total del automóvil.

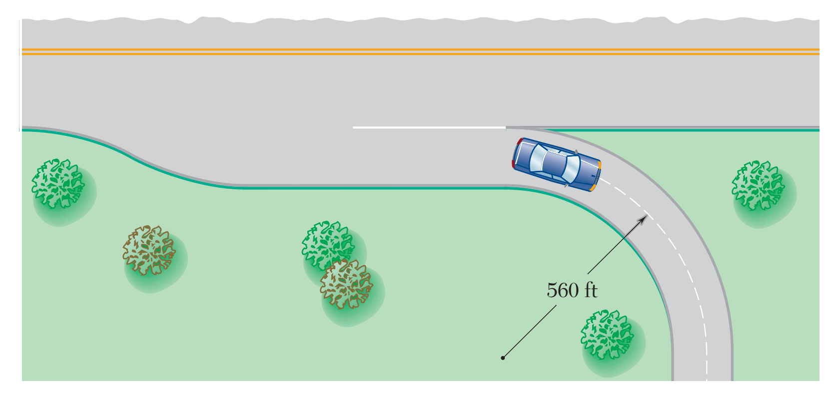


Figura P11.141

11.142 Los automóviles de carreras *A* y *B* se desplazan sobre porciones circulares de una pista de carreras. En el instante que se indica, la rapidez de *A* disminuye a razón de 7 m/s^2 y la rapidez de *B* se incrementa a una tasa de 2 m/s^2. Para las posiciones mostradas, determine *a*) la velocidad de *B* relativa a *A*, *b*) la aceleración de *B* relativa a *A*.

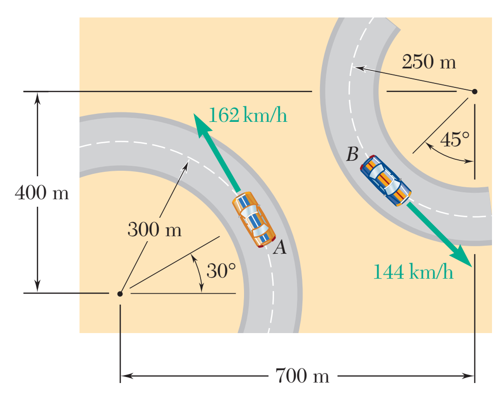


Figura *P11.142*

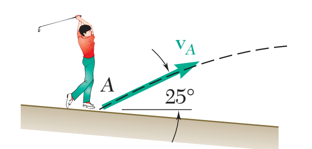


Figura P11.143

11.143 Un golfista golpea una pelota desde el punto *A* con una velocidad inicial de 50 m/s a un ángulo de 25° con la horizontal. Determine el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la pelota *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto más alto de la trayectoria.

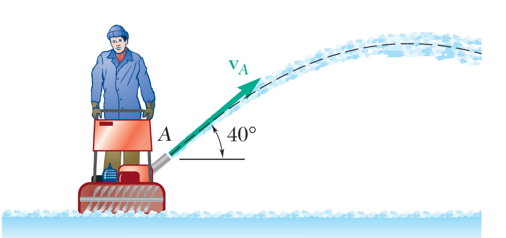


Figura P11.144

11.144 Según la fotografía de un hombre que está utilizando una limpiadora de nieve, se determina que el radio de curvatura de la trayectoria de la nieve era de 8.5 m cuando la nieve salía del tubo de descarga en *A*. Determine, *a*) la velocidad de descarga $\mathbf{v}_A$ de la nieve, *b*) el radio de curvatura de la trayectoria en su altura máxima.

11.145 Un balón de básquetbol es golpeado contra el suelo en el punto *A* y rebota con una velocidad $\mathbf{v}_A$ de magnitud 7.5 ft/s, como se muestra en la figura. Determine el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el balón *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto más alto de la trayectoria.

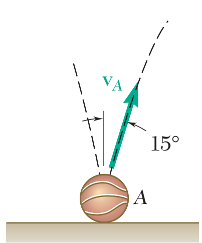


Figura P11.145

11.146 Se descarga carbón desde la puerta trasera de un camión de volteo con una velocidad inicial de $\mathbf{v}_A$ = 6 ft/s ⦣ 50°. Determine el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el carbón *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto de la trayectoria 3 ft por debajo del punto *A*.

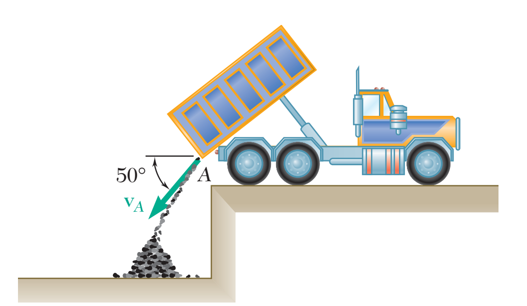


Figura P11.146

11.147 Un tubo horizontal descarga desde el punto A un chorro de agua en un estanque. Exprese el radio de curvatura del chorro en el punto B en términos de las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$.

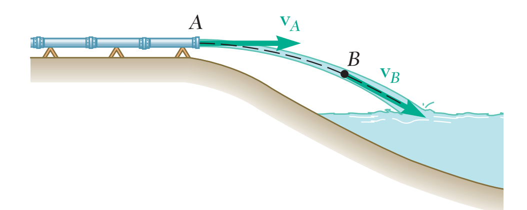


Figura P11.147

11.148 Un niño lanza una pelota desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_A$ de 20 m/s a un ángulo de 25° con la horizontal. Determine la velocidad de la pelota en los puntos de su trayectoria donde el radio de curvatura es igual a tres cuartos de su valor en A.

Figura P11.148

11.149 Se dispara un proyectil desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. *a*) Muestre que el radio de curvatura de la trayectoria del proyectil alcanza su valor mínimo en el punto más alto de la trayectoria, B. *b*) Si se denota mediante θ el ángulo formado por la trayectoria y la horizontal en el punto dado C, muestre que el radio de curvatura de la trayectoria en C es $\rho = \rho_{\text{mín}}/\cos^3\theta$.

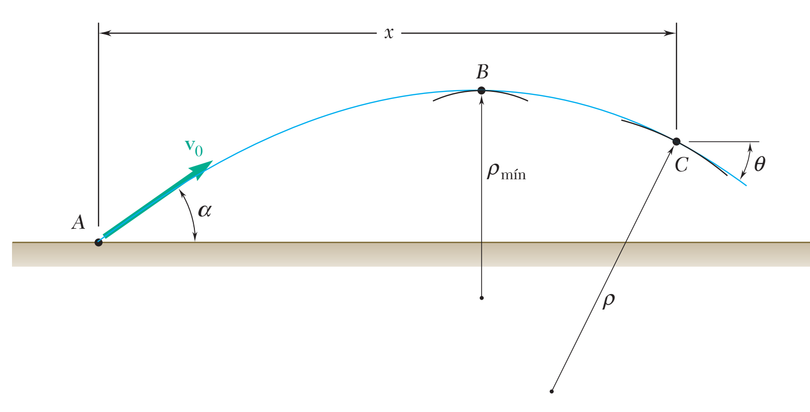


Figura *P11.149* y *P11.150*

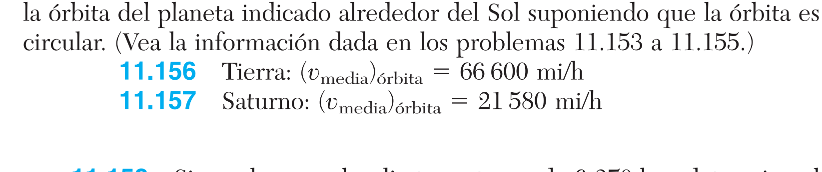
11.150 Se dispara un proyectil desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, la cual forma un ángulo α con la horizontal. Exprese el radio de curvatura de la trayectoria del proyectil en el punto C en términos de x, v_0, α y g.

***11.151** Determine el radio de curvatura de la trayectoria que describe la partícula del problema 11.95 cuando $t = 0$.

***11.152** Determine el radio de curvatura de la trayectoria que describe la partícula del problema 11.96 cuando $t = 0$, $A = 3$ y $B = 1$.

11.153 a 11.155 Un satélite viajará de manera indefinida en una órbita circular alrededor de un planeta si la componente normal de la aceleración del satélite es igual a $g(R/r)^2$, donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta, R es el radio del planeta, y r es la distancia desde el centro del planeta al satélite. Determine la rapidez de un satélite relativa al planeta indicado, si el satélite se desplaza de manera indefinida en una órbita circular a 160 km sobre la superficie del planeta.

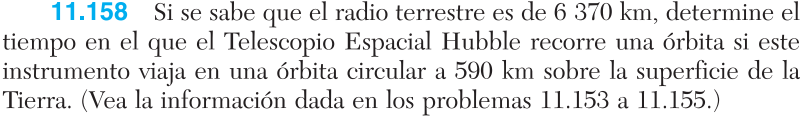
11.153 Venus: $g = 8.53$ m/s^2, $R = 6\,161$ km.
11.154 Marte: $g = 3.83$ m/s^2, $R = 3\,332$ km.
11.155 Júpiter: $g = 26.0$ m/s^2, $R = 69\,893$ km.



11.156 y 11.157 Si el diámetro del Sol es de 864 000 mi y la aceleración de la gravedad en su superficie es de 900 ft/s^2, determine el radio de la órbita del planeta indicado alrededor del Sol suponiendo que la órbita es circular. (Vea la información dada en los problemas 11.153 a 11.155.)

11.156 Tierra: $(v_{\text{media}})_{\text{órbita}} = 66\,600$ mi/h

11.157 Saturno: $(v_{\text{media}})_{\text{órbita}} = 21\,580$ mi/h



11.158 Si se sabe que el radio terrestre es de 6 370 km, determine el tiempo en el que el Telescopio Espacial Hubble recorre una órbita si este instrumento viaja en una órbita circular a 590 km sobre la superficie de la Tierra. (Vea la información dada en los problemas 11.153 a 11.155.)

11.159 Un satélite viaja en una órbita circular alrededor de Marte a una altura de 180 mi. Después de que se ajusta la altura del satélite, se descubre que el tiempo de una órbita ha aumentado 10 por ciento. Si se sabe que el radio de Marte es 2 071 mi, determine la nueva altura del satélite. (Vea la información dada en los problemas 11.153 a 11.155.)

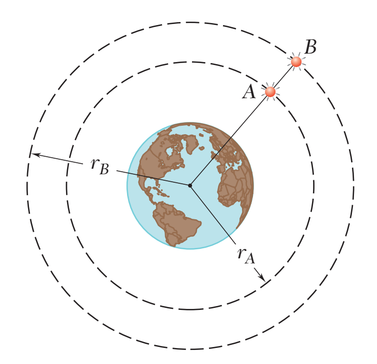


Figura *P11.160*

11.160 Los satélites A y B viajan en el mismo plano en órbitas circulares alrededor de la Tierra en alturas, respectivamente, de 120 y 200 mi. Si en $t = 0$ los satélites están alineados en la forma que se muestra, y se sabe que el radio terrestre es $R = 3\,960$ mi, determine cuándo los satélites volverán a estar alineados radialmente. (Vea la información dada en los problemas 11.53 a 11.55.)

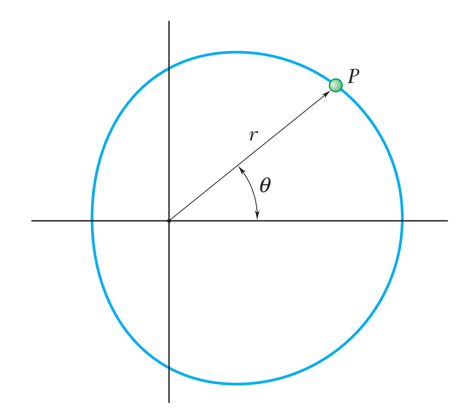


Figura P11.161

11.161 La trayectoria de una partícula P es un caracol. El movimiento de la partícula está definido por las relaciones $r = b(2 + \cos \pi t)$ y $\theta = \pi t$, donde t y θ se expresan en segundos y radianes, respectivamente. Determine *a*) la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s, *b*) los valores de θ para los cuales la velocidad es máxima.

11.162 El movimiento en dos dimensiones de una partícula se define por medio de las relaciones $r = 2b \cos \omega t$ y $\theta = \omega t$, donde b y ω son constantes. Determine *a*) la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier instante, *b*) el radio de curvatura de su trayectoria. ¿A qué conclusión puede llegarse respecto a la trayectoria de la partícula?

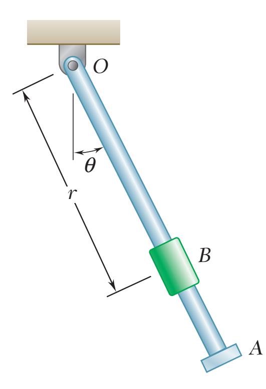


Figura P11.163 y *P11.164*

11.163 La rotación de la varilla OA alrededor de O se define por medio de la relación $\theta = \pi(4t^2 - 8t)$, donde θ y t se expresan en radianes y segundos, respectivamente. El collarín B se desliza a lo largo de la varilla de manera que su distancia desde O es $r = 10 + 6 \operatorname{sen} \pi t$, donde r y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Cuando $t = 1$ s, determine *a*) la velocidad del collarín, *b*) la aceleración total del collarín, *c*) la aceleración del collarín relativa a la varilla.

11.164 La oscilación de la varilla OA alrededor de O se define por medio de la relación $\theta = (2/\pi)(\operatorname{sen} \pi t)$, donde θ y t se expresan en radianes y segundos, respectivamente. El collarín B se desliza a lo largo de la varilla de manera que su distancia desde O es $r = 25/(t + 4)$, donde r y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Cuando $t = 1$ s, determine *a*) la velocidad del collarín, *b*) la aceleración total del collarín, *c*) la aceleración del collarín relativa a la varilla.

11.165 El movimiento de la partícula P es la elipse definida por las relaciones $r = 2/(2 - \cos \pi t)$ y $\theta = \pi t$, donde r se expresa en metros, θ en radianes y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 0.5$ s.

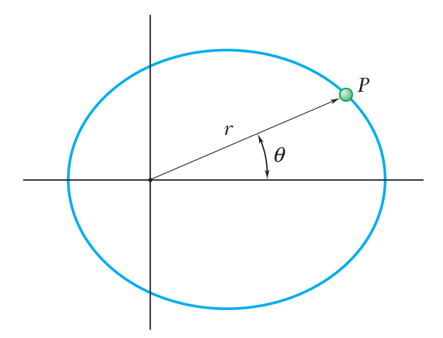


Figura P11.165

11.166 El movimiento bidimensional de una partícula se define por las relaciones $r = 2a \cos \theta$ y $\theta = bt^2/2$, donde a y b son constantes. Determine *a*) las magnitudes de la velocidad y de la aceleración en cualquier instante, *b*) el radio de curvatura de la trayectoria. ¿A qué conclusión puede llegarse en cuanto a la trayectoria de la partícula?

11.167 Para estudiar el desempeño de un automóvil de carreras, una cámara de movimiento a alta velocidad se ubica en el punto A y se monta sobre un mecanismo que permite registrar el movimiento del automóvil cuando éste se desplaza en el tramo recto BC. Determine la rapidez del automóvil en términos de b, θ y $\dot{\theta}$.

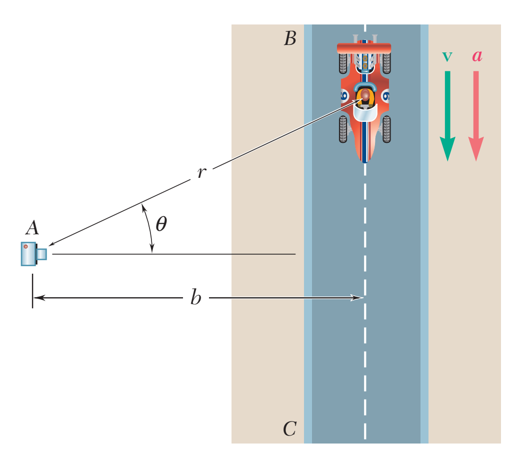


Figura *P11.167*

11.168 Determine la magnitud de la aceleración del automóvil de carreras del problema 11.167 en términos de b, θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

11.169 Después de despegar, un helicóptero asciende en línea recta en un ángulo constante β. Un radar sigue su vuelo desde el punto A. Determine la rapidez del helicóptero en términos de d, β, θ y $\dot{\theta}$.

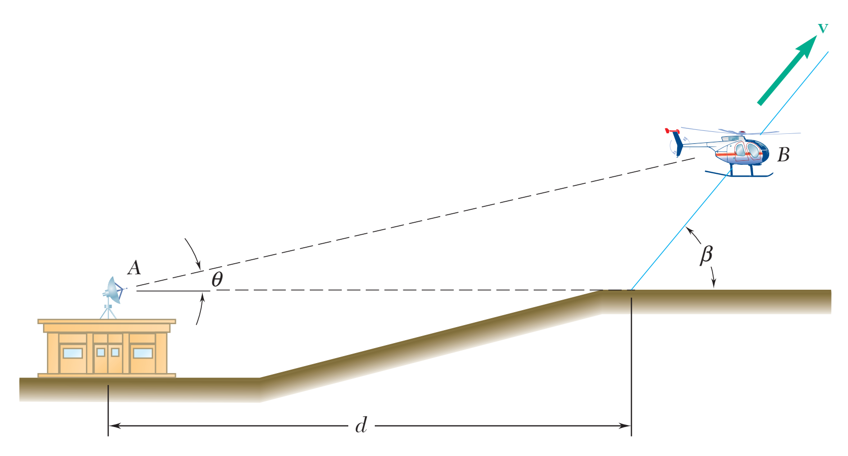


Figura P11.169

***11.170** El pasador P está unido a la varilla BC y se desliza libremente en la ranura de la varilla OA. Determine la razón de cambio $\dot{\theta}$ del ángulo θ, si se sabe que BC se mueve a una rapidez constante v_0. Exprese su respuesta en términos de v_0, h, β y θ.

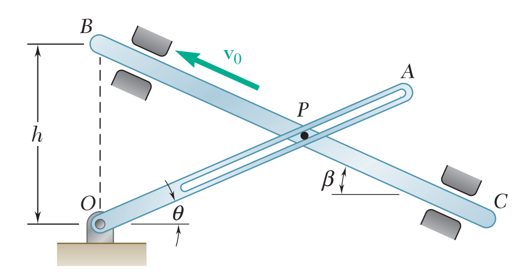


Figura P11.170

11.171 Para el automóvil de carreras del problema 11.167, se encontró que éste tardaba 0.5 s en pasar de la posición $\theta = 60°$ a la posición $\theta = 35°$. Si se sabe que $b = 25$ m, determine la rapidez promedio del carro durante el intervalo de 0.5 s.

11.172 Para el helicóptero del problema 11.169, se encontró que cuando éste se ubicaba en B, su distancia y ángulo de elevación era $r = 3\,000$ ft y $\theta = 20°$, respectivamente. Cuatro segundos después, la estación del radar ubicó al helicóptero en $r = 3\,320$ ft y $\theta = 23.1°$. Determine la rapidez promedio y el ángulo de ascenso β del helicóptero durante el intervalo de 4 s.

11.173* y *11.174 Una partícula se mueve a lo largo de la espiral que se muestra en las figuras; determine la magnitud de la velocidad de la partícula en términos de b, θ y $\dot{\theta}$.

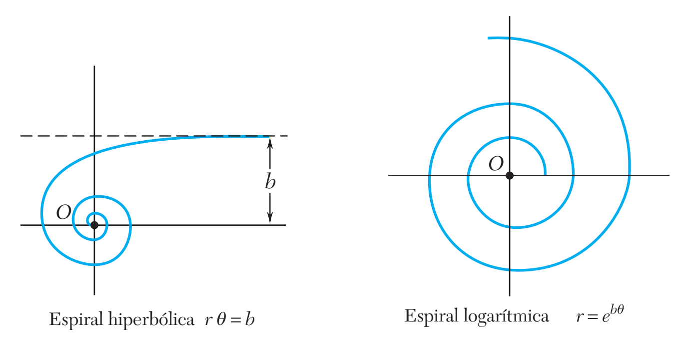


Figura *P11.173* y P11.175 **Figura *P11.174* y P11.176**

11.175 y 11.176 Una partícula se mueve a lo largo de la espiral que se muestra en la figura. Si se sabe que $\dot{\theta}$ es constante y se denota dicha constante mediante ω, determine la magnitud de la aceleración de la partícula en términos de b, θ y ω.

11.177 Muestre que $\dot{r} = h\dot{\phi}$ sen θ si en el instante mostrado, el escalón AB de la escaladora está girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a una razón constante $\dot{\phi}$.

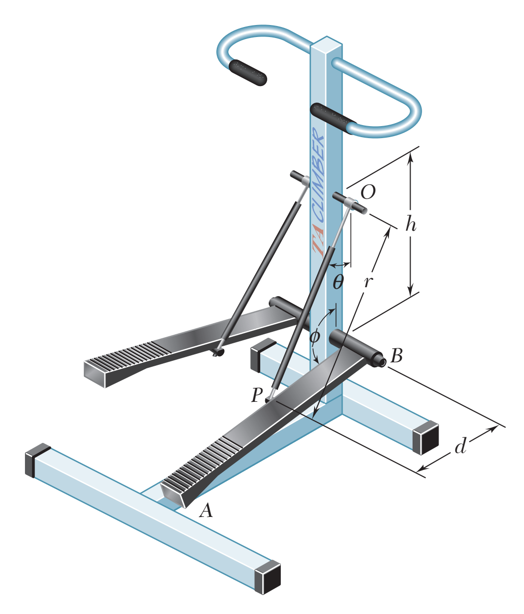


Figura P11.177

11.178 El movimiento de una partícula sobre la superficie de un cilindro circular se define por medio de las relaciones $R = A$, $\theta = 2\pi t$ y $z = At^2/4$, donde A es una constante. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo t.

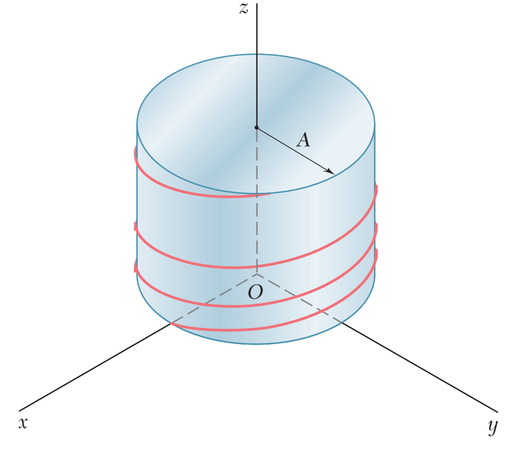


Figura *P11.178*

11.179 El movimiento tridimensional de una partícula se define por medio de las coordenadas cilíndricas (vea la figura 11.26) $R = A/(t + 1)$, $\theta = Bt$ y $z = Ct/(t + 1)$. Determine la magnitudes de la velocidad y de la aceleración cuando $a)$ $t = 0$, $b)$ $t = \infty$.

***11.180** Para la hélice cónica del problema 11.95, determine el ángulo que forma el plano oscilante con el eje y.

***11.181** Determine la dirección de la binormal de la trayectoria descrita por la partícula del problema 11.96, cuando $a)$ $t = 0$, $b)$ $t = \pi/2$ s.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 11

Coordenada de posición de una partícula en movimiento rectilíneo

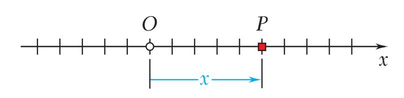


Figura 11.27

En la primera mitad del capítulo se analizó el *movimiento rectilíneo de una partícula*, esto es, el movimiento de la partícula a lo largo de una línea recta. Para definir la posición P de la partícula sobre esa línea se elige un origen fijo, O, y una dirección positiva (figura 11.27). La distancia x desde O hasta P, con el signo apropiado, define por completo la posición de la partícula sobre la línea y recibe el nombre de *coordenada de posición* de la partícula [sección 11.2].

Velocidad y aceleración en movimiento rectilíneo

Se demostró que la *velocidad* v de la partícula era igual a la derivada respecto al tiempo de la coordenada de posición x,

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{11.1}$$

y la *aceleración* a se obtuvo diferenciando v con respecto a t,

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.2}$$

o

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.3}$$

También se señaló que a podría expresarse como

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{11.4}$$

Se observó que la velocidad v y la aceleración a se representarán mediante números algebraicos que pueden ser positivos o negativos. Un valor positivo de v indica que la partícula se mueve en dirección positiva, y un valor negativo que lo hace en dirección negativa. Sin embargo, un valor positivo para a tal vez signifique que la partícula realmente está acelerada (esto es, se mueve más rápido) en dirección positiva, o que está desacelerada (esto es, que se mueve con mayor lentitud) en dirección negativa. Un valor negativo para a está sujeto a una interpretación similar [problema resuelto 11.1].

Determinación de la velocidad y la aceleración mediante integración

En la mayoría de los problemas, las condiciones de movimiento de una partícula se definen mediante el tipo de aceleración que ésta posee y por medio de las condiciones iniciales [sección 11.3]. La velocidad y posición de la partícula pueden obtenerse entonces integrando dos de las ecuaciones (11.1) a (11.4). Cuál de ellas seleccionar depende del tipo de aceleración implicada [problemas resueltos 11.2 y 11.3].

Movimiento rectilíneo uniforme

A menudo se encuentran dos tipos de movimiento: el *movimiento rectilíneo uniforme* [sección 11.4], en el cual la velocidad v de la partícula es constante y

$$x = x_0 + vt \qquad (11.5)$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

y el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* [sección 11.5], en el cual la aceleración a de la partícula es constante y se tiene

$$v = v_0 + at \qquad (11.6)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad (11.7)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (11.8)$$

Movimiento relativo de dos partículas

Cuando dos partículas A y B se mueven a lo largo de la misma línea recta, es probable que nos interese considerar el *movimiento relativo* de B con respecto a A

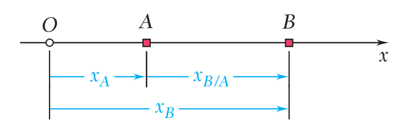


Figura 11.28

[sección 11.6]. Si se denota mediante $x_{B/A}$ la *coordenada de posición relativa* de B con respecto a A (figura 11.28), se tiene

$$x_B = x_A + x_{B/A} \qquad (11.9)$$

Al diferenciar la ecuación (11.9) dos veces con respecto a t, se obtiene sucesivamente

$$v_B = v_A + v_{B/A} \qquad (11.10)$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \qquad (11.11)$$

donde $v_{B/A}$ y $a_{B/A}$ representan, respectivamente, la *velocidad relativa* y la *aceleración relativa* de B con respecto a A.

Bloques conectados mediante cuerdas de longitud constante

Cuando varios bloques se *conectan mediante cuerdas de longitud constante,* es posible escribir una *relación lineal* entre sus coordenadas de posición. Es posible escribir entonces relaciones similares entre sus velocidades y entre sus aceleraciones que se usan para analizar su movimiento [problema resuelto 11.5].

Soluciones gráficas

En ocasiones resulta conveniente utilizar una *solución gráfica* para problemas que implican el movimiento rectilíneo de una partícula [secciones 11.7 y 11.8]. La solución gráfica que se usa de manera más común incluye a las curvas x-t, v-t y a-t [sección 11.7; problema resuelto 11.6]. Se demostró que, a cualquier tiempo t,

$$v = \text{pendiente de la curva } x\text{-}t$$
$$a = \text{pendiente de la curva } v\text{-}t$$

en tanto que, sobre cualquier intervalo de tiempo dado de t_1 a t_2,

$$v_2 - v_1 = \text{área bajo la curva } a\text{-}t$$
$$x_2 - x_1 = \text{área bajo la curva } v\text{-}t$$

Vector de posición y velocidad en movimiento curvilíneo

En la segunda mitad del capítulo se estudió el *movimiento curvilíneo de una partícula*, es decir, el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva. La posición P de la partícula en cualquier tiempo dado [sección 11.9] se definió por medio del *vector de posición* $\mathbf{r}$ que une al origen O de las coordenadas y al punto P (fi-

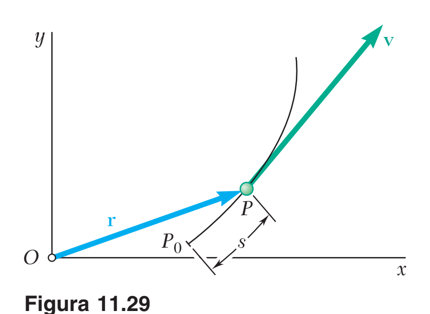


Figura 11.29

gura 11.29). La *velocidad* **v** de la partícula se definió mediante la relación

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{11.15}$$

y se encontró que era un *vector tangente a la trayectoria de la partícula* y de magnitud v (denominada *rapidez* de la partícula) igual a la derivada en el tiempo de la longitud s del arco descrito por la partícula:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$

Aceleración en movimiento curvilíneo

La *aceleración* **a** de la partícula se definió mediante la relación

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.18}$$

y se señaló que, en general, *la aceleración no es tangente a la trayectoria de la partícula.*

Derivada de una función vectorial

Antes de proceder a la consideración de las componentes de velocidad y aceleración, se estudió la definición formal de la derivada de una función vectorial y se establecieron algunas reglas que gobiernan la diferenciación de sumas y productos de funciones vectoriales. Después se mostró que la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y con respecto a un sistema de referencia en traslación [sección 11.10].

Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

Al denotar mediante x, y y z las coordenadas rectangulares de una partícula P, se encontró que las componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración de P resultan iguales, respectivamente, a la primera y segunda derivadas con respecto a t de las coordenadas correspondientes:

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$
$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

Movimientos de las componentes

Cuando la componente a_x de la aceleración depende únicamente de t, x, y/o v_x, y cuando de manera similar a_y depende sólo de t y/o v_y, y a_z de t, z y/o v_z, las ecuaciones (11.30) se integran de forma independiente. El análisis del movimiento curvilíneo dado se reduce de ese modo al análisis de tres movimientos de componentes rectilíneas independientes [sección 11.11]. Este enfoque es en particular efectivo en el estudio del movimiento de proyectiles [problemas resueltos 11.7 y 11.8].

Movimiento relativo de dos partículas

En el caso de dos partículas A y B que se mueven en el espacio (figura 11.30), consideramos el movimiento relativo de B con respecto a A, o más precisamente, con respecto al sistema de referencia en movimiento unido A y en traslación con A [sección 11.12]. Al denotar mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el *vector de posición relativa* de B con respecto a A (figura 11.30), se obtuvo

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{11.31}$$

Al denotar con $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_{B/A}$, respectivamente, la *velocidad relativa* y la *aceleración relativa* de B con respecto a A, se demostró también que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{11.33}$$

y

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{11.34}$$

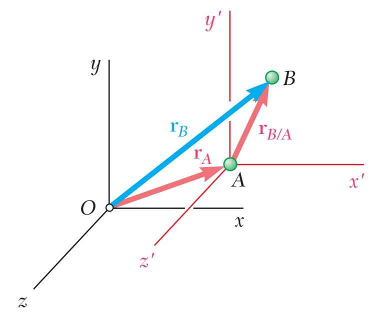


Figura 11.30

Algunas veces es conveniente descomponer la velocidad y la aceleración de una partícula P en componentes diferentes a las rectangulares x, y y z. En el caso de una partícula P que se mueve a lo largo de la trayectoria contenida en un plano, se unen a P los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ tangente a la trayectoria y $\mathbf{e}_n$ normal a la trayectoria y dirigido hacia el centro de curvatura de la misma [sección 11.13]. Se expresa entonces la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de las componentes tangencial y normal. Se escribe

Componentes tangencial y normal

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{11.36}$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.39}$$

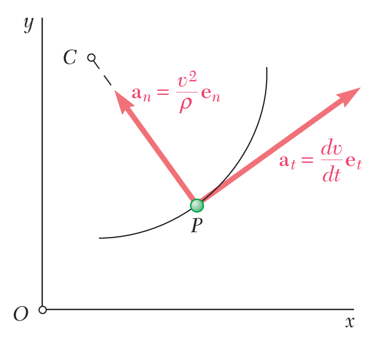


Figura 11.31

donde v es la rapidez de la partícula y ρ el radio de curvatura de su trayectoria [problemas resueltos 11.10 y 11.11]. Se observa que mientras la velocidad $\mathbf{v}$ está dirigida a lo largo de la tangente a la trayectoria, la aceleración $\mathbf{a}$ consta de una componente $\mathbf{a}_t$ dirigida a lo largo de la tangente a la trayectoria y de una componente $\mathbf{a}_n$ que apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria (figura 11.31).

Movimiento a lo largo de una curva espacial

Para una partícula P que se mueve a lo largo de una curva en el espacio, se definió el plano que se ajusta mejor a la curva en la vecindad de P como el *plano osculador.* Este plano contiene a los vectores unitarios $\mathbf{e}_t$ y $\mathbf{e}_n$ que define, respectivamente, la tangente y la normal principal a la curva. El vector unitario $\mathbf{e}_b$ que es perpendicular al plano osculador define la *binormal.*

Componentes radial y transversal

Cuando la posición de una partícula P que se mueve en un plano se define mediante sus coordenadas polares r y θ, es conveniente utilizar las componentes radial y transversal dirigidas, respectivamente, a lo largo del vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula y en la dirección obtenida al rotar $\mathbf{r}$ 90° en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj [sección 11.14]. Se unen a P los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ dirigidos, respectivamente, en las direcciones radial y transversal (figura 11.32). Después se expresa la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de componentes radial y transversal

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.43}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{11.44}$$

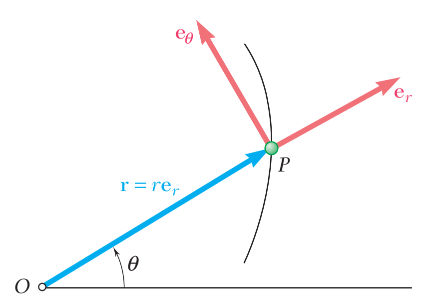


Figura 11.32

donde los puntos se usan para indicar diferenciación con respecto al tiempo. Las componentes escalares de la velocidad y la aceleración en las direcciones radial y transversal son en consecuencia

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{11.45}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{11.46}$$

Es importante observar que a_r *no* es igual a la derivada en el tiempo de v_r, y que a_θ *no* es igual a la derivada en el tiempo de v_θ [problema resuelto 11.12].

El capítulo finaliza con el estudio del uso de las coordenadas cilíndricas para definir la posición y el movimiento de una partícula en el espacio.

Problemas de repaso

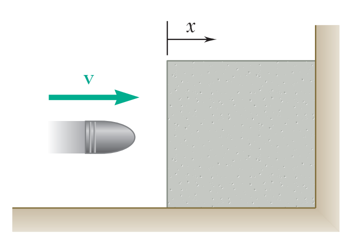


Figura P11.184

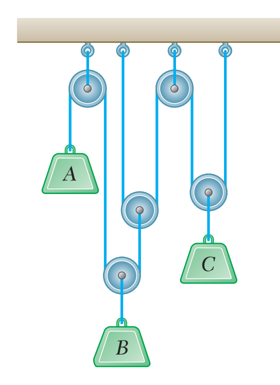


Figura P11.186

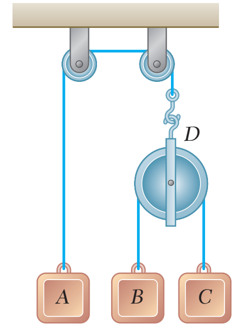


Figura P11.187

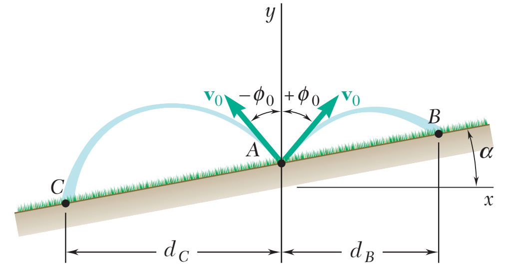


Figura *P11.188*

11.182 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$ donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine *a*) cuándo la velocidad es cero, *b*) la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es cero.

11.183 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -60x^{-1.5}$, donde a y x se expresan en m/s^2 y metros, respectivamente. Si se sabe que la partícula comienza a moverse sin velocidad inicial en $x = 4$ m, determine la velocidad de la partícula cuando *a*) $x = 2$ m, *b*) $x = 1$ m, *c*) $x = 100$ mm.

11.184 Un proyectil entra a un medio resistivo en $x = 0$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 900$ ft/s y recorre 4 in. antes de quedar en reposo. Si se supone que la velocidad del proyectil se define mediante la relación $v = v_0 - kx$, donde v se expresa en ft/s y x en ft, determine *a*) la aceleración inicial del proyectil, *b*) el tiempo requerido para que el proyectil penetre una distancia de 3.9 in. en el medio resistivo.

11.185 Un elevador de carga que se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 6 ft/s pasa a un elevador de pasajeros que está detenido. Cuatro segundos después, el elevador de pasajeros comienza su movimiento ascendente con una aceleración constante de 2.4 ft/s^2. Determine *a*) cuándo y dónde los elevadores estarán a la misma altura, *b*) la rapidez del elevador de pasajeros en ese momento.

11.186 El bloque C inicia su movimiento desde el reposo en $t = 0$ y se mueve hacia arriba con una aceleración constante de 25 mm/s^2. Si se sabe que el bloque A se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 75 mm/s, determine *a*) el tiempo en el que la velocidad del bloque B es cero, *b*) la posición correspondiente del bloque B.

11.187 Los tres bloques mostrados se mueven a velocidades constantes. Encuentre la velocidad de cada bloque, si se sabe que la velocidad relativa de A con respecto a C es de 300 mm/s hacia arriba y que la velocidad relativa de B con respecto a A es de 200 mm/s hacia abajo.

11.188 Un rociador oscilante de agua se opera en el punto A sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. El rociador descarga agua con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a un ángulo ϕ con la vertical, el cual varía de $-\phi_0$ a $+\phi_0$. Si se sabe que $v_0 = 30$ ft/s, $\phi_0 = 40°$ y $\alpha = 10°$, determine la distancia horizontal entre el rociador y los puntos B y C que delimitan el área regada.

11.189 Cuando el conductor de un automóvil viaja hacia el norte a 25 km/h dentro de un estacionamiento, observa que un camión se acerca desde el noroeste. Luego de reducir su rapidez a 15 km/h y dar la vuelta de manera que ahora viaja en dirección noroeste, el camión parece aproximarse desde el oeste. Si se supone que la velocidad del camión es constante durante ese periodo de observación, determine la magnitud y la dirección de la velocidad del camión.

11.190 La conductora de un automóvil reduce su rapidez a una razón constante desde 45 hasta 30 mi/h, en una distancia de 750 ft a lo largo de una curva con 1 500 ft de radio. Determine la magnitud de la aceleración total del automóvil después de que ha recorrido 500 ft a lo largo de la curva.

11.191 Un hombre utiliza una barredora de nieve para limpiar el acceso a su garaje. Si la nieve se descarga a un ángulo promedio 40° con la horizontal determine la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la nieve.

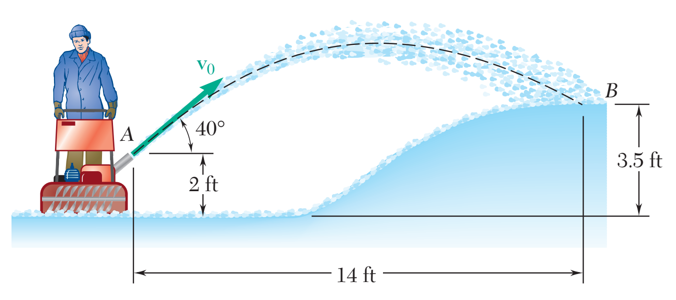


Figura *P11.191*

11.192 A partir de mediciones de un fotógrafo, se ha encontrado que cuando el chorro de agua salió de la boquilla A, tenía un radio de curvatura de 25 m. Determine *a*) la velocidad inicial $\mathbf{v}_A$ del chorro, *b*) el radio de curvatura del chorro cuando alcanzó su máxima altura en B.

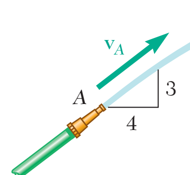


Figura *P11.192*

11.193 En la parte más baja de su trayectoria en el plano vertical, un avión tiene una velocidad horizontal de 150 m/s y está acelerando a razón de 25 m/s^2. El radio de curvatura de la trayectoria es de 2 000 m. El avión es rastreado por el radar en O. ¿Cuáles son los valores registrados de $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ para este instante?

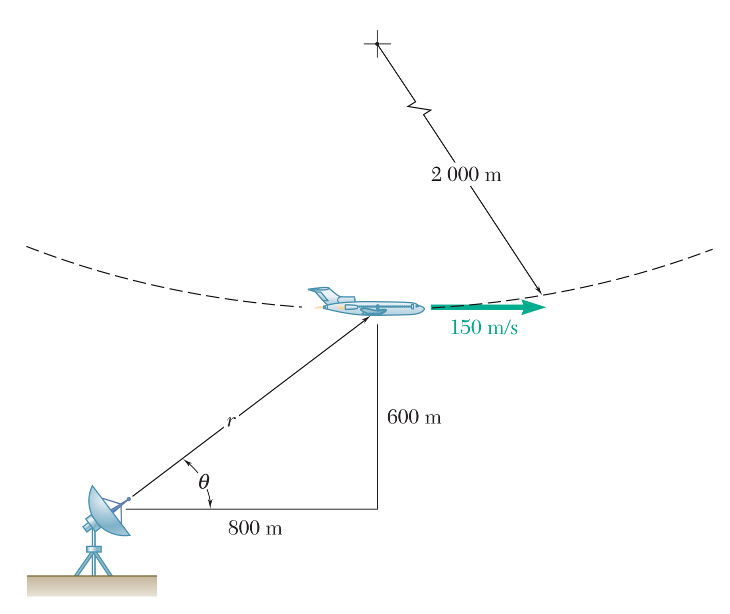


Figura P11.193

Problemas de computadora

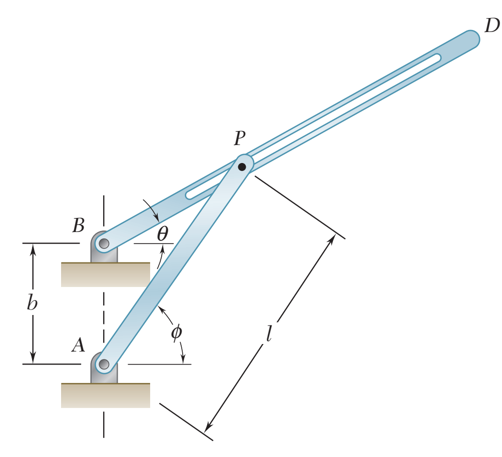


Figura P11.C1

11.C1 El mecanismo que se muestra en la figura se conoce como mecanismo de retorno rápido de Whitworth. La varilla de entrada *AP* gira a una razón constante $\dot{\phi}$ y el pasador *P* tiene la libertad de deslizarse en la ranura de la varilla de salida *BD*. Use software para graficar θ en función de ϕ y $\dot{\theta}$ en función de ϕ para una revolución de la varilla *AP*. Suponga que $\dot{\phi} = 1$ rad/s, $l = 4$ in. y *a*) $b = 2.5$ in., *b*) $b = 3$ in., *c*) $b = 3.5$ in.

11.C2 Una pelota se deja caer con una velocidad $\mathbf{v}_0$ a un ángulo α con la vertical sobre el escalón superior de una escalera que consta de 8 escalones. La pelota rebota hacia abajo por los escalones, como se muestra en la figura. Cada vez que la pelota rebota, en los puntos *A*, *B*, *C*, . . . , la componente horizontal de su velocidad permanece constante y la magnitud de la componente vertical de su velocidad se reduce en un porcentaje *k*. Use software para determinar *a*) si la pelota baja por las escaleras sin saltarse ningún escalón, *b*) si la pelota baja por las escaleras sin rebotar dos veces en un mismo escalón, *c*) el primer escalón sobre el que la pelota rebota dos veces. Use valores de v_0 desde 1.8 m/s hasta 3.0 m/s con incrementos de 0.6 m/s, valores de α desde 18° hasta 26° con incrementos de 4°, y valores de *k* iguales a 40 y 50.

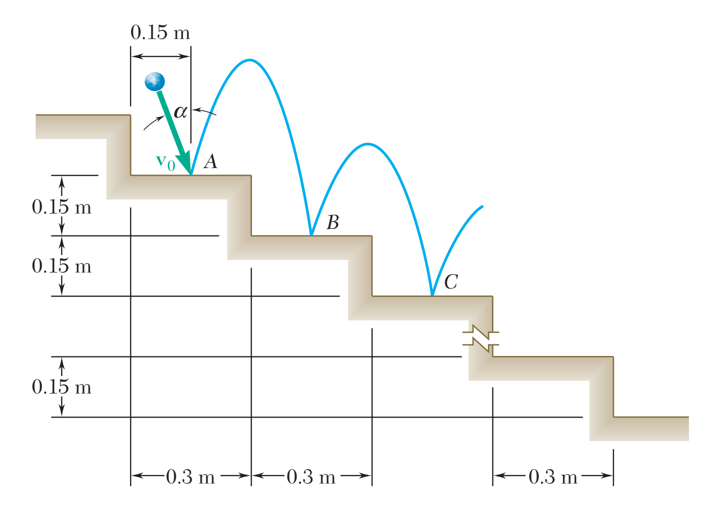


Figura P11.C2

11.C3 En un parque de diversiones, el "avión" A está unido a un elemento rígido OB de 10 m de largo. Para operar el juego mecánico, el avión y OB se giran de manera que $70° \leq \theta_0 \leq 130°$ y luego se deja oscilar libremente alrededor de O. El avión está sujeto a la aceleración de la gravedad y a la desaceleración debida a la resistencia del aire, $-kv^2$, la cual actúa en dirección opuesta a la de su velocidad $\mathbf{v}$. Ignorando la masa y el arrastre aerodinámico de OB y la fricción del cojinete en O, utilice software para determinar la rapidez del avión correspondiente a los valores de θ_0 y θ y el valor de θ para el cual el avión quedará en reposo después de que se suelta. Use valores de θ_0 desde 70° hasta 130° en incrementos de 30° y determine la velocidad máxima del avión y los primeros dos valores de θ para los cuales $v = 0$. Para cada valor de θ_0, considere que *a*) $k = 0$, *b*) $k = 2 \times 10^{-4}$ m^{-1}, *d*) $k = 4 \times 10^{-2}$ m^{-1}. (*Sugerencia*: Exprese la aceleración tangencial del avión en términos de g, k y θ. Recuerde que $v_\theta = r\dot{\theta}$.)

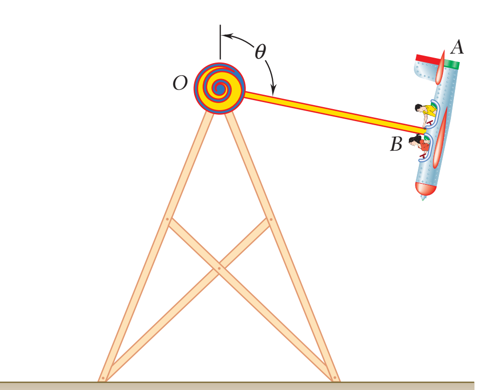


Figura P11.C3

11.C4 Un automovilista que viaja por carretera a una rapidez de 60 mi/h toma una rampa de salida cubierta de hielo. Con la intención de detenerse, aplica los frenos hasta que su automóvil queda en reposo. Si se sabe que la magnitud de la aceleración total del automóvil no puede exceder 10 ft/s^2, use software para determinar el tiempo mínimo requerido para que el automóvil quede en reposo y la distancia que recorre sobre la rampa de salida, si la rampa *a*) es recta, *b*) tiene un radio de curvatura constante de 800 ft. Resuelva cada inciso suponiendo que el conductor aplica sus frenos de forma que dv/dt, durante cada intervalo de tiempo, 1) permanece constante, 2) varía linealmente.

11.C5 Un rociador de jardín oscilante descarga agua con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de 10 m/s. *a*) Si se sabe que los lados del quiosco $BCDE$ son abiertos, pero no así su techo, use software para calcular la distancia d al punto F que será regada para valores de α desde 20° hasta 80°. *b*) Determine el valor máximo de d y el valor correspondiente de α.

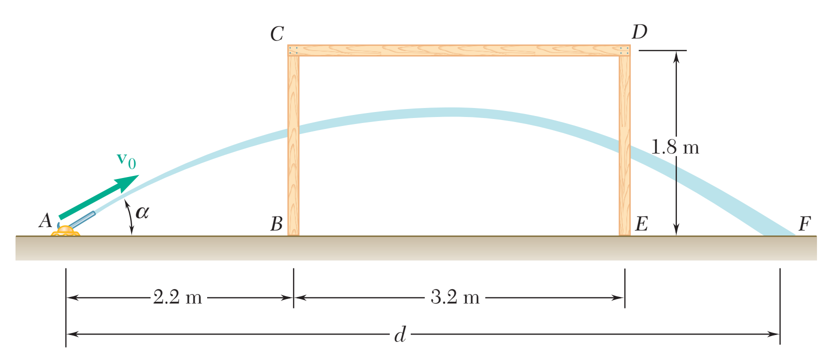


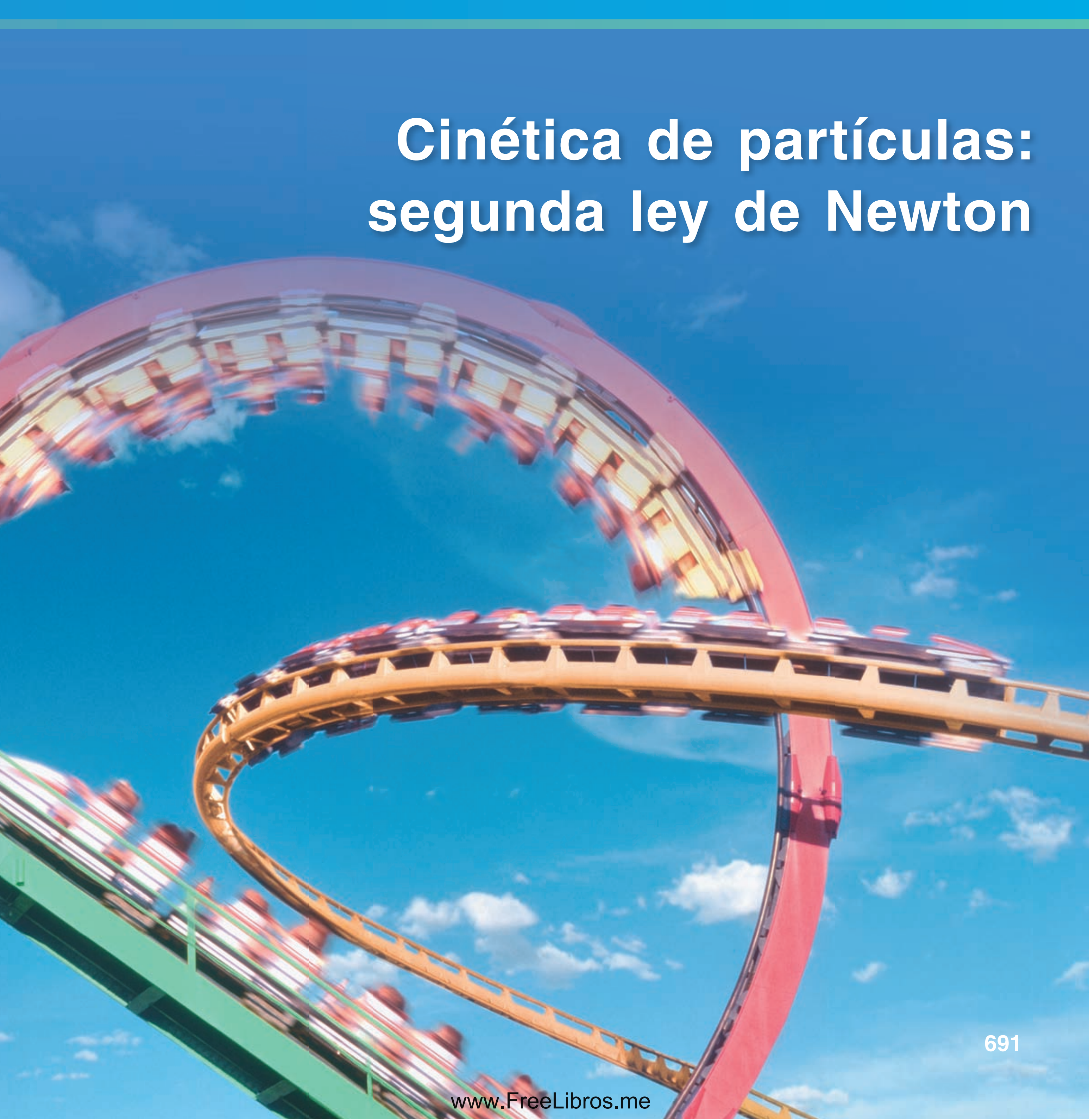
Figura P11.C5

Las fuerzas que experimentan los pasajeros de una montaña rusa dependerán de que el vagón viaje hacia arriba o hacia abajo, en línea recta o a lo largo de una trayectoria curva vertical u horizontal. En este capítulo se estudiará la relación existente entre fuerza, masa y aceleración.



CAPÍTULO 12

Cinética de partículas: segunda ley de Newton



CAPÍTULO 12 CINÉTICA DE PARTÍCULAS: SEGUNDA LEY DE NEWTON

12.1. INTRODUCCIÓN

La primera y la tercera leyes de Newton del movimiento se emplearon de manera amplia en estática para estudiar cuerpos en reposo y las fuerzas que actúan sobre ellos. Estas dos leyes también se utilizan en dinámica; en realidad, son suficientes para el estudio del movimiento de cuerpos que no tienen aceleración. Sin embargo, cuando los cuerpos están acelerados, esto es, cuando cambia la magnitud o la dirección de su velocidad, es necesario recurrir a la segunda ley de movimiento de Newton para relacionar el movimiento del cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él.

En este capítulo se estudiará la segunda ley de Newton y se aplicará al análisis del movimiento de partículas. Como se establece en la sección 12.2, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula no es cero, ésta tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante. Además, es posible utilizar el cociente entre las magnitudes de la fuerza resultante y de la aceleración para definir la *masa* de la partícula.

En la sección 12.3 se define la *cantidad de movimiento lineal* de una partícula como el producto $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ de la masa m y la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula, y se demuestra que la segunda ley de Newton puede expresarse en una forma alternativa que relaciona la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal con la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

La sección 12.4 subraya la necesidad de unidades consistentes en la solución de problemas dinámicos y ofrece un repaso del Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI) y el sistema de uso común en Estados Unidos.

En las secciones 12.5 y 12.6 y en los problemas resueltos que siguen se aplica la segunda ley de Newton a la solución de problemas de ingeniería, utilizando componentes rectangulares o componentes tangenciales y normales de las fuerzas y las aceleraciones implicadas. Hay que recordar que en un cuerpo real, incluidos cuerpos tan grandes como un automóvil, un cohete o un aeroplano, pueden considerarse como partícula con el fin de analizar su movimiento mientras sea posible ignorar el efecto de una rotación del cuerpo alrededor de su centro de masa.

La segunda parte del capítulo se dedica a la solución de problemas en términos de las componentes radial y transversal, subrayando de manera particular el movimiento de la partícula bajo una fuerza central. En la sección 12.7 la *cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_O$ de la partícula alrededor del punto O se define como el momento alrededor de O de la cantidad de movimiento lineal de la partícula: $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Luego se deduce de la segunda ley de Newton que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula es igual a la suma de los momentos alrededor de O de las fuerzas que actúan sobre esa partícula.

La sección 12.9 trata el movimiento de una partícula bajo la acción de una *fuerza central*, esto es, sujeta a una fuerza dirigida hacia o alejándose de un punto fijo O. Puesto que una fuerza de este tipo tiene momento cero alrededor de O, se concluye que se conserva la cantidad de movimiento angular de la partícula alrededor de O. Esta propiedad simplifica de manera considerable el análisis del movimiento de una partícula bajo una fuerza central; en la sección 12.10 se aplica la solución de problemas que implican el movimiento orbital de cuerpos sometidos a atracción gravitacional.

Las secciones de la 12.11 a la 12.13 son opcionales. Presentan una discusión más amplia del movimiento orbital y contienen varios problemas relacionados con mecánica celeste.

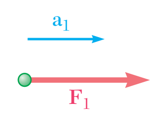
12.2. SEGUNDA LEY DE MOVIMIENTO DE NEWTON

La segunda ley de Newton se puede enunciar de la manera siguiente:

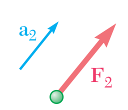
Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante.

La segunda ley de movimiento de Newton se comprende mejor al imaginar el siguiente experimento: una partícula se somete a una fuerza $\mathbf{F}_1$ de dirección constante y magnitud constante F_1. Bajo la acción de esa fuerza se observa que la partícula se mueve en línea recta y *en la dirección de la fuerza* (figura 12.1*a*). Al determinar la posición de la partícula en diferentes instantes, se encuentra que su aceleración tiene una magnitud constante a_1. Si el experimento se repite con fuerzas $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , o de diferente magnitud o dirección (figura 12.1*b* y *c*), se descubre que cada vez que la partícula se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre ella y que las magnitudes a_1, a_2, a_3, . . . , de las aceleraciones son proporcionales a las magnitudes F_1, F_2, F_3, . . . , de las fuerzas correspondientes:

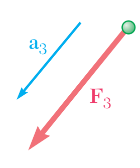
$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \cdots = \text{constante}$$



a)



b)



c)

Figura 12.1

El valor constante que se obtiene para el cociente de las magnitudes de las fuerzas y aceleraciones es característico de la partícula que se considera; se denomina la *masa* de la partícula y se denota mediante m. Cuando sobre una partícula de masa m actúa una fuerza $\mathbf{F}$, la fuerza $\mathbf{F}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula deben satisfacer entonces la relación

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.1}$$

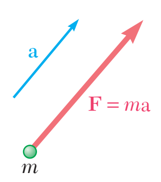


Figura 12.2

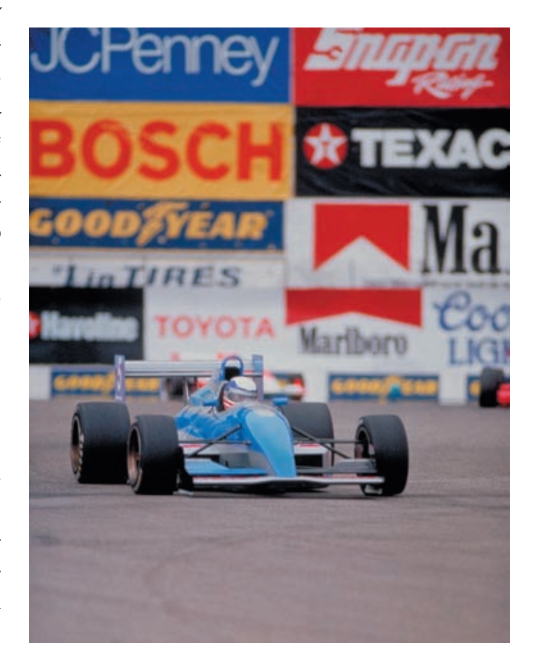
Esta relación proporciona una formulación completa de la segunda ley de Newton; no sólo expresa que la magnitud de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$ son proporcionales, sino también (puesto que m es un escalar positivo) que los vectores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$ tienen la misma dirección (figura 12.2). Debe advertirse que la ecuación (12.1) sigue cumpliéndose cuando $\mathbf{F}$ no es constante sino que con el tiempo varía de magnitud o dirección. Las magnitudes de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$ permanecen proporcionales, y los dos vectores tienen la misma dirección en cualquier instante determinado. Sin embargo, en general, no son tangentes a la trayectoria de la partícula.

Cuando una partícula se somete de manera simultánea a varias fuerzas, la ecuación (12.1) debe sustituirse por

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

donde $\Sigma\mathbf{F}$ representa la sumatoria, o resultante, de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Debe notarse que el sistema de ejes con respecto al cual se determina la aceleración $\mathbf{a}$ no es arbitrario. Estos ejes deben tener una orientación constante con respecto a las estrellas, y es necesario que su origen esté unido al Sol[†] o se mueva con velocidad constante con respecto al Sol. Un sistema de ejes de estas características recibe el nombre de *sistema*



Fotografía 12.1 Cuando el automóvil de carreras acelera hacia delante hay una fuerza de fricción que actúa sobre las llantas traseras en la dirección del movimiento del automóvil.

[†]Más precisamente al centro de masa del sistema solar.

de referencia newtoniano.† Un sistema de ejes unido a la Tierra *no* constituye un sistema de referencia newtoniano, ya que la Tierra gira con respecto a las estrellas y está acelerada con respecto al Sol. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, la aceleración **a** puede determinarse con respecto a los ejes unidos a la Tierra y las ecuaciones (12.1) y (12.2) se utilizan sin ningún error apreciable. Por otro lado, estas ecuaciones no se cumplen si **a** representa una aceleración relativa medida con respecto a ejes en movimiento, tales como los ejes unidos a un automóvil acelerado o a una pieza de maquinaria rotatoria.

Se observa que si la resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de las fuerzas que actúan sobre la partícula es cero, se deduce de la ecuación (12.2) que la aceleración **a** de la partícula también es cero. Si la partícula se encuentra inicialmente en reposo ($\mathbf{v}_0 = 0$) con respecto al sistema de referencia newtoniano utilizado, así se mantendrá en reposo ($\mathbf{v} = 0$). Si en un principio se movía con una velocidad $\mathbf{v}_0$, la partícula mantendrá una velocidad constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$; esto es, se moverá con velocidad constante v_0 en una línea recta. Esto es el enunciado de la primera ley de Newton (sección 2.10). De tal modo, la primera ley de Newton constituye un caso particular de la segunda ley y puede omitirse de los principios fundamentales de la mecánica.

12.3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL DE UNA PARTÍCULA. RAZÓN DE CAMBIO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Si se reemplaza la aceleración **a** por la derivada $d\mathbf{v}/dt$ en la ecuación (12.2), se escribe

$$\Sigma\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

o, ya que la masa m de la partícula es constante,

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad (12.3)$$

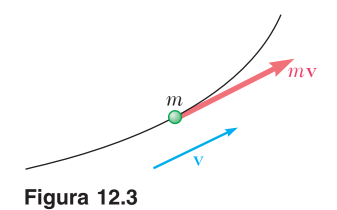


Figura 12.3

El vector $m\mathbf{v}$ se denomina como la *cantidad de movimiento lineal*, o simplemente *cantidad de movimiento* de la partícula. Tiene la misma dirección que la velocidad de la partícula, y su magnitud es igual al producto de la masa m y la velocidad v de la partícula (figura 12.3). La ecuación (12.3) expresa que *la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula.* En esta forma fue que Newton enunció originalmente la segunda ley de movimiento. Al denotar por **L** la cantidad de movimiento lineal de la partícula,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v} \qquad (12.4)$$

y por $\dot{\mathbf{L}}$ su derivada con respecto a t, es posible escribir la ecuación (12.3) en la forma alternativa

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad (12.5)$$

†Puesto que las estrellas no están realmente fijas, una definición más rigurosa de sistema de referencia newtoniano (denominado también *sistema inercial*) es *uno respecto al cual se cumple la ecuación (12.2).*

Debe notarse que la masa m de la partícula se supone constante en las ecuaciones (12.3) a (12.5). La ecuación (12.3) o (12.5) no debe entonces usarse para resolver problemas que impliquen el movimiento de cuerpos, como cohetes, que ganan o pierden masa. Los problemas de ese tipo se considerarán en la sección 14.12.†

Se desprende de la ecuación (12.3) que la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}$ es cero cuando $\Sigma\mathbf{F} = 0$. De tal modo, *si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la cantidad de movimiento lineal de la partícula permanece constante, tanto en magnitud como en dirección.* Éste es el principio de *conservación de la cantidad de movimiento lineal* para una partícula, el cual puede reconocerse como un enunciado alternativo de la primera ley de Newton (sección 2.10).

12.4. SISTEMAS DE UNIDADES

Al utilizar la ecuación fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, las unidades de fuerza, masa, longitud y tiempo no pueden elegirse de manera arbitraria. Si eso ocurriera, la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ que se requiere para proporcionar una aceleración $\mathbf{a}$ a la masa m *no* sería numéricamente igual al producto ma; sólo sería proporcional a este producto. En consecuencia, se pueden elegir tres o cuatro unidades de manera arbitraria, pero se debe escoger la cuarta unidad de manera que se satisfaga la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Se dice entonces que las unidades forman un sistema de unidades cinéticas consistentes.

Suelen utilizarse dos sistemas de unidades cinéticas consistentes: el Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI‡) y unidades utilizadas comúnmente en Estados Unidos. Ambos sistemas se estudiaron con detalle en la sección 1.3 y se describen sólo de manera breve en esta sección.

Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI). En este sistema, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo y se denominan, respectivamente, el *metro* (m), el *kilogramo* (kg) y el *segundo* (s). Las tres se definen en forma arbitraria (sección 1.3). La unidad de fuerza es una unidad derivada. Se denomina *newton* (N) y se define como la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg (figura 12.4). De la ecuación (12.1) se describe

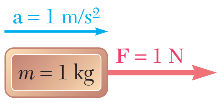


Figura 12.4

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

Se afirma que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades. Lo anterior significa que las tres unidades básicas elegidas son independientes de la ubicación donde se efectúan las mediciones. El metro, el kilogramo y el segundo pueden ser utilizados en cualquier parte sobre la Tierra; incluso pueden ser usados en otro planeta. Y siempre tendrían el mismo significado.

El *peso* $\mathbf{W}$ de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* que se ejerce sobre ese cuerpo, al igual que otra fuerza, se expresará en newtons. Puesto que un cuerpo sometido a su propio peso adquiere una aceleración igual a la aceleración de la gravedad g, se deduce de la segunda ley de Newton que la magnitud W del peso de un cuerpo de masa m es

$$W = mg \qquad (12.6)$$

†Por otro lado, las ecuaciones (12.3) y (12.5) se cumplen en *mecánica relativista,* en la cual se supone que la masa m de la partícula varía con la velocidad de la misma.

‡SI es la abreviatura de *Système International d'Unités* (en francés).

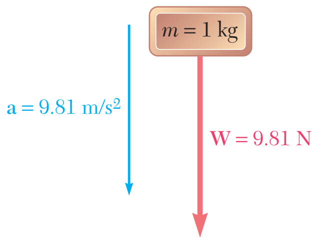


Figura 12.5

Al recordar que $g = 9.81$ m/s^2, se encuentra que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (figura 12.5) es

$$W = (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9.81 \text{ N}$$

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza se usan con frecuencia en la práctica de la ingeniería. Éstos son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*† (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). Por definición,

$$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m} \qquad 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$$
$$1 \text{ Mg} = 1\,000 \text{ kg} \qquad 1 \text{ g} = 0.001 \text{ kg}$$
$$1 \text{ kN} = 1\,000 \text{ N}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, se efectúa simplemente desplazando el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda.

Otras unidades aparte de las de masa, longitud y tiempo pueden expresarse en términos de estas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de cantidad en movimiento lineal se obtiene al recordar su definición y al escribir

$$mv = (\text{kg})(\text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Unidades de uso común en Estados Unidos. La mayoría de los ingenieros estadounidenses siguen utilizando de forma común un sistema en el que las unidades básicas son las de longitud, fuerza y tiempo; estas unidades corresponden, respectivamente, al *pie* (ft), la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es el mismo que la unidad correspondiente del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como el *peso* de un patrón de platino, denominado *libra estándar,* que se conserva en el National Institute of Standards and Technology, cerca de Washington, y cuya masa equivale a 0.453 592 43 kg. Puesto que el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, la cual varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe situarse a nivel del mar y a una altura de 45° para definir de manera adecuada una fuerza de 1 lb. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman un sistema de unidades absoluto. En virtud de su dependencia de la atracción gravitacional terrestre, se señala que forman un sistema *gravitacional* de unidades.

En tanto que la libra estándar sirve también como la unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede utilizarse en cálculos de ingeniería, pues una unidad de ese tipo no será consistente con las unidades básicas definidas en el párrafo anterior. En realidad, cuando actúa sobre ella una fuerza de 1 lb, esto es, cuando se somete a su propio peso, la libra estándar recibe la aceleración de la gravedad, $g = 32.2$ ft/s^2 (figura 12.6) y no la aceleración unitaria que requiere la ecuación (12.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa, que recibe una aceleración de 1 ft/s^2 cuando se le aplica una fuerza de 1 lb (figura 12.7). Esta unidad, llamada en ocasiones un *slug*, puede deducirse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 1 ft/s^2 en vez de F y a, respectivamente. Se escribe

$$F = ma \qquad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

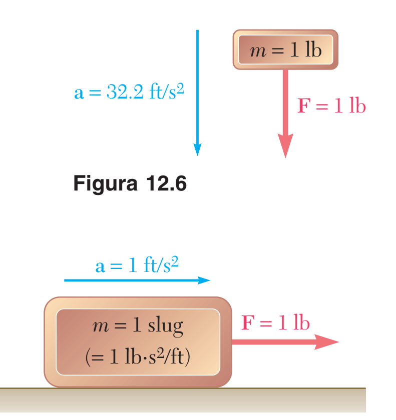


Figura 12.6

Figura 12.7

†Conocido también como *tonelada métrica.*

y se obtiene

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Al comparar las figuras 12.6 y 12.7 se concluye que el slug es una masa 32.2 veces mayor que la masa de una libra estándar.

El hecho de que los cuerpos se caractericen en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos por su peso en libras más que su masa en slugs fue una conveniencia en el estudio de la estática, en la que se trata principalmente con pesos y otras fuerzas, y rara vez con masas. Sin embargo, en el estudio de la cinética, la cual implica fuerzas, masas y aceleraciones, será necesario de manera repetida expresar en slugs la masa m de un cuerpo, cuyo peso W se ha indicado en libras. Al recordar la ecuación (12.6), se escribe

$$m = \frac{W}{g} \tag{12.7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2 \text{ ft/s}^2$).

Otras unidades aparte de las de fuerza, longitud y tiempo pueden expresarse en términos de estas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de cantidad de movimiento lineal puede obtenerse utilizando la definición de cantidad de movimiento lineal para escribir

$$mv = (\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\text{ft/s}) = \text{lb} \cdot \text{s}$$

Conversión de un sistema de unidades a otro. Las conversiones de las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos a las del Sistema Internacional de Unidades, y viceversa, se estudió en la sección 1.4. Hay que recordar que los factores de conversión que se obtuvieron para las unidades de longitud, fuerza y masa son, respectivamente,

Longitud:	$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$
Fuerza:	$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$
Masa:	$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg}$

Aunque no puede utilizarse como una unidad de masa consistente, la masa de una libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra/masa} = 0.4536 \text{ kg}$$

Es posible utilizar esta constante para determinar la masa en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que se ha caracterizado por su peso en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

12.5. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Considérese una partícula de masa m sobre la que actúan varias fuerzas. Se tiene de la sección 12.2 que la segunda ley de Newton puede expresarse mediante la ecuación

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

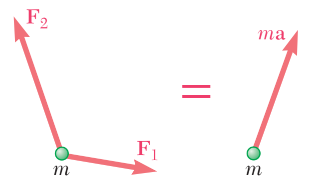


Figura 12.8

que relaciona las fuerzas que actúan sobre la partícula y el vector $m\mathbf{a}$ (figura 12.8). Sin embargo, para resolver los problemas que implican el movimiento de una partícula se encontrará más conveniente sustituir la ecuación (12.2) por ecuaciones equivalentes que incluyen cantidades escalares.



Fotografía 12.2 El piloto de un avión de guerra experimentará fuerzas normales muy grandes al dar un giro muy cerrado.

Componentes rectangulares. Al descomponer cada fuerza **F** y la aceleración **a** en componentes rectangulares, se escribe

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

de lo que se deduce

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.8}$$

Al recordar de la sección 11.11 que las componentes de la aceleración son iguales a la segunda derivada de las coordenadas de la partícula, se tiene

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad \Sigma F_y = m\ddot{y} \qquad \Sigma F_z = m\ddot{z} \tag{12.8$'$}$$

Considérese, como un ejemplo, el movimiento de un proyectil. Si se ignora la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre el proyectil después de que éste se ha lanzado es su peso $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$. En consecuencia, las ecuaciones que definen el movimiento del proyectil son

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = -W \qquad m\ddot{z} = 0$$

y las componentes de la aceleración del proyectil corresponden a

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -\frac{W}{m} = -g \qquad \ddot{z} = 0$$

donde g es 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2. Las ecuaciones que se obtienen se integran de manera independiente, como se muestra en la sección 11.11, para obtener la velocidad y el desplazamiento del proyectil en cualquier instante.

Cuando un problema implica dos o más cuerpos, las ecuaciones de movimiento deben escribirse para cada uno de ellos (véanse los problemas resueltos 12.3 y 12.4). Se recuerda de la sección 12.2 que todas las aceleraciones deben medirse con respecto a un sistema de referencia newtoniano. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería es posible determinar las aceleraciones con respecto a ejes unidos a la Tierra, aunque las aceleraciones relativas medidas con respecto a ejes móviles, como los ejes unidos al cuerpo acelerado, no pueden sustituirse en lugar de **a** en las ecuaciones de movimiento.

Componentes tangencial y normal. Al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en componentes a lo largo de la tangente a la trayectoria (en la dirección de movimiento) y la normal (hacia el interior de la trayectoria) (figura 12.9) y sustituir a la ecuación (12.2), se obtienen las dos ecuaciones escalares

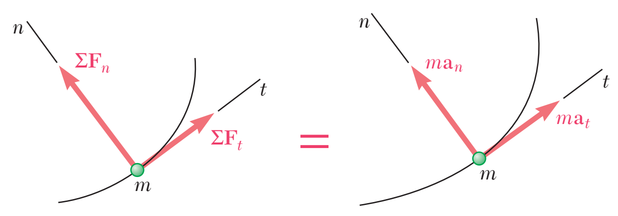


Figura 12.9

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_n = ma_n \tag{12.9}$$

Al sustituir a_t y a_n, de las ecuaciones (11.40), se tiene

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{12.9$'$}$$

Las ecuaciones que se obtienen pueden resolverse para dos incógnitas.

12.6. EQUILIBRIO DINÁMICO

Al volver a la ecuación (12.2) y trasponer el miembro del lado derecho, se escribe la segunda ley de Newton en la forma alternativa

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \qquad (12.10)$$

en la que se expresa que si se suma el vector $-m\mathbf{a}$ a las fuerzas que actúan sobre la partícula, *se obtiene un sistema de vectores equivalente a cero* (figura 12.10). El vector $-m\mathbf{a}$, de magnitud ma y de *dirección opuesta* a la de la aceleración, se denomina *vector de inercia.* De tal modo, es factible considerar que la partícula está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas dadas y del vector de inercia. Se afirma que la partícula está en *equilibrio dinámico,* y el problema que se considera puede resolverse mediante los métodos que se desarrollaron antes en estática.

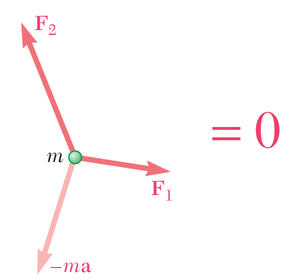


Figura 12.10

En el caso de fuerzas coplanares, todos los vectores que se muestran en la figura 12.10, *incluyendo al vector de inercia,* pueden trazarse uno después del otro para formar un polígono vectorial cerrado. También es posible igualar a cero la suma de los componentes de todos los vectores en la figura 12.10, incluyendo de nuevo al vector de inercia. En consecuencia, utilizando componentes rectangulares, se escribe

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \textbf{\textit{incluyendo el vector de inercia}} \qquad (12.11)$$

Cuando se usan las componentes tangencial y normal, resulta más conveniente representar el vector de inercia por medio de sus dos componentes $-m\mathbf{a}_t$ y $-m\mathbf{a}_n$ en el mismo dibujo (figura 12.11). La componente tangencial del vector de inercia ofrece una medida que la resistencia de la partícula presenta a un cambio en la velocidad, en tanto que su componente normal (también llamada *fuerza centrífuga*) representa la tendencia de la partícula a abandonar su trayectoria curva. Es necesario advertir que cualquiera de estas dos componentes puede ser cero en condiciones especiales: 1) si la partícula parte del reposo, su velocidad inicial es cero y la componente normal del vector de inercia es cero en $t = 0$; 2) si la partícula se mueve con velocidad constante a lo largo de su trayectoria, la componente tangencial del vector de inercia es cero y sólo es necesario considerar su componente normal.

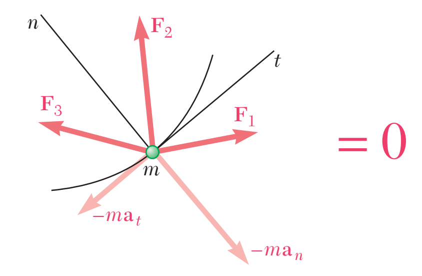
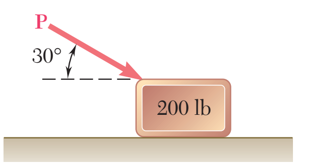


Figura 12.11

Debido a que mide la resistencia que la partícula ofrece cuando se trata de ponerla en movimiento, o cuando se intenta cambiar las condiciones de este mismo, los vectores de inercia a menudo se denominan *fuerzas de inercia.* Sin embargo, las fuerzas de inercia no son similares a las que se encuentran en estática, que son fuerzas de contacto o fuerzas gravitacionales (pesos). Por consiguiente, muchas personas objetan el uso de la palabra "fuerza" cuando se refieren al vector $-m\mathbf{a}$, o incluso evitan el concepto de equilibrio dinámico. Otros afirman que las fuerzas de inercia y las fuerzas reales, como las gravitacionales, afectan nuestros sentidos en la misma forma y no es posible distinguirlas por mediciones físicas. Un hombre que viaja en un elevador que se acelera hacia arriba puede sentir que su peso se ha incrementado de manera repentina; y ninguna medida efectuada dentro del elevador podría establecer si éste en verdad está acelerado o si se ha incrementado de manera repentina la fuerza de atracción ejercida por la Tierra.

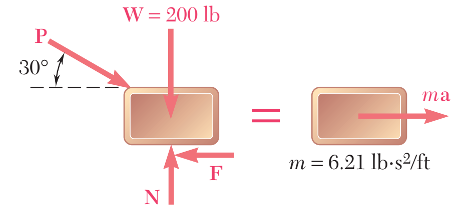
Se ha llegado a las soluciones de los problemas resueltos de este texto mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton, como se ilustra en las figuras 12.8 y 12.9, y no mediante el método de equilibrio dinámico.


Fotografía 12.3 El ángulo que forma cada persona con respecto a la horizontal dependerá de su peso y de la rapidez de rotación.



PROBLEMA RESUELTO 12.1

Un bloque de 200 lb descansa sobre un plano horizontal. Determine la magnitud de la fuerza **P** que se requiere para dar al bloque una aceleración de 10 ft/s^2 hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.



SOLUCIÓN

La masa del bloque es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{200 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 6.21 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Se tiene que $F = \mu_k N = 0.25N$ y que $a = 10$ ft/s^2. Al expresar que las fuerzas que actúan sobre el bloque son equivalentes al vector $m\mathbf{a}$, se escribe

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma: \quad P \cos 30° - 0.25N = (6.21 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(10 \text{ ft/s}^2)$$

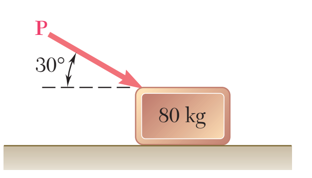
$$P \cos 30° - 0.25N = 62.1 \text{ lb} \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad N - P \text{ sen } 30° - 200 \text{ lb} = 0 \qquad (2)$$

Al resolver (2) para N y sustituir el resultado en (1), se obtiene

$$N = P \text{ sen } 30° + 200 \text{ lb}$$

$$P \cos 30° - 0.25(P \text{ sen } 30° + 200 \text{ lb}) = 62.1 \text{ lb} \qquad P = 151 \text{ lb} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.2

Un bloque de 80 kg descansa sobre un plano horizontal. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para dar al bloque una aceleración de 2.5 m/s^2 hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.

SOLUCIÓN

El peso del bloque es

$$W = mg = (80 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 785 \text{ N}$$

Se tiene que $F = \mu_k N = 0.25N$ y que $a = 2.5$ m/s^2. Al expresar que las fuerzas que actúan sobre el bloque son equivalentes al vector $m\mathbf{a}$, se escribe

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma: \quad P \cos 30° - 0.25N = (80 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s}^2)$$

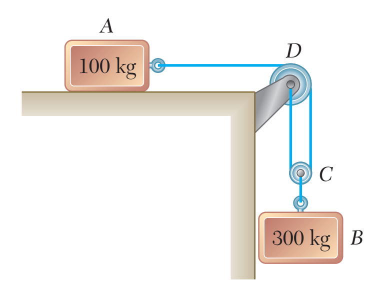
$$P \cos 30° - 0.25N = 200 \text{ N} \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad N - P \text{ sen } 30° - 785 \text{ N} = 0 \qquad (2)$$

Al resolver (2) para N y sustituir el resultado en (1), se obtiene

$$N = P \text{ sen } 30° + 785 \text{ N}$$

$$P \cos 30° - 0.25(P \text{ sen } 30° + 785 \text{ N}) = 200 \text{ N} \qquad P = 535 \text{ N} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.3

Los dos bloques que se muestran empiezan a moverse a partir del reposo. El plano horizontal y la polea no presentan fricción y se supone que la masa de la polea puede ignorarse. Determine la aceleración de cada bloque y la tensión de cada cuerda.

SOLUCIÓN

Cinemática. Se tiene que si el bloque A se mueve la distancia x_A hacia la derecha, el bloque B desciende

$$x_B = \tfrac{1}{2}x_A$$

Al diferenciar dos veces con respecto a t, se tiene

$$a_B = \tfrac{1}{2}a_A \qquad (1)$$

Cinética. Se aplica sucesivamente la segunda ley de Newton al bloque A, el bloque B y la polea C.

Bloque A. Al denotar mediante T_1 la tensión en la cuerda ACD, se escribe

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = m_A a_A: \qquad T_1 = 100a_A \qquad (2)$$

Bloque B. Al observar que el peso del bloque B es

$$W_B = m_B g = (300 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 2\,940 \text{ N}$$

y al denotar mediante T_2 la tensión en la cuerda BC, se escribe

$$+\downarrow\Sigma F_y = m_B a_B: \qquad 2\,940 - T_2 = 300a_B$$

o, al sustituir a_B de (1),

$$2\,940 - T_2 = 300(\tfrac{1}{2}a_A)$$
$$T_2 = 2\,940 - 150a_A \qquad (3)$$

Polea C. Puesto que m_C se supone igual a cero, se tiene

$$+\downarrow\Sigma F_y = m_C a_C = 0: \qquad T_2 - 2T_1 = 0 \qquad (4)$$

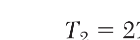
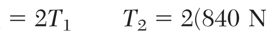
Al sustituir T_1 y T_2 de (2) y (3), respectivamente, en (4), se obtiene

$$2\,940 - 150a_A - 2(100a_A) = 0$$
$$2\,940 - 350a_A = 0 \qquad a_A = 8.40 \text{ m/s}^2 \blacktriangleleft$$

Mediante la sustitución del valor que se obtuvo para a_A en (1) y (2), se tiene

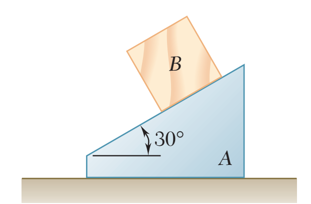
$$a_B = \tfrac{1}{2}a_A = \tfrac{1}{2}(8.40 \text{ m/s}^2) \qquad a_B = 4.20 \text{ m/s}^2 \blacktriangleleft$$
$$T_1 = 100a_A = (100 \text{ kg})(8.40 \text{ m/s}^2) \qquad T_1 = 840 \text{ N} \blacktriangleleft$$

Recordando (4), se escribe


$T_2 = 2T_1$

$T_2 = 2(840 \text{ N})$

$T_2 = 1\,680 \text{ N} \blacktriangleleft$

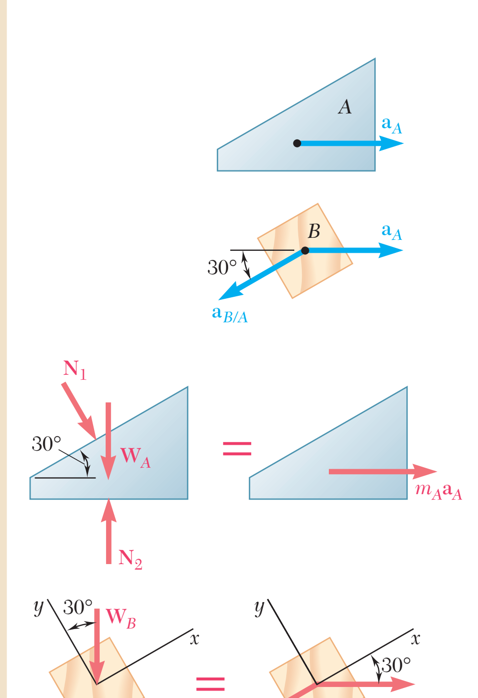
Se tiene que el valor que se obtuvo para T_2 no es igual al peso del bloque B.



PROBLEMA RESUELTO 12.4

El bloque B de 12 lb empieza a moverse desde el reposo y desliza sobre la cuña A de 30 lb, la cual está sobre una superficie horizontal. Si se ignora la fricción, determine *a*) la aceleración de la cuña, *b*) la aceleración del bloque relativa a la cuña.

SOLUCIÓN



Cinemática. Se examina primero la aceleración de la cuña y la aceleración del bloque.

Cuña A. Puesto que la cuña está restringida a moverse sobre la superficie horizontal, su aceleración $\mathbf{a}_A$ es horizontal. Se supondrá que ésta apunta hacia la derecha.

Bloque B. La aceleración $\mathbf{a}_B$ del bloque B puede expresarse como la suma de la aceleración de A y de la aceleración de B relativa a A. Se tiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ está dirigida a lo largo de la superficie inclinada de la cuña.

Cinética. Se dibujan los diagramas del cuerpo libre de la cuña y del bloque y se aplica la segunda ley de Newton.

Cuña A. Se denotan las fuerzas ejercidas por el bloque y la superficie horizontal sobre la cuña A mediante $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$, respectivamente.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m_A a_A: \qquad N_1 \text{ sen } 30° = m_A a_A$$

$$0.5N_1 = (W_A/g)a_A \tag{1}$$

Bloque B. Al utilizar los ejes de coordenadas que se muestran y descomponer $\mathbf{a}_B$ y sus componentes $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_{B/A}$, se escribe

$$+\nearrow\Sigma F_x = m_B a_x: \qquad -W_B \text{ sen } 30° = m_B a_A \cos 30° - m_B a_{B/A}$$

$$-W_B \text{ sen } 30° = (W_B/g)(a_A \cos 30° - a_{B/A})$$

$$a_{B/A} = a_A \cos 30° + g \text{ sen } 30° \tag{2}$$

$$+\nwarrow\Sigma F_y = m_B a_y: \qquad N_1 - W_B \cos 30° = -m_B a_A \text{ sen } 30°$$

$$N_1 - W_B \cos 30° = -(W_B/g)a_A \text{ sen } 30° \tag{3}$$

***a*) Aceleración de la cuña *A*.** Si se sustituye N_1 de la ecuación (1) en la ecuación (3), se tiene

$$2(W_A/g)a_A - W_B \cos 30° = -(W_B/g)a_A \text{ sen } 30°$$

Al resolver para a_A y sustituir los datos numéricos, se escribe

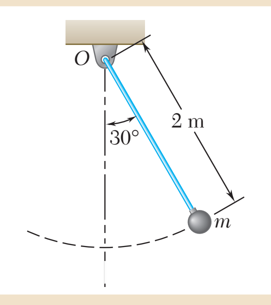
$$a_A = \frac{W_B \cos 30°}{2W_A + W_B \text{ sen } 30°}\, g = \frac{(12 \text{ lb}) \cos 30°}{2(30 \text{ lb}) + (12 \text{ lb}) \text{ sen } 30°}(32.2 \text{ ft/s}^2)$$

$$a_A = +5.07 \text{ ft/s}^2 \qquad \mathbf{a}_A = 5.07 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \blacktriangleleft$$

***b*) Aceleración del bloque *B* relativa a *A*.** Al sustituir el valor que se obtuvo para a_A en la ecuación (2), se tiene

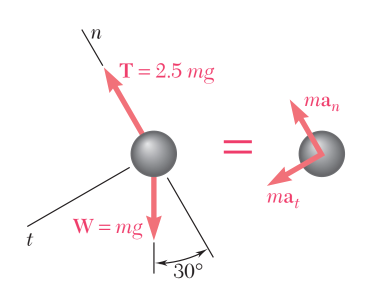
$$a_{B/A} = (5.07 \text{ ft/s}^2) \cos 30° + (32.2 \text{ ft/s}^2) \text{ sen } 30°$$

$$a_{B/A} = +20.5 \text{ ft/s}^2 \qquad \mathbf{a}_{B/A} = 20.5 \text{ ft/s}^2 \swarrow 30° \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.5

La plomada de un péndulo de 2 m describe un arco de círculo en un plano vertical. Si la tensión de la cuerda de estos puntos es cinco veces el peso de la plomada en la posición que se indica, determine la velocidad y la aceleración de la plomada en esa posición.



SOLUCIÓN

El peso de la plomada es $W = mg$; la tensión en la cuerda corresponde consecuentemente a 2.5 mg. Al recordar que $\mathbf{a}_n$ apunta hacia O y suponiendo que $\mathbf{a}_t$ en la forma que se muestra, se aplica la segunda ley de Newton y se obtiene

$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t$: $\quad mg \text{ sen } 30° = ma_t$

$a_t = g \text{ sen } 30° = +4.90 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_t = 4.90 \text{ m/s}^2 \swarrow$ ◀

$+\nwarrow \Sigma F_n = ma_n$: $\quad 2.5\ mg - mg \cos 30° = ma_n$

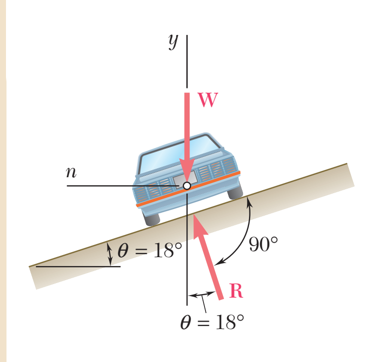
$a_n = 1.634\ g = +16.03 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_n = 16.03 \text{ m/s}^2 \nwarrow$ ◀

Puesto que $a_n = v^2/\rho$, se tiene $v^2 = \rho a_n = (2 \text{ m})(16.03 \text{ m/s}^2)$

$v = \pm 5.66 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v} = 5.66 \text{ m/s} \swarrow\!\!\nearrow$ (arriba o abajo) ◀

PROBLEMA RESUELTO 12.6

Determine la rapidez máxima de la curva de una autopista de radio $\rho = 400$ ft que tiene un ángulo de peralte $\theta = 18°$. La *rapidez máxima* de la curva peraltada de una autopista es aquella a la cual un automóvil debe viajar para que no exista fuerza de rozamiento lateral en sus neumáticos.



SOLUCIÓN

El automóvil se traslada en una trayectoria circular horizontal de radio ρ. La componente normal $\mathbf{a}_n$, de la aceleración apunta hacia el centro de la trayectoria; su magnitud es $a_n = v^2/\rho$, donde v es la velocidad del automóvil en ft/s. La masa m del auto es W/g, donde W es su peso. Puesto que no se va a ejercer fuerza de fricción lateral sobre el automóvil, la reacción $\mathbf{R}$ del camino se presenta perpendicular al mismo. Al aplicar la segunda ley de Newton se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R \cos \theta - W = 0 \qquad R = \frac{W}{\cos \theta} \tag{1}$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = ma_n: \qquad R \text{ sen } \theta = \frac{W}{g} a_n \tag{2}$$

Al sustituir R de (1) en (2), y recordar que $a_n = v^2/\rho$,

$$\frac{W}{\cos \theta} \text{sen } \theta = \frac{W}{g} \frac{v^2}{\rho} \qquad v^2 = g\rho \tan \theta$$

Al sustituir $\rho = 400$ ft y $\theta = 18°$ en esta ecuación, se obtiene

$$v^2 = (32.2 \text{ ft/s}^2)(400 \text{ ft}) \tan 18°$$

$v = 64.7 \text{ ft/s} \qquad v = 44.1 \text{ mi/h}$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de esta sección se aplicará la *segunda ley de movimiento de Newton*, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, para relacionar las fuerzas que actúan sobre una partícula con el movimiento de esta misma.

1. *Escritura de las ecuaciones de movimiento.* Al aplicar la segunda ley de Newton a los tipos de movimiento que se estudian en esta lección, se encontrará más conveniente expresar los vectores **F** y **a** en términos de sus componentes rectangulares o de sus componentes tangencial y normal.

a) ***Cuando se utilicen componentes rectangulares,*** y recordando de la sección 11.11 las expresiones que se obtuvieron para a_x, a_y y a_z, se debe escribir

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad \Sigma F_y = m\ddot{y} \qquad \Sigma F_z = m\ddot{z}$$

b) ***Cuando se usen las componentes tangencial y normal,*** y recordando de la sección 11.13 las expresiones que se obtuvieron para a_t y a_n se debe escribir

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

2. *El dibujo de un diagrama de un cuerpo libre* que muestre las fuerzas aplicadas *y un diagrama equivalente* que indique el vector $m\mathbf{a}$ o sus componentes proporcionará una representación gráfica de la segunda ley de Newton [problemas resueltos 12.1 a 12.6]. Estos diagramas resultarán de gran ayuda cuando se escriban las ecuaciones de movimiento. Hay que observar que cuando el problema incluye dos o más cuerpos, suele ser mejor considerar cada cuerpo por separado.

3. *Aplicación de la segunda ley de Newton.* Como se observó en la sección 12.2, la aceleración utilizada en la ecuación $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ siempre debe ser la *aceleración absoluta* de la partícula (es decir, es necesario medirla con respecto a un sistema de referencia newtoniano). Además, *si se desconoce el sentido de la aceleración* **a** o no es fácil deducirlo, hay que suponer un sentido arbitrario para la misma (por lo general la dirección positiva de un eje de coordenada) y dejar que la solución proporcione después el sentido correcto. Por último, hay que advertir cómo las soluciones de los problemas resueltos 12.3 y 12.4 se dividieron en la parte *cinemática* y en la parte *cinética,* y cómo en el problema resuelto 12.4 se usaron dos sistemas de ejes coordenados para simplificar las ecuaciones de movimiento.

4. *Cuando un problema incluye fricción seca,* hay que cerciorarse de revisar las importantes secciones de *Estática* [secciones 8.1 a 8.3] antes de tratar de resolverlo. En particular, se debe saber cuándo recurrir a cada una de las ecuaciones $F = \mu_s N$ y $F = \mu_k N$. También se debe reconocer que si no se especifica el movimiento de un sistema, es necesario suponer primero un posible movimiento y luego verificar la validez de la suposición.

5. Solución de problemas que implican movimiento relativo. Cuando el cuerpo B se mueve con respecto al cuerpo A, como en el problema resuelto 12.4, a menudo resulta conveniente expresar la aceleración de B como

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ es la aceleración de B relativa a A, esto es, la aceleración de B según se observa desde un sistema de referencia unido a A y en traslación. Si se observa que B se mueve en línea recta, $\mathbf{a}_{B/A}$ estará dirigida a lo largo de esa línea. Por otro lado, si se observa que B se mueve en una trayectoria circular, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ debe descomponerse en las componentes tangencial y normal a esta trayectoria.

6. Por último, hay que considerar siempre las implicaciones de cualquier suposición que se haga. Por consiguiente, en un problema que incluya dos cuerdas, si supone que la tensión en una de las cuerdas es igual a su máximo valor permisible, se debe verificar si algún otro requerimiento impuesto para la otra cuerda será satisfecho en ese caso. Por ejemplo, ¿la tensión T en esa cuerda cumplirá la relación $0 \leq T \leq T_{máx}$? Esto es, ¿la cuerda permanecerá estirada y su tensión será menor que su valor máximo permisible?

Problemas

12.1 El valor de g en cualquier latitud ϕ puede obtenerse mediante la fórmula

$$g = 32.09\ (1 + 0.0053\ \text{sen}^2\ \phi)\ \text{ft/s}^2$$

la cual toma en cuenta el efecto de la rotación de la Tierra junto con el hecho de que ésta no es realmente esférica. Determine con una exactitud de cuatro cifras significativas *a*) el peso en libras, *b*) la masa en libras, *c*) la masa en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$, en las latitudes de 0º, 45º, 60º, de una barra de plata, cuya masa se ha designado oficialmente igual a 5 lb.

12.2 La aceleración debida a la gravedad en la Luna es de 1.62 m/s^2. Determine *a*) el peso en newtons y *b*) la masa en kilogramos en la Luna, para una barra de oro, cuya masa se ha designado de manera oficial igual a 2 kg.

12.3 Un satélite de 200 kg está en una órbita circular a 1 500 km por encima de la superficie de Venus. La aceleración debida a la atracción gravitacional de Venus a esta altura es de 5.52 m/s^2. Determine la magnitud de la cantidad de movimiento lineal del satélite, si se sabe que su rapidez orbital es de 23.4×10^3 km/h.

12.4 Una báscula de resorte *A* y una báscula de brazo *B* que tienen brazos de palanca iguales se fijan al techo de un elevador, y se les cuelgan paquetes idénticos en la forma mostrada. Si se sabe que cuando el elevador se mueve hacia abajo con una aceleración de 4 ft/s^2 la báscula de resorte indica una carga de 14.1 lb, determine *a*) el peso de los paquetes, *b*) la carga indicada por la báscula de resorte y la masa necesaria para equilibrar la báscula de brazo cuando el elevador asciende con una aceleración de 4 ft/s^2.

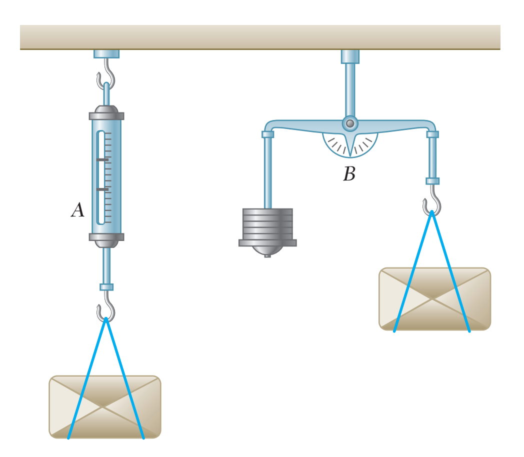


Figura *P12.4*

12.5 Un jugador de hockey golpea un disco de manera que éste vuelve al reposo en 9 s, después de deslizarse durante 30 m sobre el hielo. Determine *a*) la velocidad inicial del disco, *b*) el coeficiente de fricción entre el disco y el hielo.

12.6 Determine la máxima rapidez teórica que puede alcanzar un automóvil, que parte desde el reposo, después de recorrer 400 m. Suponga que existe un coeficiente de fricción estática de 0.80 entre las llantas y el pavimento y que *a*) el automóvil tiene tracción en las ruedas delanteras, las cuales soportan 62 por ciento del peso del automóvil, *b*) el automóvil tiene tracción en las ruedas traseras, las cuales soportan 43 por ciento del peso del automóvil.

12.7 En previsión de una larga pendiente ascendente de 7°, un conductor de autobús acelera a una razón constante de 3 ft/s2 cuando todavía está en una sección plana de la carretera. Si se sabe que la rapidez del autobús es de 60 mi/h cuando comienza a subir la pendiente y el conductor no cambia la posición de su acelerador ni cambia de velocidad, determine la distancia recorrida por el autobús sobre la pendiente cuando su rapidez ha disminuido a 50 mi/h.

12.8 Si la distancia de frenado de un automóvil desde 60 mph es de 150 ft sobre un pavimento plano, determine la distancia de frenado del automóvil desde 60 mph cuando está *a*) subiendo una pendiente de 5°, *b*) bajando por un plano inclinado a 3 por ciento. Suponga que la fuerza de frenado es independiente del grado de inclinación.

12.9 Un paquete de 20 kg se encuentra en reposo sobre un plano inclinado cuando se le aplica una fuerza **P**. Determine la magnitud de **P** si se requieren 10 s para que el paquete recorra 5 m hacia arriba por el plano inclinado. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el paquete y el plano inclinado son iguales a 0.3.

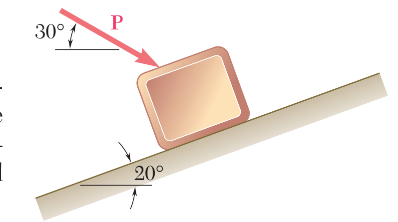


Figura P12.9

12.10 La aceleración de un paquete que se desliza en el punto *A* es de 3 m/s^2. Si se supone que el coeficiente de fricción cinética es el mismo para cada sección, determine la aceleración del paquete en el punto *B*.

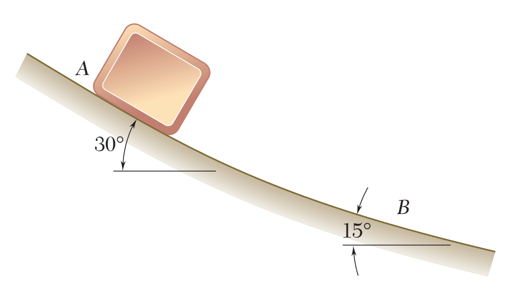


Figura P12.10

12.11 Los dos bloques que se muestran en la figura se encuentran originalmente en reposo. Si se desprecian las masas de las poleas y el efecto de fricción en éstas y entre el bloque *A* y la superficie horizontal, determine *a*) la aceleración de cada bloque, *b*) la tensión en el cable.

12.12 Los dos bloques que se muestran en la figura se encuentran originalmente en reposo. Si se desprecian las masas de las poleas y el efecto de fricción en éstas y se supone que los componentes de fricción entre el bloque *A* y la superficie horizontal son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) la aceleración de cada bloque, *b*) la tensión en el cable.

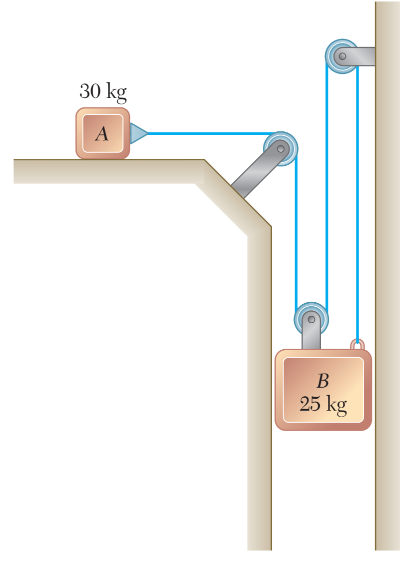


Figura P12.11 y P12.12

12.13 Los coeficientes de fricción entre la carga y la plataforma plana del camión que se muestra en la figura son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Si se sabe que la rapidez del vehículo es de 45 mi/h, determine la distancia más corta en la que el camión puede detenerse por completo sin que la carga se mueva.

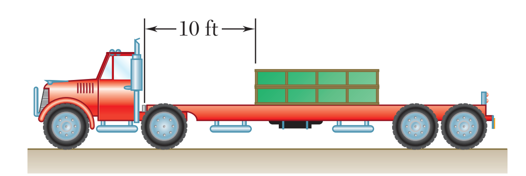


Figura *P12.13*

12.14 Un tractocamión viaja a 60 mi/h cuando el conductor aplica los frenos. Si se sabe que las fuerzas de frenado del tractor y el remolque son, respectivamente, 3 600 lb y 13 700 lb, determine *a*) la distancia recorrida por el tractocamión antes de detenerse, *b*) la componente horizontal de la fuerza en el enganche entre el tractor y el remolque mientras éstos van frenando.

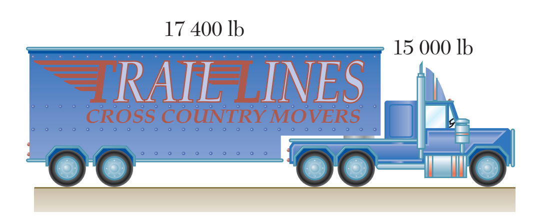
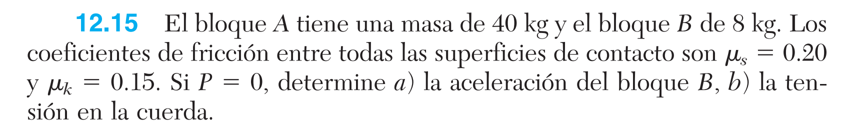


Figura *P12.14*



12.15 El bloque *A* tiene una masa de 40 kg y el bloque *B* de 8 kg. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$. Si $P = 0$, determine *a*) la aceleración del bloque *B*, *b*) la tensión en la cuerda.

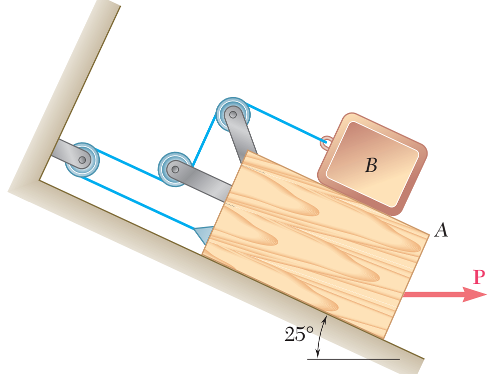


Figura P12.15 y P12.16

12.16 El bloque *A* tiene una masa de 40 kg y el bloque *B* de 8 kg. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$. Si se sabe que $P = 40$ N $\rightarrow$, determine *a*) la aceleración del bloque *B*, *b*) la tensión en la cuerda.

12.17 Las cajas *A* y *B* están en reposo sobre una banda transportadora que se encuentra inicialmente en reposo. La banda se empieza a mover de manera repentina en la dirección ascendente de manera que ocurre deslizamiento entre la banda y las cajas. Si los coeficientes de fricción cinética entre la banda y las cajas son $(\mu_k)_A = 0.30$ y $(\mu_k)_B = 0.32$, determine la aceleración inicial de cada caja.

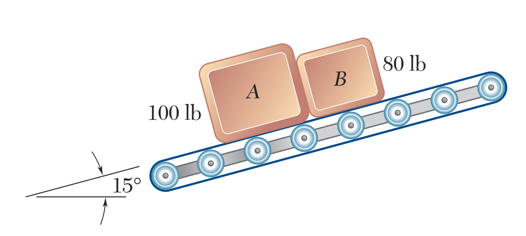


Figura P12.17

12.18 Si el sistema mostrado inicia desde el reposo, encuentre la velocidad en $t = 1.2$ s *a*) del collarín *A*, *b*) del collarín *B*. No tome en cuenta las masas de las poleas y el efecto de la fricción.

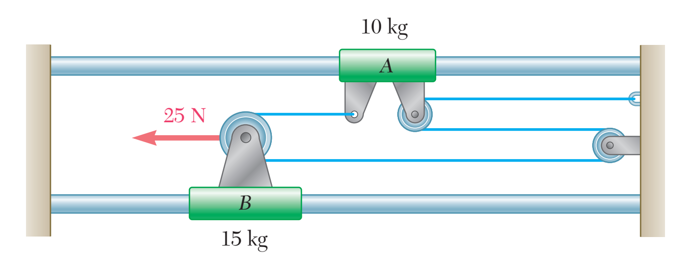


Figura *P12.18*

12.19 Cada uno de los sistemas que se muestran en la figura está al principio en reposo. Si se ignora la fricción del eje y las masas de las poleas, determine para cada sistema *a*) la aceleración del bloque *A*, *b*) la velocidad del bloque *A* después de que éste se ha movido 10 ft, *c*) el tiempo que se requiere para que el bloque *A* alcance una velocidad de 20 ft/s.

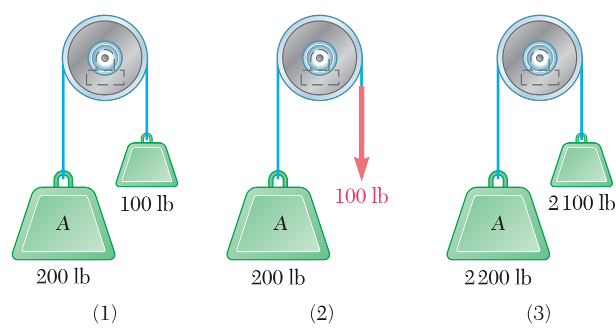


Figura P12.19

12.20 Un hombre que está parado dentro de un elevador, el cual se mueve con una aceleración constante, sostiene un bloque *B* de 3 kg entre otros dos bloques de tal forma que el movimiento de *B* en relación con *A* y *C* es inminente. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre todas las superficies son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$, determine *a*) la aceleración del elevador si se está moviendo hacia arriba y cada una de las fuerzas ejercidas por el hombre sobre los bloques *A* y *C* tiene una componente horizontal igual al doble del peso de *B*, *b*) las componentes horizontales de las fuerzas ejercidas por el hombre sobre los bloques *A* y *C* si la aceleración del elevador es de 2.0 m/s^2 hacia abajo.

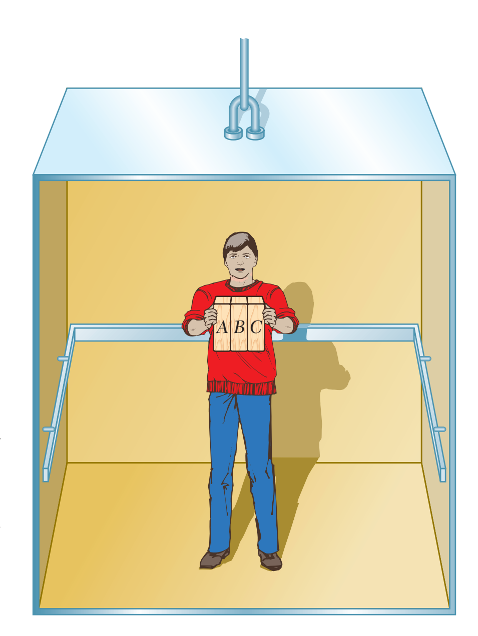
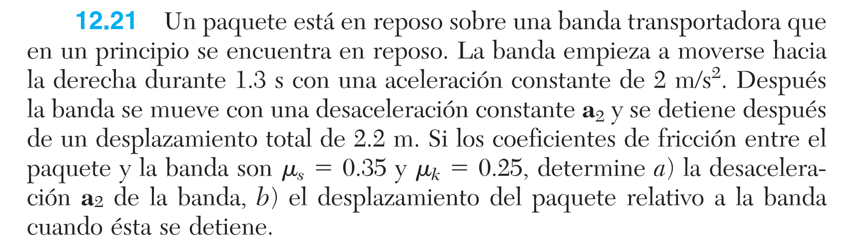


Figura P12.20



12.21 Un paquete está en reposo sobre una banda transportadora que en un principio se encuentra en reposo. La banda empieza a moverse hacia la derecha durante 1.3 s con una aceleración constante de 2 m/s^2. Después la banda se mueve con una desaceleración constante $\mathbf{a}_2$ y se detiene después de un desplazamiento total de 2.2 m. Si los coeficientes de fricción entre el paquete y la banda son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine *a*) la desaceleración $\mathbf{a}_2$ de la banda, *b*) el desplazamiento del paquete relativo a la banda cuando ésta se detiene.

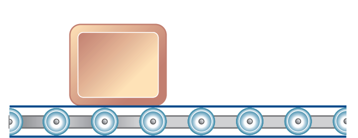


Figura P12.21

12.22 Para transportar una serie de bultos de tejas A hasta el techo, un contratista utiliza un montacargas motorizado compuesto por una plataforma horizontal BC que se monta sobre los rieles unidos a los lados de una escalera. El montacargas empieza su movimiento desde el reposo, al principio se mueve con una aceleración constante $\mathbf{a}_1$ como se muestra en la figura. Después se desacelera a una tasa constante $\mathbf{a}_2$ y se detiene en D, cerca de la parte superior de la escalera. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bulto de tejas y la plataforma horizontal es de 0.30, determine la aceleración máxima permisible $\mathbf{a}_1$, y la desaceleración máxima permisible $\mathbf{a}_2$ si el bulto no debe resbalarse sobre la plataforma.

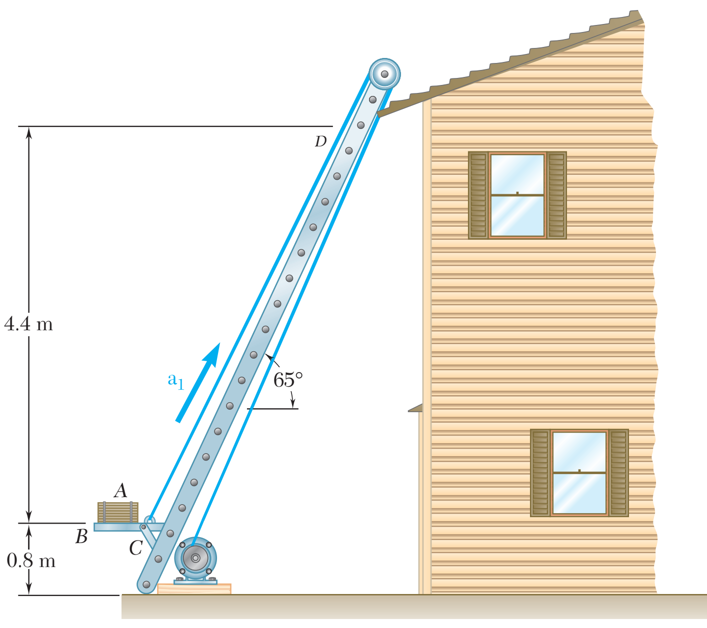


Figura *P12.22*

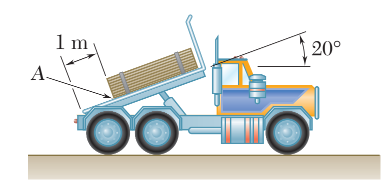


Figura *P12.23*

12.23 Para bajar de un camión una pila de madera comprimida, el conductor primero inclina la cama del vehículo y después acelera desde el reposo. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre la lámina debajo de la madera comprimida y la cama son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, determine *a*) la aceleración mínima del camión que provocará el deslizamiento de la pila de madera comprimida, *b*) la aceleración del camión que ocasionará que la esquina A de la pila de madera llegue al extremo de la cama en 0.9 s.

12.24 Los propulsores de un barco de peso W pueden producir una fuerza impulsora $\mathbf{F}_0$; producen una fuerza de la misma magnitud pero dirección opuesta cuando los motores se invierten. Si se sabe que el barco se desplaza hacia delante a su rapidez máxima v_0 cuando los motores se pusieron en reversa, determine la distancia que recorre el barco antes de detenerse. Suponga que la resistencia a la fricción del agua varía directamente con el cuadrado de la velocidad.

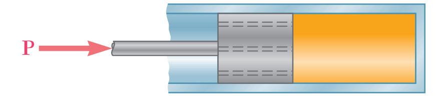


Figura *P12.25*

12.25 Se aplica una fuerza constante $\mathbf{P}$ al pistón y a la varilla de masa total m para que se muevan en un cilindro lleno de aceite. Conforme se mueve el pistón, se obliga a que el aceite atraviese los orificios en el pistón y ejerza sobre este mismo una fuerza de magnitud kv en la dirección opuesta al movimiento del pistón. Si el pistón parte de reposo en $t = 0$ y $x = 0$, muestre que la ecuación que relaciona a x, v y t es lineal en cada una de las variables donde x es la distancia recorrida por el pistón y v es la rapidez del mismo.

12.26 Un resorte AB de constante k se une a un soporte A y a un collarín de masa m. La longitud no alargada del resorte es l. Si se suelta el collarín desde el reposo en $x = x_0$ y se desprecia la fricción entre el collarín y la varilla horizontal, determine la magnitud de la velocidad del collarín cuando pasa por el punto C.

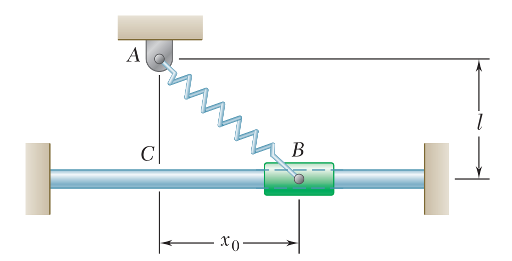


Figura P12.26

12.27 Determine la rapidez teórica máxima que puede alcanzar un automóvil de 2 700 lb, que parte desde el reposo, después de recorrer un cuarto de milla y tomando en cuenta la resistencia del aire. Suponga que el coeficiente de fricción estática es de 0.70 entre las llantas y el pavimento, que el automóvil tiene tracción delantera, que las ruedas delanteras soportan 62 por ciento del peso del automóvil, y que el arrastre aerodinámico **D** tiene una magnitud $D = 0.012v^2$, donde D y v se expresan en libras y ft/s, respectivamente.

12.28 Los coeficientes de fricción entre los bloques A y C y las superficies horizontales son $\mu_s = 0.24$ y $\mu_k = 0.20$. Si se sabe que $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg y $m_C = 10$ kg, determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) la aceleración de cada bloque.

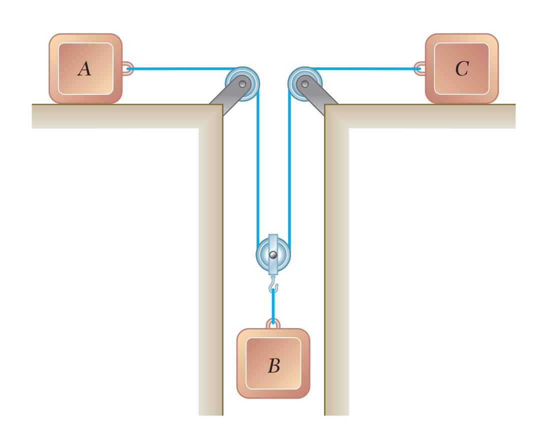


Figura P12.28

12.29 Retome el problema 12.28, y ahora suponga que $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg y $m_C = 20$ kg.

12.30 Los bloques A y B pesan 20 lb cada uno, el bloque C pesa 14 lb y el bloque D 16 lb. Si se aplica una fuerza hacia abajo con una magnitud de 24 lb sobre el bloque D, determine *a*) la aceleración de cada bloque, *b*) la tensión en la cuerda ABC. No tome en cuenta los pesos de las poleas ni el efecto de la fricción.

12.31 Los bloques A y B pesan 20 lb cada uno, el bloque C pesa 14 lb y el bloque D 16 lb. Si se aplica una fuerza hacia abajo con una magnitud de 10 lb sobre el bloque B y el sistema inicia su movimiento desde el reposo, determine en $t = 3$ s la velocidad *a*) de D en relación con A, *b*) de C en relación con D. No tome en cuenta los pesos de las poleas ni el efecto de la fricción.

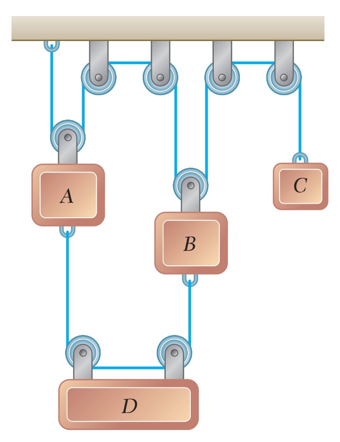


Figura P12.30 y P12.31

12.32 El bloque B de 15 kg está apoyado en el bloque A de 25 kg y unido a una cuerda a la cual se aplica una fuerza horizontal de 225 N, como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta la fricción, determine *a*) la aceleración del bloque A y *b*) la aceleración del bloque B relativa a A.

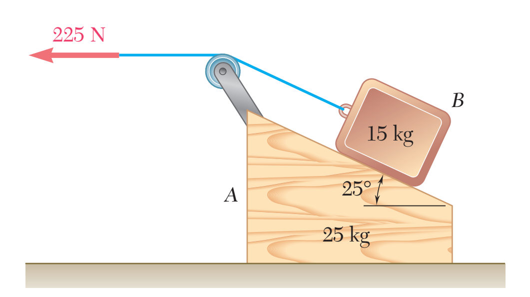


Figura *P12.32*

12.33 El bloque B con 10 kg de masa descansa sobre la superficie superior de una cuña A de 22 kg. Si se sabe que el sistema se libera desde el reposo y se desprecia la fricción, determine *a*) la aceleración de B y *b*) la velocidad de B en relación con A en $t = 0.5$ s.

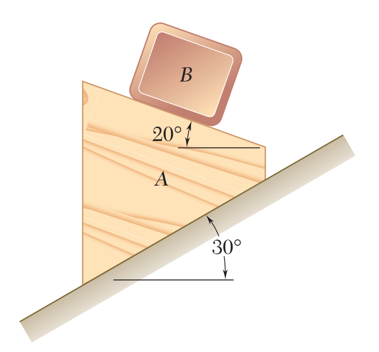
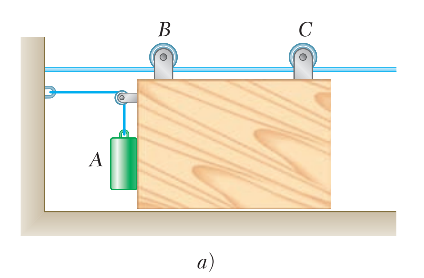


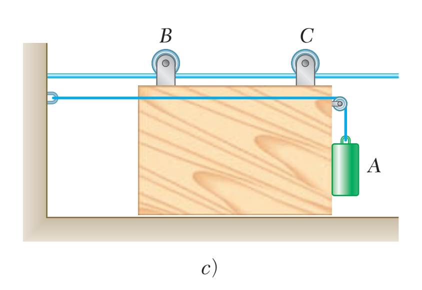
Figura *P12.33*

12.34 Un panel deslizante de 40 lb se sostiene mediante rodillos en B y C. Un contrapeso A de 25 lb se une a un cable como se muestra en la figura y, en los casos *a* y *c*, está inicialmente en contacto con un borde vertical del panel. Sin tomar en cuenta la fricción, determine en cada caso mostrado la aceleración del panel y la tensión en la cuerda inmediatamente después de que el sistema se libera desde el reposo.



a)

b)



c)

Figura *P12.34*

12.35 Una caja B de 500 lb está suspendida de un cable unido a una carretilla A de 40 lb que va montada sobre una viga I inclinada en la forma que se muestra. Si en el instante indicado la carretilla tiene una aceleración de 1.2 ft/s^2 hacia arriba y a la derecha, determine *a*) la aceleración de B en relación con A y *b*) la tensión en el cable CD.

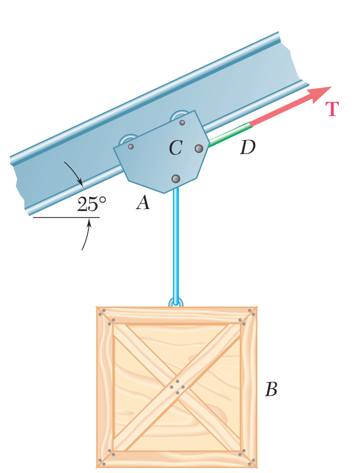


Figura *P12.35*

12.36 Durante la práctica de un lanzador de martillo, la cabeza A del martillo de 7.1 kg gira a una velocidad constante v en un círculo horizontal como se muestra en la figura. Si $\rho = 0.93$ m y $\theta = 60°$, determine *a*) la tensión en el alambre BC, *b*) la rapidez de la cabeza del martillo.

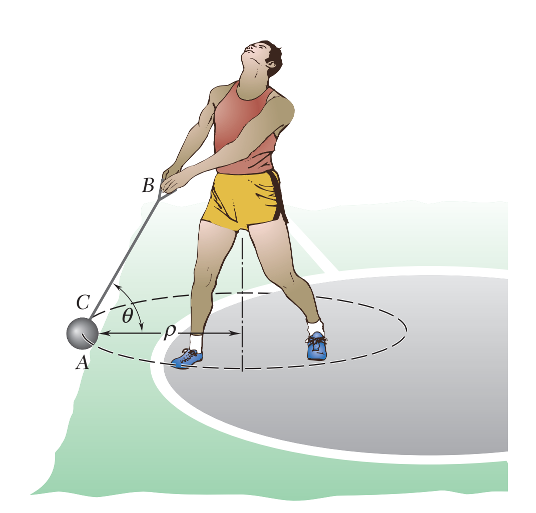


Figura P12.36

12.37 Una pelota atada A de 450 g se mueve a lo largo de una trayectoria circular a una rapidez constante de 4 m/s. Determine *a*) el ángulo θ que forma la cuerda con el poste BC, *b*) la tensión en la cuerda.

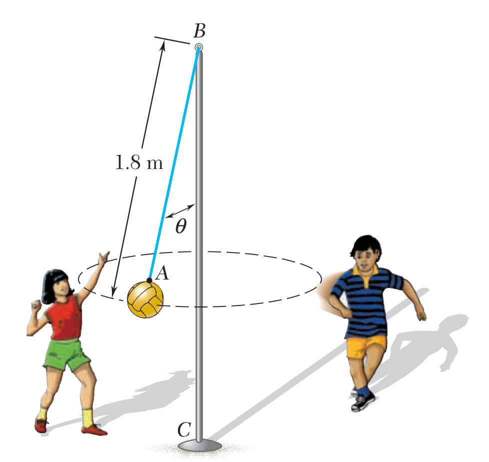


Figura P12.37

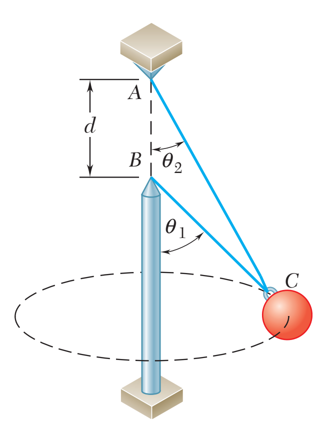


Figura P12.38, *P12.39* y P12.40

12.38 Un alambre *ACB* de 80 in. de longitud pasa por un anillo en *C*, el cual está unido a una esfera que gira a una rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Si $\theta_1 = 60°$ y $\theta_2 = 30°$ y la tensión es la misma en ambas porciones del alambre, determine la rapidez v.

12.39 Un alambre *ACB* pasa por un anillo en *C*, el cual está unido a una esfera de 12 lb que gira a una rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Si $\theta_1 = 50°$ y $d = 30$ in. y la tensión en ambas porciones del alambre es de 7.6 lb, determine *a*) el ángulo θ_2 y *b*) la rapidez v.

12.40 Dos alambres *AC* y *BC* están unidos a una esfera de 7 kg que gira a rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Si $\theta_1 = 55°$ y $\theta_2 = 30°$ y $d = 1.4$ m, determine el intervalo de valores de v para los cuales ambos alambres se mantienen tensos.

12.41 Una esfera *D* de 100 g se encuentra en reposo respecto al tambor *ABC* que gira a una razón constante. Sin tomar en cuenta la fricción, determine el intervalo de los valores permisibles de la velocidad v de la esfera, si ninguna de las fuerzas normales ejercidas por la esfera sobre las superficies inclinadas del tambor debe exceder 1.1 N.

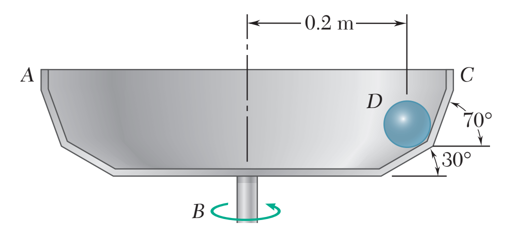


Figura *P12.41*

12.42 Como parte de una exposición al aire libre, un modelo de la Tierra *C* de 12 lb se une a los alambres *AC* y *BC* y gira a rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Determine el intervalo de valores permisibles de v si ambos alambres permanecerán tensos y la tensión en cualquiera de ellos no será mayor que 26 lb.

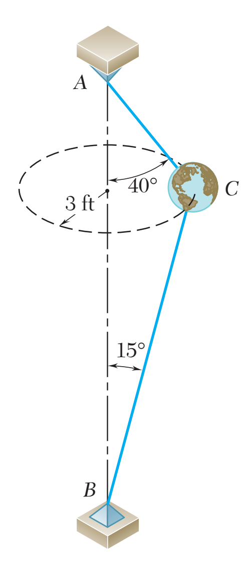


Figura P12.42

***12.43** Las esferas volantes de 1.2 lb del regulador centrífugo giran con rapidez constante v en el círculo horizontal de 6 in. de radio que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta los pesos de los eslabones AB, BC, AD y DE y con la restricción de que los eslabones sólo soportan fuerzas de tensión, determine el intervalo de valores permisibles de v de modo que las magnitudes de las fuerzas de los eslabones no excedan 17 lb.

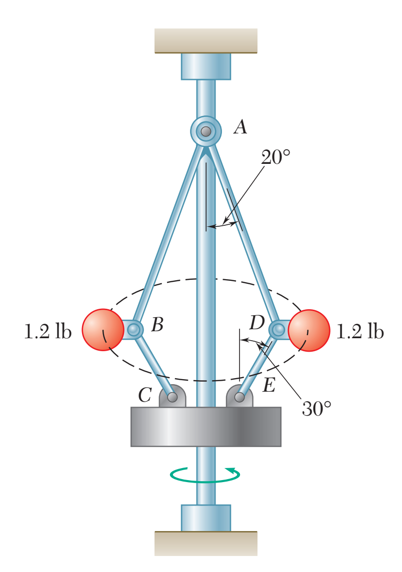


Figura P12.43

12.44 Un niño que tiene una masa de 22 kg se sienta sobre un columpio y un segundo niño lo mantiene en la posición mostrada. Si se desprecia la masa del columpio, determine la tensión en la cuerda AB *a*) mientras el segundo niño sostiene el columpio con sus brazos extendidos de manera horizontal, *b*) inmediatamente después de soltar el columpio.

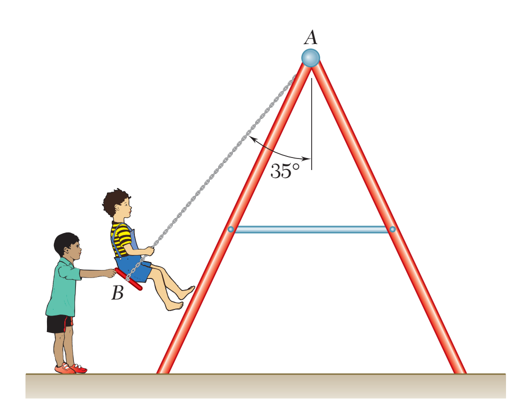


Figura P12.44

12.45 Una bola para demolición B de 60 kg está unida a un cable de acero AB de 15 m de largo y oscila en el arco vertical que se indica en la figura. Determine la tensión en el cable *a*) en la parte superior C de la oscilación y *b*) en la parte inferior D de la oscilación, donde la rapidez de B es igual a 4.2 m/s.

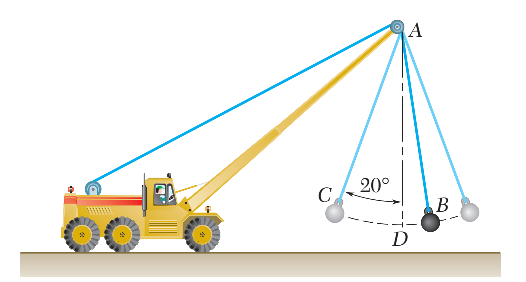


Figura P12.45

12.46 En el transcurso de una persecución a alta velocidad, un automóvil deportivo de 2 400 lb que viaja a una rapidez de 100 mi/h apenas pierde contacto con el camino cuando alcanza la cresta A de una colina. *a*) Determine el radio de curvatura ρ del perfil vertical del camino en A. *b*) Utilizando el valor de ρ que se encontró en el inciso *a*), determine la fuerza que ejerce el asiento de un conductor de 160 lb que conduce un automóvil de 3 100 lb, cuando este último, viajando a rapidez constante de 50 mi/h, pasa por A.

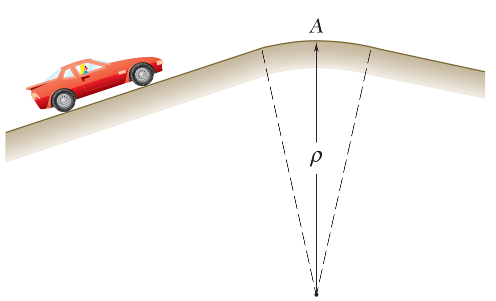


Figura P12.46

12.47 La porción mostrada de una pendiente para tobogán está contenida en un plano vertical. Las secciones AB y CD tienen los radios de curvatura que se indican en la figura, mientras que la sección BC es recta y forma un ángulo de 20° con la horizontal. Si el coeficiente de fricción cinética entre el trineo y la pendiente es de 0.10 y la rapidez del trineo es de 25 ft/s en B, determine la componente tangencial de la aceleración del trineo *a*) justo antes de llegar a B, *b*) justo después de pasar C.

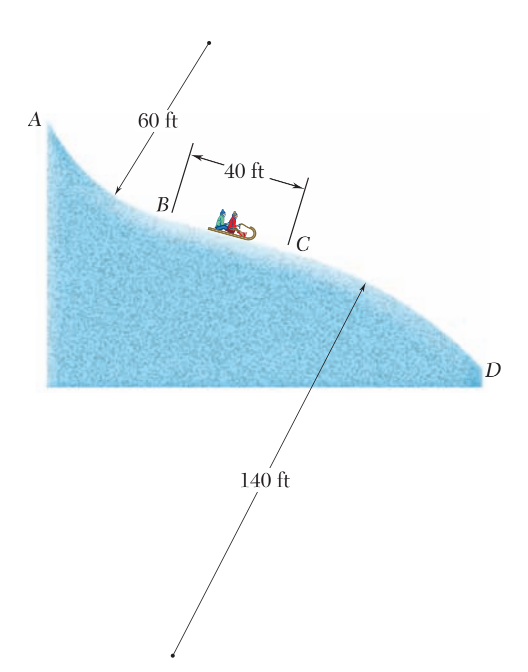


Figura P12.47

1 m/s
A
θ
B
250 mm

Figura P12.48

12.48 Una serie de pequeños paquetes, cada uno con una masa de 0.5 kg, se descarga desde una banda transportadora como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre cada paquete y la banda transportadora es de 0.4, determine *a*) la fuerza ejercida por la banda sobre el paquete justo después de haber pasado el punto A, *b*) el ángulo θ que define al punto B donde los paquetes se *deslizan* por primera vez con respecto a la banda.

12.49 Una piloto de 54 kg vuela un jet de entrenamiento en una media vuelta vertical de 1 200 m de radio de manera que la velocidad del jet disminuye a razón constante. Si se sabe que los pesos aparentes de la piloto en los puntos *A* y *C* son respectivamente de 1 680 N y 350 N, determine la fuerza que ejerce sobre ella el asiento del jet cuando éste se encuentra en el punto *B*.

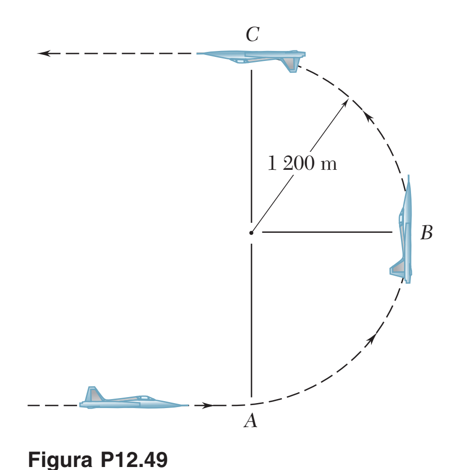


Figura P12.49

12.50 Un bloque *B* de 250 g se encuentra dentro de una pequeña cavidad cortada en el brazo *OA*, que gira en el plano vertical a razón constante de tal modo que $v = 3$ m/s. Si se sabe que el resorte ejerce una fuerza de magnitud $P = 1.5$ N sobre el bloque *B*, y sin tomar en cuenta la fuerza de fricción, determine el intervalo de valores de θ para los cuales el bloque *B* está en contacto con la cara de la cavidad más cercana al eje de rotación *O*.

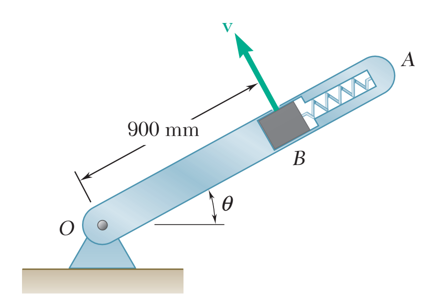


Figura P12.50

12.51 Una curva en una pista de carreras tiene un radio de 1000 ft y una rapidez máxima de 120 mi/h. (Vea en el problema resuelto 12.6 la definición de velocidad máxima.) Si se sabe que un automóvil de carreras comienza a derrapar sobre la curva cuando viaja a una rapidez de 180 mi/h, determine *a*) el ángulo θ del peralte, *b*) el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la pista bajo las condiciones prevalecientes, *c*) la rapidez mínima a la cual el mismo automóvil podría pasar la curva sin dificultades.

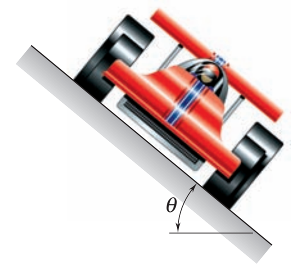


Figura P12.51

12.52 Un automóvil viaja sobre un camino peraltado a una rapidez constante v. Determine el intervalo de valores de v para los cuales el automóvil no patina. Exprese su respuesta en términos del radio r de la curva, el ángulo θ de peralte y el ángulo de fricción estática ϕ_s entre las llantas y el pavimento.

12.53 Los trenes de inclinación como el *American Flyer*, que viaja de Washington a Nueva York y Boston, están diseñados para desplazarse con seguridad a altas velocidades sobre secciones curvas de las vías que fueron diseñadas para trenes convencionales más lentos. Al entrar a una curva, cada vagón se inclina por medio de actuadores hidráulicos montados sobre sus plataformas. La característica de inclinación de los vagones incrementa también el confort de los pasajeros al eliminar o reducir de manera considerable la fuerza lateral $\mathbf{F}_s$ (paralela al piso del vagón) a la cual los pasajeros se sienten sujetos. Para un tren que viaja a 100 mi/h sobre una sección curva de la vía con un ángulo de peralte $\theta = 6°$ y con una rapidez máxima permitida de 60 mi/h, determine *a*) la magnitud de la fuerza lateral que siente un pasajero de peso W en un vagón estándar sin ninguna inclinación ($\phi = 0$), *b*) el ángulo de inclinación ϕ que se requiere si el pasajero no debe sentir ninguna fuerza lateral. (Vea en el problema resuelto 12.6 la definición de rapidez máxima.)

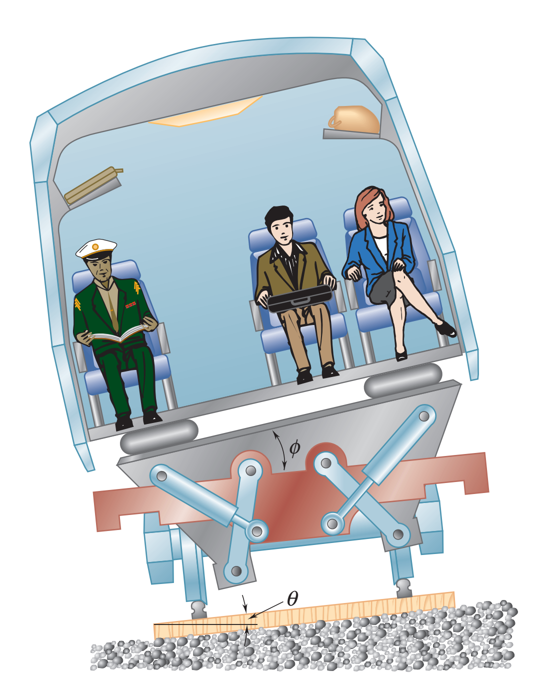


Figura P12.53 y *P12.54*

12.54 Las pruebas que se llevan a cabo con los trenes de inclinación descritos en el problema 12.53 revelan que los pasajeros se marean cuando miran a través de la ventana del vagón si el tren recorre una curva a alta velocidad, incluso sin sentir una fuerza lateral. En consecuencia, los diseñadores prefieren reducir, pero no eliminar esa fuerza. Para el caso del tren del problema 12.53, determine el ángulo de inclinación ϕ que se requiere si los pasajeros sintieran fuerzas laterales iguales a 10% de sus pesos.

12.55 Un pequeño collarín D de 300 g puede deslizarse sobre la porción AB de la barra que está doblada en la forma que se indica en la figura. Si se sabe que $\alpha = 40°$ y que la barra gira alrededor del eje vertical AC a una razón constante de 5 rad/s, determine el valor de r para el cual el collarín no se deslizará sobre la barra, si se desprecia el efecto de la fricción entre la barra y el collarín.

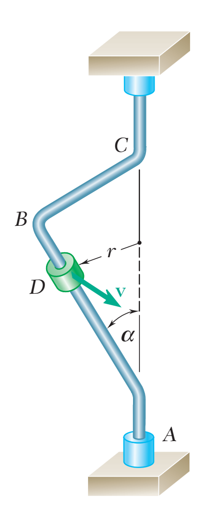


Figura P12.55, P12.56 y P12.57

12.56 Un pequeño collarín D de 200 g puede deslizarse sobre la porción AB de la barra que está doblada en la forma que se indica en la figura. Si se sabe que la barra gira alrededor del eje vertical AC a una razón constante y que $\alpha = 30°$ y $r = 600$ mm, determine el intervalo de valores de la rapidez v para el cual el collarín no se deslizará sobre la barra, si el coeficiente de fricción estática entre la barra y el collarín es 0.30.

12.57 Un pequeño collarín D de 0.6 lb puede deslizarse sobre la porción AB de la barra que está doblada en la forma que se indica en la figura. Si se sabe que $r = 8$ in. y que la barra gira alrededor del eje vertical AC a una razón constante de 10 rad/s, determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra si el collarín no debe deslizarse cuando *a*) $\alpha = 15°$, *b*) $\alpha = 45°$. Para cada caso indique la dirección del movimiento inminente.

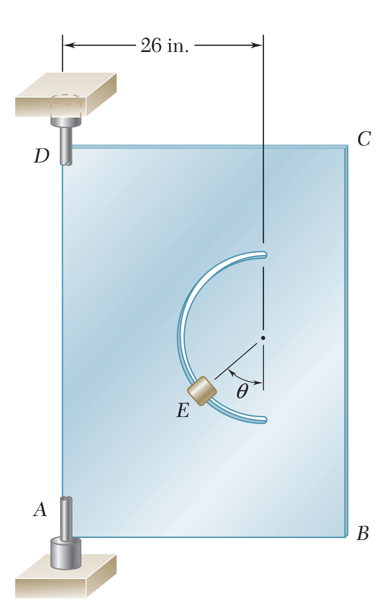


Figura P12.58

12.58 Una ranura semicircular con 10 in. de radio se corta en una placa plana que gira alrededor de la vertical AD a una razón constante de 14 rad/s. Un bloque pequeño E de 8 lb está diseñado para deslizarse en la ranura mientras la placa gira. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine si el bloque se deslizará en la ranura cuando éste se libera en la posición correspondiente a *a*) $\theta = 80°$, *b*) $\theta = 40°$. También determine la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque inmediatamente después de ser liberado.

12.59 Tres segundos después de que una pulidora empezó a moverse a partir del reposo, se observa el vuelo de pequeñas borlas de lana que salen de la circunferencia de 225 mm de diámetro de la almohadilla de pulido. Si la pulidora se enciende de tal manera que la lana de la circunferencia se somete a una aceleración constante tangencial de 4 m/s^2, determine *a*) la rapidez v de la borla cuando ésta se desprende de la almohadilla y *b*) la magnitud de la fuerza que se requiere para liberar la borla si la masa promedio de ésta es de 1.6 mg.

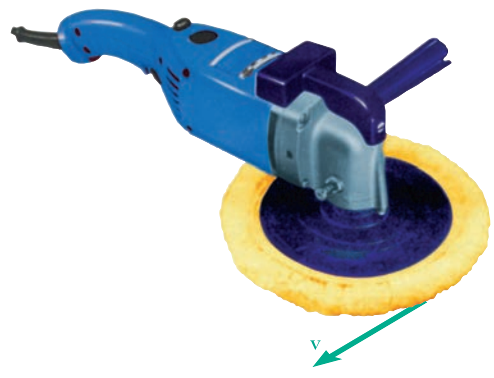


Figura *P12.59*

12.60 Sobre un escenario se construye una plataforma giratoria *A* que se utilizará en una producción teatral. En un ensayo se observa que el baúl *B* empieza a deslizarse sobre la plataforma giratoria 10 s después de que ésta empezó a girar. Si el baúl se somete a una aceleración constante de 0.24 m/s², determine el coeficiente de fricción estática entre el baúl y la plataforma giratoria.

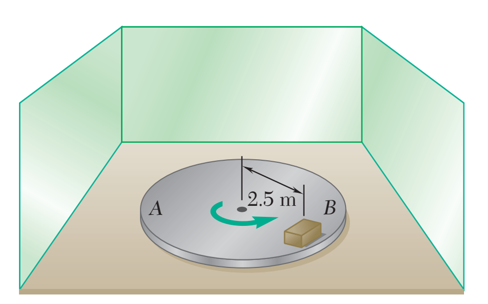


Figura *P12.60*

12.61 El mecanismo de eslabones paralelos *ABCD* se utiliza para transportar un componente *I* entre los procesos de manufactura de las estaciones *E*, *F* y *G* al recolectarlo con una estación cuando $\theta = 0$ y depositarlo en la estación siguiente cuando $\theta = 180°$. Si se sabe que el elemento *BC* permanecerá horizontal a lo largo de su movimiento y que los enlaces *AB* y *CD* giran a una razón constante en un plano vertical, de manera tal que $v_B = 2.2$ ft/s, determine *a*) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre el componente y *BC* mientras se está transfiriendo y *b*) los valores de θ para los cuales el deslizamiento es inminente.

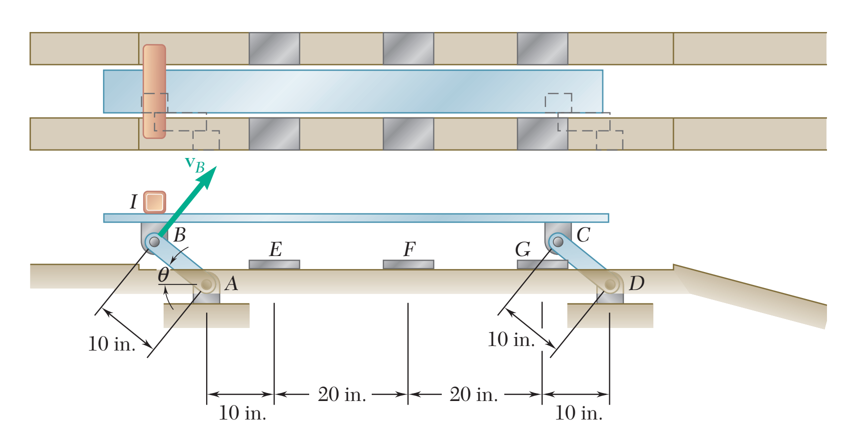


Figura P12.61

12.62 Si los coeficientes de fricción entre el componente *I* y el elemento *BC* del mecanismo del problema 12.61 son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine *a*) la rapidez máxima permitida v_B si el componente no debe deslizarse sobre *BC* mientras es transferido y *b*) el valor de θ para el cual el deslizamiento es inminente.

12.63 En el tubo de rayos catódicos que se muestra en la figura, los electrones emitidos por el cátodo y atraídos por el ánodo pasan a través de un pequeño agujero en el ánodo, y luego viajan en línea recta con velocidad v_0 hasta que inciden sobre la pantalla en A. Sin embargo, si se establece una diferencia de potencial de V entre las dos placas paralelas, los electrones estarán sujetos a una fuerza **F** perpendicular a las placas mientras viajan entre éstas, e incidirán en la pantalla en el punto B que está a una distancia δ de A. La magnitud de la fuerza **F** es $F = eV/d$, donde $-e$ es la carga de un electrón y d es la distancia entre las placas. Deduzca una expresión para la deflexión d en términos de V, v_0, la carga $-e$ y la masa m de un electrón, así como las dimensiones d, l y L.

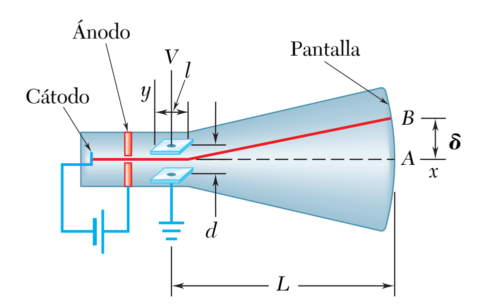


Figura P12.63

12.64 En el problema 12.63 determine el valor mínimo permitido del cociente d/l en términos de e, m, v_0 y V si en $x = l$ la distancia mínima permitida entre la trayectoria de los electrones y la placa positiva es igual a $0.05d$.

12.65 El modelo actual para un tubo de rayos catódicos se debe modificar de manera que la longitud del tubo y el espacio entre las placas se reduzcan en 40 y 20 por ciento, respectivamente. Si el tamaño de la pantalla debe permanecer igual, determine la nueva longitud l' de las placas suponiendo que todas las otras características del tubo deben conservarse sin cambio. (En el problema 12.63 se puede ver una descripción general del tubo de rayos catódicos.)

12.7. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA. RAZÓN DE CAMBIO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Considérese una partícula P de masa m que se mueve con respecto a un sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. Como se estudió en la sección 12.3, la cantidad de movimiento lineal de la partícula en un instante determinado se define como el vector $m\mathbf{v}$ obtenido al multiplicar la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula por su masa m. El momento alrededor de O del vector $m\mathbf{v}$ se denomina *momento de la cantidad de movimiento,* o la *cantidad de movimiento angular* de la partícula en torno a O en ese instante y se denota por medio de $\mathbf{H}_O$. Al recordar la definición del momento de un vector (sección 3.6) y denotar mediante $\mathbf{r}$ el vector de posición de P, se escribe

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (12.12)$$

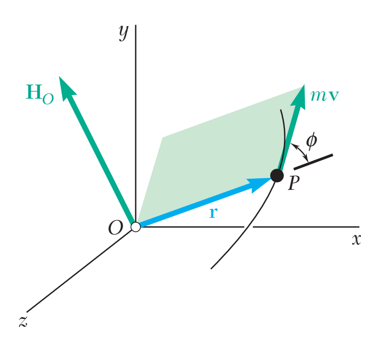


Figura 12.12

se tiene que $\mathbf{H}_O$ es un vector perpendicular al plano que contiene **r** y $m\mathbf{v}$ y de magnitud

$$H_O = rmv \text{ sen } \phi \tag{12.13}$$

donde ϕ es el ángulo entre **r** y $m\mathbf{v}$ (figura 12.12). El sentido de $\mathbf{H}_O$ puede determinarse a partir del sentido de $m\mathbf{v}$ aplicando la regla de la mano derecha. La unidad de cantidad de movimiento angular se obtiene al multiplicar las unidades de longitud y de cantidad de movimiento lineal (sección 12.4). Con unidades del SI se tiene

$$(\text{m})(\text{kg} \cdot \text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Con unidades de uso común en Estados Unidos, se escribe

$$(\text{ft})(\text{lb} \cdot \text{s}) = \text{ft} \cdot \text{lb} \cdot \text{s}$$

Al descomponer los vectores **r** y $m\mathbf{v}$ en componentes y aplicar la fórmula (3.10), se escribe

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{12.14}$$

Las componentes de $\mathbf{H}_O$, las cuales representan también los momentos de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}$ alrededor de los ejes de coordenadas, se obtienen expandiendo el determinante en (12.14). Se tiene

$$\begin{aligned} H_x &= m(yv_z - zv_y) \\ H_y &= m(zv_x - xv_z) \\ H_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned} \tag{12.15}$$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano xy, se tiene $z = vz = 0$ y las componentes H_x y H_y se reducen a cero. De tal modo, la cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano xy; en ese caso se define por completo mediante el escalar

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \tag{12.16}$$

que será positivo o negativo de acuerdo con el sentido en el cual se observa que la partícula se mueve desde O. Si se recurre a coordenadas polares, se descompone la cantidad de movimiento lineal de la partícula en las componentes radial y transversal (figura 12.13) y se escribe

$$H_O = rmv \text{ sen } \phi = rmv_\theta \tag{12.17}$$

o, al recordar de (11.45) que $v_\theta = r\dot{\theta}$,

$$H_O = mr^2\dot{\theta} \tag{12.18}$$

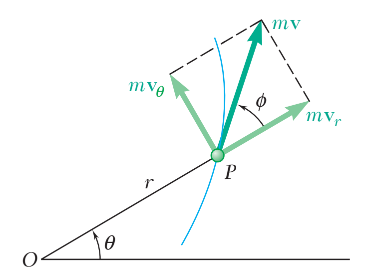


Figura 12.13

A continuación se calcula la derivada con respecto a t de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula P que se mueve en el espacio. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (12.12), y recordar la regla para la diferenciación de un producto vectorial (sección 11.10), se escribe

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Puesto que los vectores $\mathbf{v}$ y $m\mathbf{v}$ son colineales, el primer término de la expresión que se obtiene es cero; y, mediante la segunda ley de Newton, $m\mathbf{a}$ es igual a la suma $\Sigma\mathbf{F}$ de las fuerzas que actúan sobre P. Si $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ representa la suma $\Sigma\mathbf{M}_O$ de los momentos alrededor de O de estas fuerzas, se escribe

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{12.19}$$

La ecuación (12.19), que resulta directamente de la segunda ley de Newton, establece que *la suma de los momentos de O de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio del momento de la cantidad de movimiento, o cantidad de movimiento angular, de la partícula alrededor de O.*

12.8. ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN TÉRMINOS DE LAS COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

Considérese una partícula P, de coordenadas polares r y θ, que se mueve en un plano bajo la acción de varias fuerzas. Al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en las componentes radial y transversal (figura 12.14) y sustituir la ecuación (12.2), se obtienen las dos ecuaciones escalares

$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta \tag{12.20}$$

Al sustituir a_r y a_θ de acuerdo con las ecuaciones (11.46), se tiene

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12.21}$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

Las ecuaciones que se obtienen pueden resolverse para dos incógnitas.



Fotografía 12.4 Las fuerzas que actúan sobre la probeta usada en una máquina de centrifugado de alta velocidad pueden describirse en términos de sus componentes radiales y transversales.

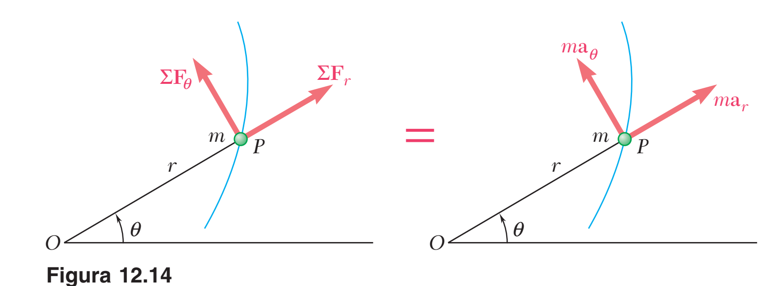


Figura 12.14

Era posible deducir la ecuación (12.22) de la ecuación (12.19). Al recordar (12.18) y notar que $\Sigma M_O = r\Sigma F_\theta$, la ecuación (12.19) produce

$$r\Sigma F_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$
$$= m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

y, después de dividir ambos miembros entre r,

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (12.22)$$

12.9. MOVIMIENTO BAJO UNA FUERZA CENTRAL. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

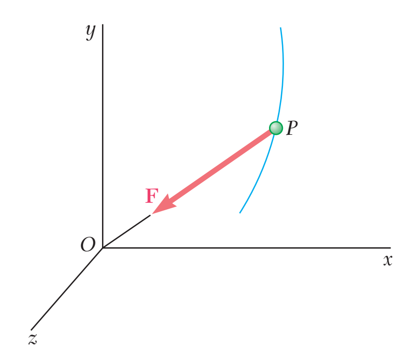


Figura 12.15

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es una fuerza $\mathbf{F}$ dirigida hacia O alejándose de un punto fijo O, se dice que la partícula se está moviendo *bajo una fuerza central*, y el punto O se conoce como el *centro de fuerza* (figura 12.15). Puesto que la línea de acción de $\mathbf{F}$ pasa por O, se debe tener $\Sigma\mathbf{M}_O = 0$ en cualquier instante. Al sustituir la ecuación (12.19), se obtiene

$$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

para todos los valores de t e, integrar en t,

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \qquad (12.23)$$

Se concluye en consecuencia que *la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante, tanto en magnitud como en dirección.*

Al recordar la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula (sección 12.7), se escribe

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{constante} \qquad (12.24)$$

de la cual se concluye que el vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula P debe ser perpendicular al vector constante $\mathbf{H}_O$. Por consiguiente, una partícula sometida a una fuerza central se mueve en un plano fijo perpendicular a $\mathbf{H}_O$. El vector $\mathbf{H}_O$ y el plano fijo se definen mediante el vector de posición

inicial $\mathbf{r}_0$ y la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la partícula. Por conveniencia, se considerará que el plano de la figura coincide con el plano fijo de movimiento (figura 12.16).

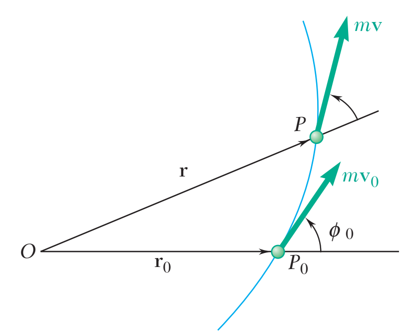


Figura 12.16

Puesto que la magnitud H_O de la cantidad de movimiento angular de la partícula P es constante, el miembro del lado derecho de la ecuación (12.13) debe ser constante. Por lo tanto, se escribe

$$rmv \text{ sen } \phi = r_0 m v_0 \text{ sen } \phi_0 \qquad (12.25)$$

Esta relación se aplica al movimiento de cualquier partícula sometida a una fuerza central. Puesto que la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre un planeta es una fuerza central dirigida hacia el centro del Sol, la ecuación (12.25) es fundamental para el estudio del movimiento planetario. Por una razón similar, también es fundamental para el estudio del movimiento de vehículos espaciales en órbita alrededor de la Tierra.

De manera alternativa, al recordar la ecuación (12.18), es posible expresar el hecho de que la magnitud H_O de la cantidad de movimiento angular de la partícula P es constante al escribir

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante} \qquad (12.26)$$

o, dividir entre m y denotar por h el movimiento angular por masa unitaria H_O/m,

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad (12.27)$$

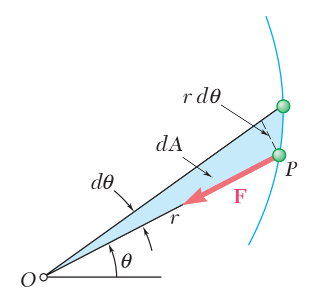


Figura 12.17

Es posible dar a la ecuación (12.27) una interpretación geométrica interesante. Si se observa en la figura 12.17 que el vector radial OP barre un área infinitesimal $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$ conforme gira t un ángulo $d\theta$, y si se define la *velocidad de área* de la partícula como el cociente dA/dt, se nota que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (12.27) representa el doble de la velocidad de área de la partícula. Por consiguiente, se concluye que *cuando una partícula se mueve bajo una fuerza central, su velocidad de área es constante.*

12.10. LEY DE GRAVITACIÓN DE NEWTON

Como se estudió en la sección anterior, la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre un planeta o por la Tierra sobre un satélite en órbita es un ejemplo importante de una fuerza central. En esta sección se aprenderá cómo determinar la magnitud de una fuerza gravitacional.

En su *ley de la gravitación universal,* Newton postuló que dos partículas de masa M y m a una distancia r una de la otra se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que las une (figura 12.18). La magnitud común F de las dos fuerzas es

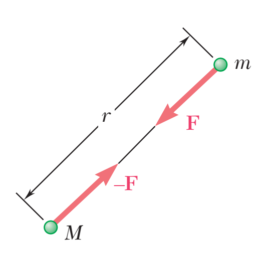


Figura 12.18

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (12.28)$$

donde G es una constante universal, llamada la *constante de gravitación.* Los experimentos indican que el valor de G corresponde a $(66.73 \pm 0.03) \times 10^{-12}$ m^3/kg · s^2 en unidades del SI o aproximadamente 34.4×10^{-9} ft^4/lb · s^4 en unidades del sistema de uso común en Estados Unidos. Las fuerzas gravitacionales existen entre cualquier par de cuerpos, pero su efecto sólo es apreciable cuando uno de los cuerpos tiene una masa muy grande. El efecto de las fuerzas gravitacionales es patente en los casos de movimiento de un planeta alrededor del Sol, de satélites que orbitan alrededor de la Tierra, o de cuerpos que caen sobre la superficie terrestre.

Puesto que la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m localizado sobre o cerca de su superficie se define como el peso **W** del cuerpo, es posible sustituir la magnitud $W = mg$ del peso por F, y el radio R de la Tierra por r, en la ecuación (12.28). Se obtiene

$$W = mg = \frac{GM}{R^2}m \qquad \text{o} \qquad g = \frac{GM}{R^2} \tag{12.29}$$

donde M es la masa de la Tierra. En virtud de que la Tierra no es verdaderamente esférica, la distancia R desde el centro terrestre depende del punto elegido sobre su superficie, y los valores de W y g variarán entonces con la altura y la latitud del punto que se esté considerando. Otra razón para la variación de W y g con la latitud es que un sistema de ejes unido a la Tierra no constituye un sistema de referencia newtoniano (véase la sección 12.2). Una definición más precisa del peso de un cuerpo debe, por lo tanto, incluir una componente que represente la fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre. Los valores de g a nivel del mar varían de 9.781 m/s^2, o 32.09 ft/s^2, en el ecuador, a 9.833 m/s^2, o 32.26 ft/s^2, en los polos.†

La fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m ubicado en el espacio a una distancia r de su centro, puede determinarse a partir de la ecuación (12.28). Los cálculos se simplificarán un poco, ya que de acuerdo con la ecuación (12.29), el producto de la constante de gravitación G y de la masa M de la Tierra puede expresarse como

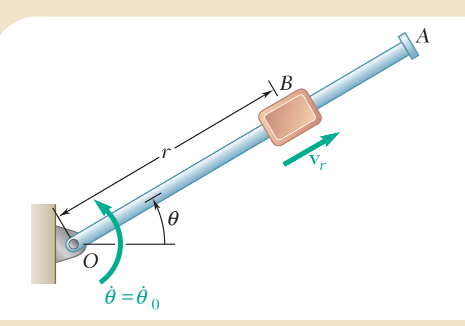
$$GM = gR^2 \tag{12.30}$$

donde g y el radio R de la Tierra serán dados en sus valores promedio $g = 9.81$ m/s^2 y $R = 6.37 \times 10^6$ m en unidades del SI‡ y $g = 32.2$ ft/s^2 y $R = (3\,960 \text{ mi})(5\,280 \text{ ft/mi})$ en unidades de uso común en Estados Unidos.

El descubrimiento de la ley de la gravitación universal se ha atribuido a menudo a la creencia de que, luego de observar la caída de una manzana de un árbol, Newton reflexionó que la Tierra debe atraer a una manzana y a la Luna de la misma manera. Si bien es dudoso que este incidente haya ocurrido en la realidad, sí es posible afirmar que Newton no habría formulado su ley si no hubiera percibido primero que la aceleración de un cuerpo que cae debe ser consecuencia de la misma causa que la aceleración que mantiene a la Luna en su órbita. El concepto básico de la continuidad de la atracción gravitacional se comprende mejor en la actualidad, cuando la brecha entre la manzana y la Luna se está llenando de satélites terrestres artificiales.

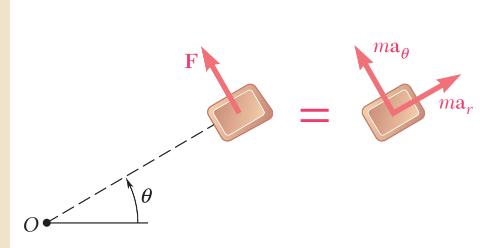
†Una fórmula que expresa g en términos de la latitud ϕ se proporcionó en el problema 12.1.

‡El valor de R se encuentra fácilmente si se recuerda que la circunferencia terrestre es $2\pi R = 40 \times 10^6$ m.



PROBLEMA RESUELTO 12.7

Un bloque B de masa m se puede deslizar libremente sobre un brazo OA sin fricción, que gira en un plano horizontal a razón constante $\dot\theta_0$. Si se sabe que B se suelta a una distancia r_0 de O, exprese como función de r, *a*) la componente v_r de la velocidad de B a lo largo de OA, *b*) la magnitud de la fuerza horizontal $\mathbf{F}$ ejercida sobre B por el brazo OA.



SOLUCIÓN

Puesto que todas las otras fuerzas son perpendiculares al plano de la figura, la única fuerza que se muestra actuando sobre B es la fuerza $\mathbf{F}$ perpendicular a OA.

Ecuaciones de movimiento. Al usar las componentes radial y transversal.

$$+\nearrow\Sigma F_r = ma_r: \qquad 0 = m(\ddot r - r\dot\theta^2) \qquad (1)$$
$$+\nwarrow\Sigma F_\theta = ma_\theta: \qquad F = m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) \qquad (2)$$

***a*) Componente v_r de la velocidad.** Puesto que $v_r = \dot r$, se tiene

$$\ddot r = \dot v_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} = v_r\frac{dv_r}{dr}$$

Al sustituir $\ddot r$ en (1), y recordar que $\dot\theta = \dot\theta_0$ y separar las variables,

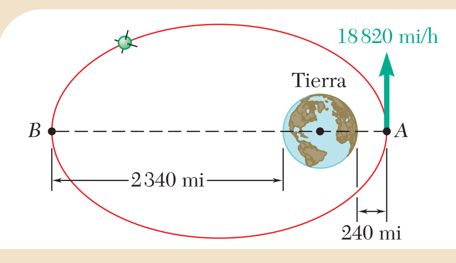
$$v_r\, dv_r = \dot\theta_0^2 r\, dr$$

Al multiplicar por 2 e integrar de 0 a v_r y de r_0 a r,

$$v_r^2 = \dot\theta_0^2(r^2 - r_0^2) \qquad v_r = \dot\theta_0(r^2 - r_0^2)^{1/2} \blacktriangleleft$$

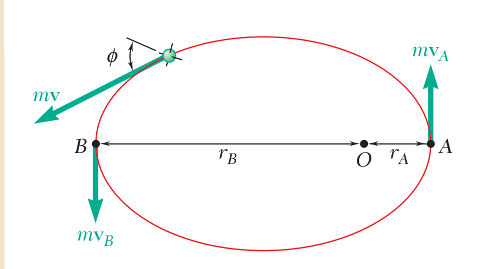
***b*) Fuerza horizontal F.** Al dejar $\dot\theta = \dot\theta_0$, $\ddot\theta = 0$, $\dot r = v_r$ en la ecuación (2), y sustituir la expresión para v_r que se obtuvo en la parte *a*,

$$F = 2m\dot\theta_0(r^2 - r_0^2)^{1/2}\dot\theta_0 \qquad F = 2m\dot\theta_0^2(r^2 - r_0^2)^{1/2} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.8

Se lanza un satélite en dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 18 820 mi/h desde una altura de 240 mi. Determine la velocidad del satélite cuando éste alcanza su altura máxima de 2 340 mi. Recuérdese que el radio de la Tierra es de 3 960 mi.



SOLUCIÓN

Puesto que el satélite se mueve bajo el efecto de una fuerza central dirigida hacia el centro O de la Tierra, su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ es constante. De la ecuación (12.13) se tiene

$$rmv \text{ sen } \phi = H_O = \text{constante}$$

que muestra que v es mínima en B, donde tanto r como sen ϕ son máximos. Al expresar la conservación de la cantidad de movimiento angular entre A y B.

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = v_A\frac{r_A}{r_B} = (18\,820 \text{ mi/h})\frac{3\,960 \text{ mi} + 240 \text{ mi}}{3\,960 \text{ mi} + 2\,340 \text{ mi}}$$

$$v_B = 12\,550 \text{ mi/h} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se continuó el estudio de la segunda ley de Newton expresando la fuerza y la aceleración en términos de sus *componentes radial y transversal,* donde las ecuaciones de movimiento correspondientes son

$\Sigma F_r = ma_r$: $\qquad \Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$
$\Sigma F_\theta = ma_\theta$: $\qquad \Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

Se introdujo el *momento de la cantidad de movimiento*, o la *cantidad de movimiento angular,* $\mathbf{H}_O$ de una partícula alrededor de O

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (12.12)$$

y se encontró que $\mathbf{H}_O$ es constante cuando la partícula se mueve bajo una *fuerza central* con su centro localizado en O.

1. Empleo de las componentes radial y transversal. Las componentes radial y transversal se presentaron en la última lección del capítulo 11 [sección 11.14]; es necesario que se repase dicho material antes de tratar de resolver los siguientes problemas. Además, los comentarios en la lección anterior respecto a la aplicación de la segunda ley de Newton (dibujo de un diagrama de cuerpo libre y un diagrama $m\mathbf{a}$, etc.) siguen aplicándose [problema resuelto 12.7]. Por último, hay que percatarse de que la solución de ese problema resuelto depende de la aplicación de las técnicas que se desarrollaron en el capítulo 11 —es necesario recurrir a técnicas similares para resolver algunos de los problemas de esta lección—.

2. Resolución de problemas que implican el movimiento de una partícula sometida a una fuerza central. En problemas de este tipo se conserva la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula alrededor del centro de fuerza O. Es conveniente introducir la constante $h = H_O/m$, que representa la cantidad del movimiento angular por unidad de masa. La conservación de la cantidad del movimiento angular de la partícula P en torno a O se expresa entonces mediante alguna de las siguientes ecuaciones

$$rv \text{ sen } \phi = h \qquad \text{o} \qquad r^2\dot{\theta} = h$$

donde r y θ son las coordenadas polares de P, y ϕ es el ángulo que la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula forma con la línea OP (figura 12.16). La constante h se determina a partir de las condiciones iniciales y es posible resolver cualquiera de las ecuaciones anteriores para una de las incógnitas.

3. En los problemas de mecánica celeste que implican el movimiento orbital de un planeta alrededor del Sol, o un satélite en torno a la Tierra, la Luna o algún

(*continúa*)

otro planeta, la fuerza central **F** es la fuerza de la atracción gravitacional; ésta se dirige *hacia* el centro de fuerza O y tiene la magnitud

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (12.28)$$

Adviértase que en el caso particular de la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra, el producto GM puede sustituirse por gR^2, donde R es el radio terrestre [ecuación 12.30].

Con frecuencia se encuentran los siguientes dos casos de movimiento orbital:

a) En el caso de un satélite en órbita circular, la fuerza **F** es normal a la órbita y se puede escribir $F = ma_n$; al sustituir F de la ecuación (12.28) y observar que $a_n = v^2/\rho = v^2/r$, se obtendrá

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{o} \qquad v^2 = \frac{GM}{r}$$

b) Para un satélite en una órbita elíptica, el vector del radio **r** y la velocidad **v** del satélite son perpendiculares entre sí en los puntos A y B, los cuales son, respectivamente, el más alejado y el más cercano al centro de fuerza O [problema resuelto 12.8]. De tal manera, la conservación del momento angular del satélite entre estos dos puntos se expresa como

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

Problemas

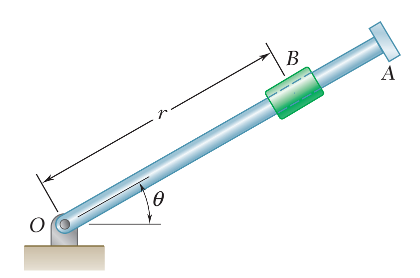


Figura P12.66 y P12.68

12.66 La varilla OA gira alrededor de O en un plano horizontal. El movimiento del collarín B de 300 g se define mediante las relaciones $r = 300 + 100 \cos (0.5\, \pi t)$ y $\theta = \pi(t^2 - 3t)$, donde r se expresa en milímetros, t en segundos y θ en radianes. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el collarín cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $t = 0.5$ s.

12.67 Para el movimiento definido en el problema 12.66, determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el collarín cuando $t = 1.5$ s.

12.68 La varilla OA gira alrededor de O en un plano horizontal. El movimiento del collarín B de 5 lb se define mediante las relaciones $r = 10/(t + 4)$ y $\theta = (2/\pi)$ sen πt, donde r se expresa en pies, t en segundos y θ en radianes. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el collarín cuando *a*) $t = 1$ s y *b*) $t = 6$ s.

12.69 Un collarín B de masa m se desliza sobre un brazo AA' sin fricción. El brazo está unido a un tambor D y gira alrededor de O en un plano horizontal a una razón $\dot{\theta} = ct$, donde c es una constante. Cuando el arreglo brazo-tambor gira, un mecanismo dentro del tambor libera una cuerda de manera que el collarín se mueve hacia afuera a partir de O con una rapidez constante k. Si se sabe que en $t = 0$, $r = r_0$, exprese como una función de m, c, k, r_0 y t, *a*) la tensión T en la cuerda, *b*) la magnitud de la fuerza horizontal $\mathbf{Q}$ ejercida por el brazo AA' sobre B.

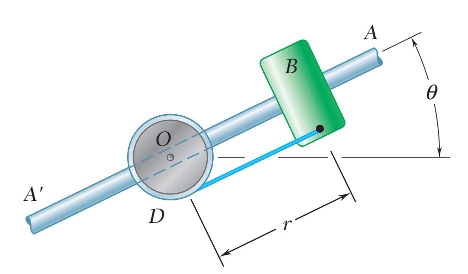


Figura P12.69 y P12.70

12.70 El collarín B de 3 kg se desliza sobre un brazo AA' sin fricción. El brazo está unido a un tambor D y gira alrededor de O en un plano horizontal a una razón $\dot{\theta} = 0.75t$, donde $\dot{\theta}$ y t se expresan en rad/s y segundos, respectivamente. Cuando el arreglo brazo-tambor gira, un mecanismo dentro del tambor libera una cuerda de manera que el collarín se mueve hacia afuera a partir de O con una rapidez constante de 0.5 m/s. Si se sabe que en $t = 0$, $r = 0$, determine el tiempo al cual la tensión en la cuerda es igual a la magnitud de la fuerza horizontal que ejerce el brazo AA' sobre B.

12.71 El pasador B de 100 g se desliza a lo largo de la ranura en el brazo rotatorio OC y a lo largo de la ranura DE, la cual se cortó en una placa horizontal fija. Si se ignora la fricción y se sabe que el brazo OC gira a una razón constante $\dot{\theta}_0 = 12$ rad/s, determine para cualquier valor dado de θ *a*) las componentes radial y transversal de la fuerza resultante **F** que se ejerce sobre el pasador B, *b*) las fuerzas **P** y **Q** ejercidas sobre el pasador B por el brazo OC y la pared de la ranura DE, respectivamente.

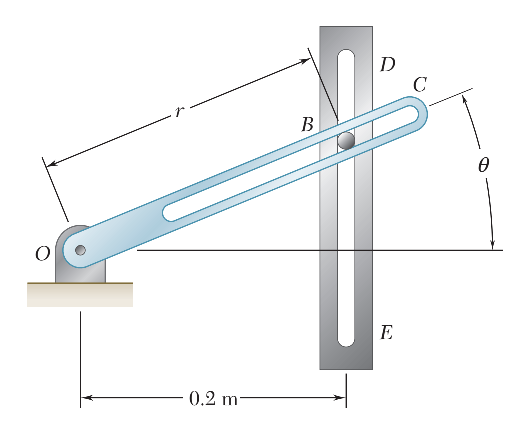


Figura P12.71

***12.72** El deslizador C tiene un peso de 0.5 lb y puede moverse por una ranura cortada en un brazo AB, el cual gira a razón constante $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s en un plano horizontal. El deslizador se encuentra unido a un resorte con razón constante $k = 2.5$ lb/ft que se encuentra sin estirar cuando $r = 0$. Si el deslizador se suelta desde el reposo sin velocidad radial en la posición $r = 18$ in. y no se toma en cuenta la fricción, determine para la posición $r = 12$ in. *a*) las componentes radial y transversal de la velocidad del deslizador, *b*) las componentes radial y transversal de su aceleración, *c*) la fuerza horizontal ejercida sobre el deslizador por el brazo AB.

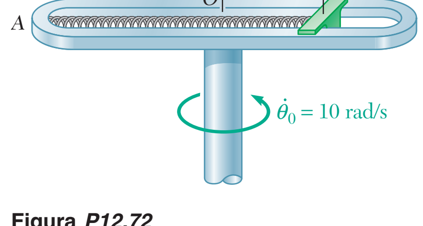
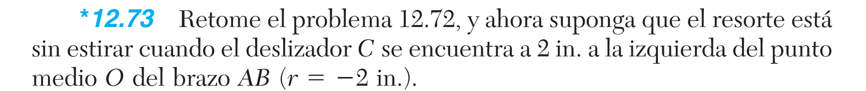


Figura *P12.72*


***12.73** Retome el problema 12.72, y ahora suponga que el resorte está sin estirar cuando el deslizador C se encuentra a 2 in. a la izquierda del punto medio O del brazo AB ($r = -2$ in.).

12.74 Una partícula de masa m se lanza desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a la línea OA y se mueve bajo una fuerza central **F** a lo largo de una trayectoria semicircular de diámetro OA. Si se observa que $r = r_0 \cos \theta$ y se usa la ecuación (12.27), demuestre que la rapidez de la partícula es $v = v_0/\cos^2 \theta$.

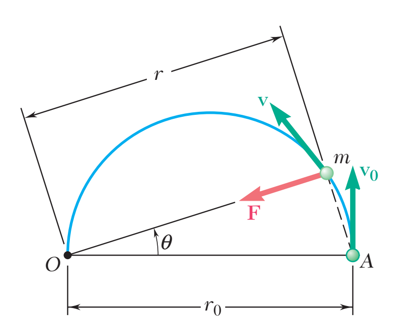


Figura P12.74

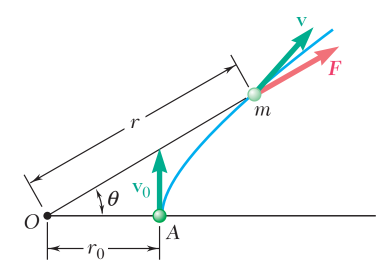


Figura P12.76

12.75 Para la partícula del problema 12.74, determine la componente tangencial F_t de la fuerza central **F** a lo largo de la tangente a la trayectoria de la partícula para *a*) $\theta = 0$ y *b*) $\theta = 45°$.

12.76 Una partícula de masa m se lanza desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a la línea OA y se mueve bajo la acción de una fuerza central **F** que se aleja del centro de fuerza O. Si la partícula sigue una trayectoria definida por la ecuación $r = r_0/\sqrt{\cos 2\theta}$ y se usa la ecuación (12.27), exprese las componentes radial y transversal de la velocidad **v** de la partícula como funciones de θ.

12.77 Para la partícula del problema 12.76, demuestre *a*) que la velocidad de la partícula y la fuerza central **F** son proporcionales a la distancia r de la partícula al centro de fuerza O y *b*) que el radio de curvatura de la trayectoria es proporcional a r^3.

12.78 El radio de la órbita de una luna de determinado planeta es igual al doble del radio de dicho planeta. Si se denota mediante ρ la densidad media del planeta, demuestre que el tiempo que requiere la luna para completar una revolución alrededor del planeta es $(24\pi/G\rho)^{1/2}$, donde G es la constante de gravitación.

12.79 Demuestre que el radio r de la órbita de una luna de un planeta dado puede determinarse a partir del radio R del planeta, la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta y el tiempo τ requerido por la luna para dar una revolución completa alrededor del planeta. Determine la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Júpiter si se sabe que $R = 71\,492$ km, $\tau = 3.551$ días y $r = 670.9 \times 10^3$ km en el caso de su luna Europa.

12.80 Los satélites de comunicaciones se ubican en una órbita geosincrónica, es decir, en una órbita circular tal que terminan una revolución completa alrededor de la Tierra en un día sideral (23.934 h), y de esa manera parecen estacionarios con respecto a la superficie terrestre. Determine *a*) la altura de estos satélites sobre la superficie de la Tierra y *b*) la velocidad con la cual describen su órbita. Dé su respuesta en unidades tanto del SI como de uso común en Estados Unidos.

12.81 Determine la masa de la Tierra si se sabe que el radio medio de la órbita de la Luna alrededor de nuestro planeta es de 238 910 mi y que la Luna requiere 27.32 días para completar una vuelta completa alrededor de la Tierra.

12.82 Una nave espacial se coloca en una órbita polar alrededor del planeta Marte a una altura de 380 km. Si se sabe que la densidad media de Marte es de 3.94 Mg/m^3 y que el radio de Marte es de 3 397 km, determine *a*) el tiempo τ que se requiere para que la nave espacial complete una revolución alrededor de Marte, *b*) la velocidad con la que la nave espacial describe su órbita.

12.83 Un satélite se coloca en una órbita circular alrededor del planeta Saturno a una altura de 2 100 mi. El satélite describe su órbita con una velocidad de 54.7×10^3 mi/h. Si el radio de la órbita alrededor de Saturno y el periodo orbital de Atlas, una de las lunas de Saturno, son 85.54×10^3 mi y 0.6017 días, respectivamente, determine *a*) el radio de Saturno y *b*) la masa de Saturno. (El *periodo orbital* de un satélite es el tiempo que requiere para dar una revolución completa alrededor de un planeta.)

12.84 Se ha observado que los periodos orbitales (vea el problema 12.83) de las lunas Julieta y Titania de Urano son 0.4931 días y 8.706 días, respectivamente. Si se sabe que el radio de la órbita de Julieta es de 64 360 km, determine *a*) la masa de Urano y *b*) el radio de la órbita de Titania.

12.85 Una nave espacial de 1 200 lb se ubica primero en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 2 800 mi y después se transfiere a una órbita circular alrededor de la Luna. Si se sabe que la masa de la Luna es 0.01230 veces la masa de la Tierra y el radio de la Luna corresponde a 1 080 mi, determine *a*) la fuerza gravitacional que se ejerció sobre la nave espacial cuando orbitaba la Tierra, *b*) el radio requerido de la órbita de la nave espacial alrededor de la Luna si los periodos orbitales (vea el problema 12.83) de las dos órbitas deben ser iguales y *c*) la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.

12.86 Para colocar un satélite de comunicaciones en una órbita geosincrónica (vea el problema 12.80) a una altura de 22 240 mi sobre la superficie terrestre, el satélite se libera primero de un transbordador espacial, el cual está en una órbita circular a una altura de 185 mi, y después es lanzado por un impulsador de plataforma superior hasta su altura final. Cuando el satélite pasa por *A*, el motor del impulsor se enciende para incorporar al satélite en la órbita de transferencia elíptica. El impulsor se enciende de nuevo en *B* para incorporar al satélite en la órbita geosincrónica. Si se sabe que el segundo encendido aumenta la velocidad del satélite en 4 810 ft/s, determine *a*) la rapidez del satélite cuando se acerca a *B* sobre la órbita de transferencia elíptica, *b*) el aumento en la rapidez que resulta del primer encendido en *A*.

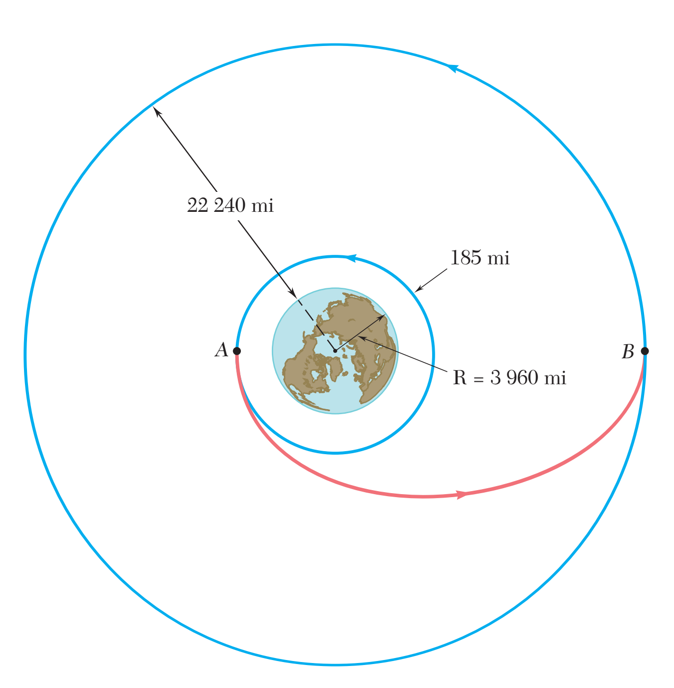


Figura P12.86

12.87 Un vehículo espacial está en una órbita circular de 2 200 km de radio alrededor de la Luna. Para pasar a una órbita más pequeña de 2 080 km de radio, el vehículo se ubica primero en una trayectoria elíptica *AB* reduciendo su rapidez en 26.3 m/s cuando pasa por *A*. Si se sabe que la masa de la Luna es de 73.49×10^{21} kg, determine *a*) la rapidez del vehículo cuando se aproxima a *B* sobre la trayectoria elíptica, *b*) la cantidad que su rapidez debe reducirse cuando se aproxima a *B* para incorporarse a la órbita circular más pequeña.

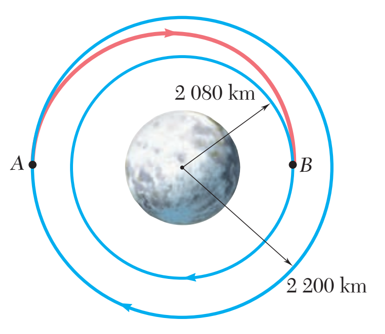


Figura P12.87

12.88 Los planes para una misión no tripulada al planeta Marte requieren que el vehículo de regreso a la Tierra primero describa una órbita circular a una altura $d_A = 2\ 200$ km sobre la superficie del planeta con una velocidad de 2 771 m/s. Al pasar por el punto A, el vehículo se incorporará a una órbita elíptica de transferencia encendiendo su motor y aumentando su velocidad en $\Delta v_A = 1\ 046$ m/s. Cuando pase por el punto B, a una altura $d_B = 100\ 000$ km, el vehículo debe incorporarse a una segunda órbita de transferencia localizada en un plano ligeramente diferente, cambiando la dirección de su velocidad y reduciendo su rapidez en $\Delta v_B = -22.0$ m/s. Por último, cuando el vehículo pase por el punto C, a una altura $d_C = 1\ 000$ km, su rapidez debe aumentar en $\Delta v_C = 660$ m/s para ingresar a su trayectoria de regreso. Si se sabe que el radio del planeta Marte es $R = 3\ 400$ km, determine la velocidad del vehículo después de completar la última maniobra.

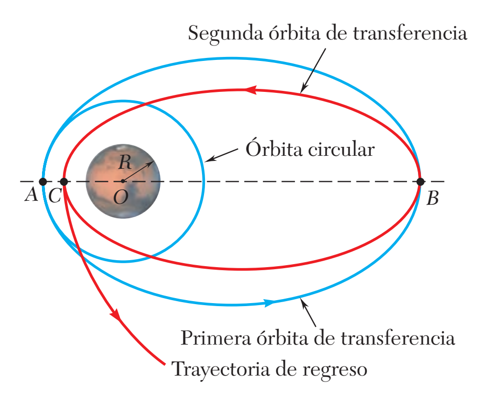


Figura P12.88

12.89 Un transbordador espacial S y un satélite A se encuentran en las órbitas circulares que se muestran en la figura. Para recuperar el satélite, el transbordador se ubica primero en una trayectoria elíptica BC incrementando su rapidez en $\Delta v_B = 280$ ft/s cuando pasa a través de B. Cuando el transbordador se aproxima a C, su rapidez se incrementa en $\Delta v_C = 260$ ft/s para incorporarlo en la segunda órbita de transferencia elíptica CD. Si se sabe que la distancia de O a C es de 4 289 mi, determine la cantidad en la cual la rapidez del transbordador debe incrementarse cuando se aproxima a D para insertarlo en la órbita circular del satélite.

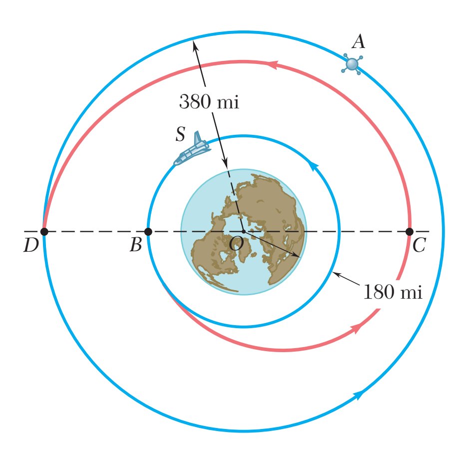


Figura P12.89

12.90 Un collarín de 3 lb puede deslizarse sobre una varilla horizontal la cual gira libremente alrededor de un eje vertical. El collarín se sostiene inicialmente en A mediante una cuerda unida al eje y comprime un resorte con una constante de 2 lb/ft, el cual está sin deformar cuando el collarín se localiza en A. Cuando el eje gira a la tasa $\dot{\theta} = 16$ rad/s, la cuerda se corta y el collarín se mueve hacia fuera a lo largo de la varilla. Si se desprecia la fricción y la masa de la varilla, determine *a*) las componentes radial y transversal de la aceleración del collarín en A, *b*) la aceleración del collarín relativa a la varilla en A, *c*) la componente transversal de la velocidad del collarín en B.

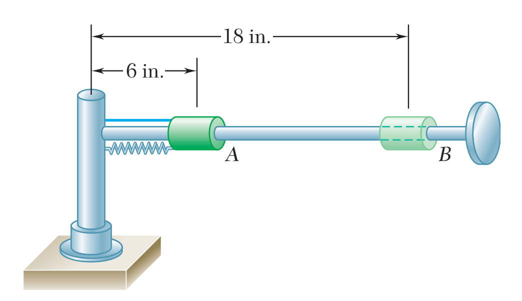


Figura P12.90

12.91 Para el collarín del problema 12.90, suponga que la varilla gira inicialmente a una razón $\dot{\theta} = 12$ rad/s, determine para la posición B del collarín, *a*) la componente transversal de la velocidad del collarín, *b*) las componentes radial y transversal de su aceleración, *c*) la aceleración del collarín respecto a la varilla.

12.92 Una bola A de 200 g y una bola B de 400 g se montan sobre una varilla horizontal que gira libremente alrededor de un eje vertical. Las bolas se mantienen en las posiciones indicadas mediante pasadores. El pasador que sostiene a B se quita repentinamente y la bola se mueve a la posición C cuando gira la varilla. Si se desprecia la fricción y la masa de la varilla, y se sabe que la rapidez inicial de A es $v_A = 2.5$ m/s, determine *a*) las componentes radial y transversal de la aceleración de la bola B inmediatamente después de que se quita el pasador, *b*) la aceleración de la bola B relativa a la varilla en ese instante y *c*) la rapidez de la bola A después de que la bola B ha alcanzado el reposo en C.

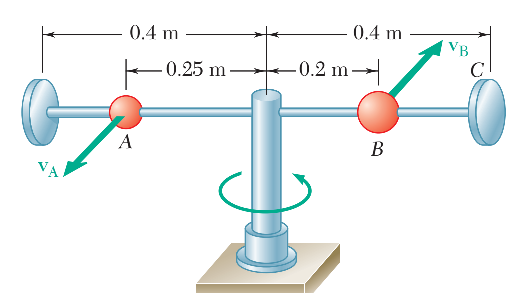


Figura *P12.92*

12.93 Una pequeña bola gira en un círculo horizontal en los extremos de una cuerda de longitud l_1, la cual forma un ángulo θ_1 con la vertical. Después se jala el cordón lentamente a través del soporte en O hasta que la longitud del extremo libre es igual a l_2. *a*) Obtenga una relación entre l_1, l_2, θ_1 y θ_2. *b*) Si la bola se pone en movimiento de manera que al principio $l_1 = 0.8$ m y $\theta_1 = 35°$, determine el ángulo θ_2 cuando $l_2 = 0.6$ m.

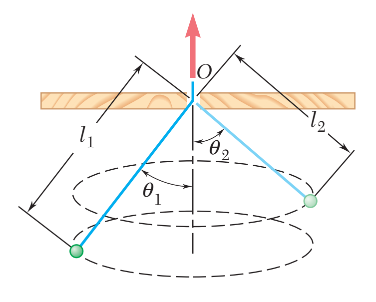


Figura *P12.93*

*12.11. TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CENTRAL

Considérese una partícula P que se mueve bajo el efecto de una fuerza central $\mathbf{F}$. Se desea obtener la ecuación diferencial que define su trayectoria.

Si se supone que la fuerza $\mathbf{F}$ está dirigida hacia el centro de fuerza O, se tiene que ΣF_r y ΣF_θ se reducen, respectivamente, a $-F$ y cero en las ecuaciones (12.21) y (12.22). Por lo tanto, se escribe

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \qquad (12.31)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad (12.32)$$

Estas ecuaciones definen el movimiento de P. Sin embargo, se sustituye la ecuación (12.32) por la ecuación (12.27), la cual es equivalente a la ecuación (12.32), lo cual se verifica sin dificultad al diferenciarla con respecto a t, pero cuyo uso es más conveniente. Se escribe

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad \text{o} \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = h \qquad (12.33)$$

La ecuación (12.33) se usa para eliminar la variable independiente t de la ecuación (12.31). Al resolver la ecuación (12.33) para $\dot{\theta}$ o $d\theta/dt$, se tiene

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \qquad (12.34)$$

de la cual se deduce que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (12.35)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

o, al sustituir $\dot{r}$ de (12.35),

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (12.36)$$

Al sustituir θ y $\ddot{r}$ de (12.34) y (12.36), respectivamente, en la ecuación (12.31) e introducir la función $u = 1/r$, se obtiene después de simplificaciones

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \qquad (12.37)$$

Para obtener la ecuación (12.37), se supuso que la fuerza $\mathbf{F}$ estaba dirigida hacia O. Por lo tanto, la magnitud F será positiva si $\mathbf{F}$ realmente apunta hacia O (fuerza atractiva) y negativa si $\mathbf{F}$ apunta alejándose de O (fuerza repulsiva). Si F es una función conocida de r y, en consecuencia, de u, la ecuación (12.37) es una ecuación diferencial en u y θ que define a la trayectoria seguida por la partícula bajo la acción de la fuerza central $\mathbf{F}$. La ecuación de la trayectoria se obtiene al resolver la ecuación diferencial (12.37) para u con una función de θ y al determinar las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales.

*12.12. APLICACIÓN EN MECÁNICA CELESTE

Después de que ha finalizado la última etapa de los cohetes de lanzamiento, los satélites terrestres y otros vehículos espaciales están sujetos sólo a la atracción gravitacional de la Tierra. En consecuencia, es posible determinar su movimiento de las ecuaciones (12.33) y (12.37), las cuales gobiernan el movimiento de una partícula bajo una fuerza central, luego de que F se ha sustituido por la expresión que se obtuvo para la fuerza de atracción gravitacional.[†] Al sustituir la expresión en la ecuación (12.37)

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

donde M = masa de la Tierra
m = masa del vehículo
r = distancia del centro de la Tierra al vehículo
$u = 1/r$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \qquad (12.38)$$

donde se observa que el miembro del lado derecho es una constante.

La solución de la ecuación diferencial (12.38) se obtiene al sumar la solución particular $u = GM/h^2$ a la solución general $u = C\cos(\theta - \theta_0)$ de la ecuación homogénea correspondiente (esto es, la ecuación que se obtiene al igualar a 0 el miembro del lado derecho). Si se fija el eje polar de manera que $\theta_0 = 0$, se escribe

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \qquad (12.39)$$

La ecuación (12.39) es la correspondiente a una *sección cónica* (elipse, parábola o hipérbola) en las coordenadas polares r y θ. El origen O de las coordenadas, el cual se ubica en el centro de la Tierra, es un foco de esta sección cónica, y el eje polar es uno de sus ejes de simetría (figura 12.19).

El cociente entre las constantes C y GM/h^2 define la *excentricidad* ε de la sección cónica; al dejar

$$\varepsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM} \qquad (12.40)$$

puede escribirse la ecuación (12.39) en la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\theta) \qquad (12.39')$$

Esta ecuación representa las tres posibles trayectorias.

1. $\varepsilon > 1$, o $C > GM/h^2$: hay dos valores θ_1 y $-\theta_1$ del ángulo polar, definido $\cos\theta_1 = -GM/Ch^2$, para los cuales el miembro

[†]Se supone que los vehículos espaciales considerados aquí son atraídos únicamente por la Tierra, y que sus masas son ignorables en comparación con la masa de la Tierra. Si un vehículo se mueve muy alejado de la Tierra su trayectoria quizá sea afectada por la atracción del Sol, la Luna u otro planeta.



Fotografía 12.5 El telescopio Hubble fue puesto en órbita por el transbordador espacial en 1990 (primera geosincrónica de la NASA).

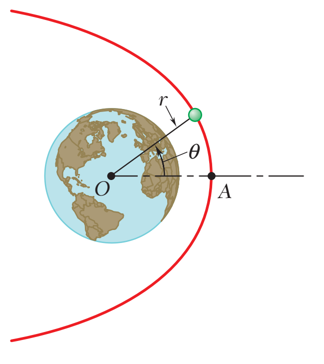


Figura 12.19

derecho de la ecuación (12.39) se vuelve cero. Para estos dos valores, el vector radio r se vuelve infinito; la sección cónica es una *hipérbola* (figura 12.20).

2. $\varepsilon = 1$, o $C = GM/h^2$: el vector radio se vuelve infinito para $\theta = 180°$; la sección cónica es una *parábola*.
3. $\varepsilon < 1$, o $C < GM/h^2$: el vector radio permanece finito para todo valor de θ; la sección cónica es una *elipse*. En el caso particular en que $\varepsilon = C = 0$, la longitud del vector radio es constante, la sección cónica es un círculo.

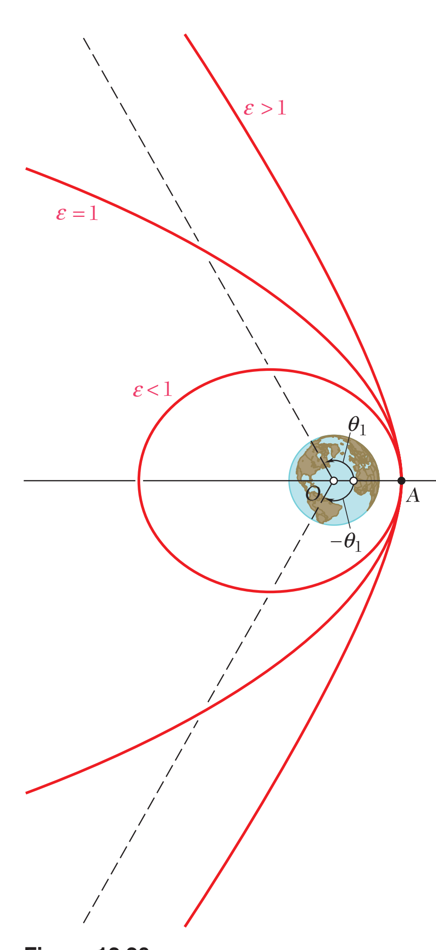


Figura 12.20

Ahora se verá cómo las constantes C y GM/h^2, que caracterizan la trayectoria de un vehículo espacial, se determinan a partir de la posición y velocidad del vehículo al principio de su vuelo libre. Se considera que, como es en general el caso, la fase impulsada de su vuelo se ha programado de manera tal que al consumirse la última etapa del cohete de lanzamiento, el vehículo tiene una velocidad paralela a la superficie de la Tierra (figura 12.21). En otras palabras, se supondrá que el vehículo espacial empieza su vuelo libre en el vértice A de su trayectoria.†

Al denotar el vector radio y la velocidad del vehículo al principio de su vuelo libre, respectivamente, por r_0 y v_0, se observa que la velocidad se reduce a su componente transversal y, en consecuencia, que $v_0 = r_0\dot{\theta}_0$. Al recordar la ecuación (12.27), se expresa el momento angular por masa unitaria h como

$$h = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \qquad (12.41)$$

Es posible utilizar el valor obtenido para h para determinar la constante GM/h^2. También se tiene que el cálculo de esta constante se simplificará si se usa la relación que se obtuvo en la sección 12.10:

$$GM = gR^2 \qquad (12.30)$$

donde R es el radio de la Tierra ($R = 6.37 \times 10^6$ m o 3 960 mi) y g es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

La constante C se obtiene fijando $\theta = 0$, $r = r_0$ en (12.39):

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \qquad (12.42)$$

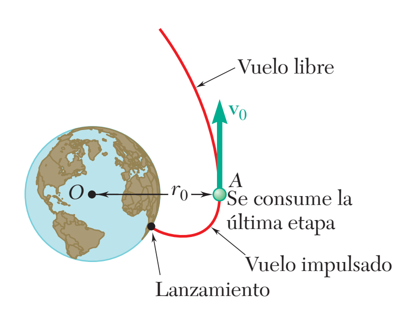


Figura 12.21

Al sustituir h de (12.41), es posible expresar fácilmente C en términos de r_0 y v_0.

Se determinarán ahora las condiciones iniciales correspondientes a cada una de las tres trayectorias fundamentales indicadas antes. Al considerar primero la trayectoria parabólica, se hace C igual a GM/h^2 en la ecuación (12.42) y se elimina h entre las ecuaciones (12.41) y (12.42). Al resolver para v_0, se obtiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Se puede verificar fácilmente que un valor mayor de la velocidad inicial corresponde a una trayectoria hiperbólica y que un valor más pequeño corresponde a una órbita elíptica. Puesto que el valor de v_0 que se

†Los problemas que impliquen lanzamientos oblicuos se considerarán en la sección 13.9.

obtuvo para la trayectoria parabólica es el valor más pequeño para el cual el vehículo espacial no regresa a su punto de inicio, recibe el nombre de *velocidad de escape*. Por consiguiente, se escribe

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \qquad \text{o} \qquad v_{esc} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} \tag{12.43}$$

si se recurre a la ecuación (12.30). Se advierte que la trayectoria será 1) hiperbólica si $v_0 > v_{esc}$, 2) parabólica si $v_0 = v_{esc}$ y 3) elíptica si $v_0 < v_{esc}$.

Entre las diversas órbitas elípticas posibles, la que se obtiene cuando $C = 0$, la *órbita circular*, resulta de interés especial. Se encuentra con facilidad que el valor de la velocidad inicial correspondiente a una órbita circular es

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \qquad \text{o} \qquad v_{circ} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \tag{12.44}$$

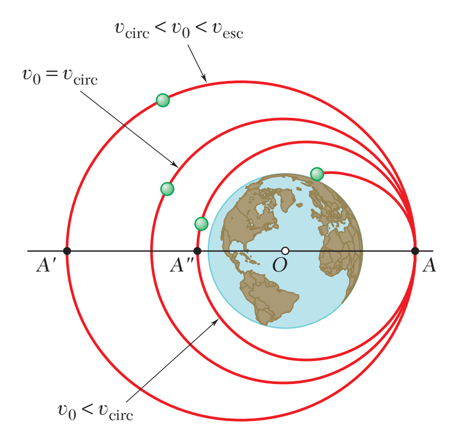


Figura 12.22

si se toma en cuenta la ecuación (12.30). De la figura 12.22 se tiene que para valores v_0 mayores que v_{circ} pero más pequeños que v_{esc}, el punto A donde se inicia el vuelo libre es el punto de la órbita más cercano a la Tierra; este punto recibe el nombre de *perigeo*, mientras que el punto A', que es el más alejado de la Tierra, se conoce como *apogeo*. Para valores de v_0 más pequeños que v_{circ}, el punto A es el apogeo, en tanto que el punto A'', en el otro lado de la órbita, es el perigeo. Para valores de v_0 mucho más pequeños que v_{circ}, la trayectoria del vehículo espacial intercepta la superficie de la Tierra; en tal caso, el vehículo no entra en órbita.

Los misiles balísticos, que se diseñan para golpear contra la superficie terrestre, también viajan a lo largo de trayectorias elípticas. En realidad, se debe reconocer ahora que cualquier objeto lanzado en el vacío con una velocidad inicial v_0 más pequeña que v_{circ} se moverá a lo largo de una trayectoria elíptica. Sólo en el caso en que las distancias implicadas son pequeñas es posible suponer que el campo gravitacional de la Tierra es uniforme, y que la trayectoria elíptica puede aproximarse mediante una trayectoria parabólica, como se hizo antes (sección 11.11) en el caso de proyectiles convencionales.

Periodo orbital. Una característica importante del movimiento de un satélite terrestre es el tiempo que éste requiere para describir su órbita. Este tiempo, conocido como el *periodo orbital* del satélite, se denota mediante τ. Observamos primero, en vista de la definición de velocidad de área (sección 12.9), que τ se obtiene al dividir el área dentro de la órbita entre la velocidad de área. Al advertir que el área de una elipse es igual a πab, donde a y b denotan, respectivamente, los semiejes mayor y menor, y que la velocidad de área es igual a $h/2$, se escribe

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \tag{12.45}$$

En tanto que h puede determinarse de inmediato a partir de r_0 y v_0 en el caso de un satélite lanzado en una dirección paralela a la superficie terrestre, los semiejes a y b no se relacionan directamente con las condiciones iniciales. Puesto que, por otro lado, los valores de r_0 y r_1 de r correspondientes al perigeo y al apogeo de la órbita pueden determinarse sin dificultades a partir de la ecuación (12.39), se expresan los semiejes a y b en términos de r_0 y r_1.

Considérese la órbita elíptica que se muestra en la figura 12.23. El centro de la Tierra se ubica en O y coincide con uno de los dos focos de

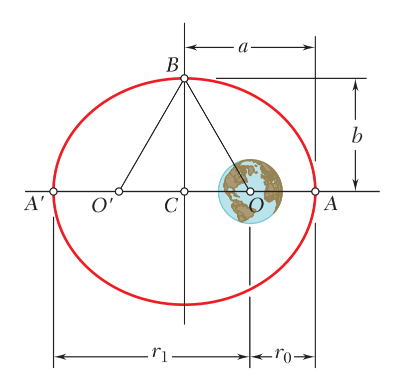


Figura 12.23

la elipse, en tanto que los puntos A y A' representan, respectivamente, el perigeo y el apogeo de la órbita. Fácilmente se confirma que

$$r_0 + r_1 = 2a$$

y consecuentemente

$$a = \tfrac{1}{2}(r_0 + r_1) \tag{12.46}$$

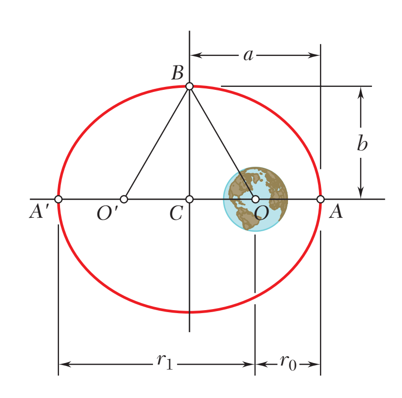


Figura 12.23 (*repetida*)

Si se recuerda que la suma de las distancias desde cada uno de los focos hasta cualquier punto de la elipse es constante, se escribe

$$O'B + BO = O'A + OA = 2a \qquad \text{o} \qquad BO = a$$

Por otro lado, se tiene que $CO = a - r_0$. Por lo tanto, es posible escribir

$$b^2 = (BC)^2 = (BO)^2 - (CO)^2 = a^2 - (a - r_0)^2$$
$$b^2 = r_0(2a - r_0) = r_0 r_1$$

y, por consiguiente,

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{12.47}$$

Las fórmulas (12.46) y (12.47) indican que los semiejes mayor y menor de la órbita son iguales, respectivamente, a la media aritmética y geométrica de los valores máximo y mínimo del vector radio. Una vez que r_0 y r_1 se han determinado, las longitudes de los semiejes pueden calcularse fácilmente y sustituirse por a y b en la fórmula (12.45).

*12.13. LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un satélite terrestre se pueden utilizar para describir el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. En este caso, sin embargo, la masa de la Luna no es despreciable comparada con la masa terrestre, y los resultados que se obtienen no son del todo precisos.

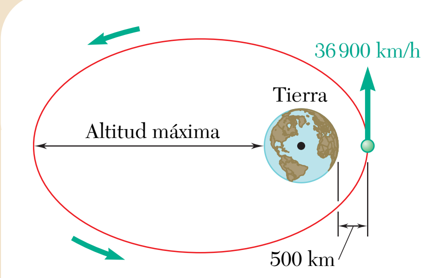
La teoría que se desarrolló en las secciones precedentes también se aplican al estudio del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Aunque se introduce otro error al ignorar las fuerzas que los planetas ejercen entre sí, la aproximación que se obtiene es excelente. De hecho, incluso antes de que Newton hubiera formulado su teoría fundamental, las propiedades expresadas por la ecuación (12.39), donde M representa la masa del Sol, y mediante la ecuación (12.33) habían sido descubiertas por el astrónomo alemán Johann Kepler (1571-1630) a partir de observaciones astronómicas del movimiento de los planetas.

Las tres *leyes del movimiento planetario* de Kepler se enuncian del modo siguiente.

1. Cada planeta describe una elipse, con el Sol ubicado en uno de sus focos.
2. El vector radio trazado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de tiempos periódicos de los planetas son proporcionales a los cubos de los ejes semimayores de sus órbitas.

La primera ley establece un caso particular del resultado que se estableció en la sección 12.12, y la segunda ley expresa que la velocidad de área de cada planeta es constante (véase la sección 12.9). También es posible obtener la tercera ley de Kepler de los resultados a los que se llegó en la sección 12.12.[†]

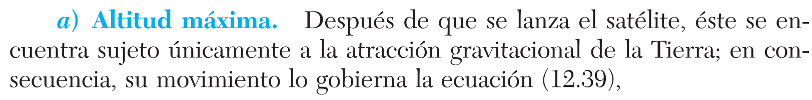
[†]Véase el problema 12.121.



PROBLEMA RESUELTO 12.9

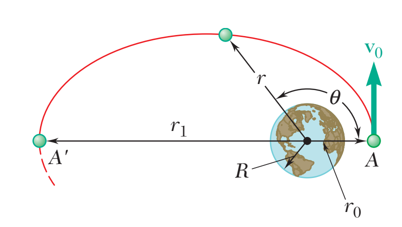
Un satélite se lanza en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altura de 500 km. Determine *a*) la altitud máxima alcanzada por el satélite, *b*) el periodo orbital del satélite.

SOLUCIÓN

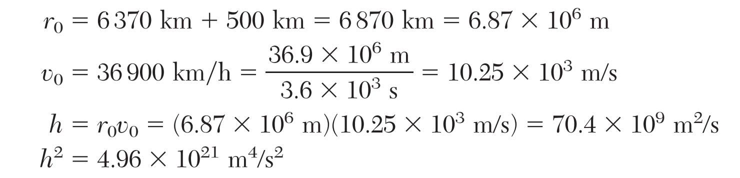


***a*) Altitud máxima.** Después de que se lanza el satélite, éste se encuentra sujeto únicamente a la atracción gravitacional de la Tierra; en consecuencia, su movimiento lo gobierna la ecuación (12.39),

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \qquad (1)$$



Puesto que la componente radial de la velocidad es cero en el punto de lanzamiento A, se tiene $h = r_0 v_0$. Al recordar que para la Tierra $R = 6\,370$ km, se calcula



$$r_0 = 6\,370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6\,870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m}$$
$$v_0 = 36\,900 \text{ km/h} = \frac{36.9 \times 10^6 \text{ m}}{3.6 \times 10^3 \text{ s}} = 10.25 \times 10^3 \text{ m/s}$$
$$h = r_0 v_0 = (6.87 \times 10^6 \text{ m})(10.25 \times 10^3 \text{ m/s}) = 70.4 \times 10^9 \text{ m}^2\text{/s}$$
$$h^2 = 4.96 \times 10^{21} \text{ m}^4\text{/s}^2$$



Puesto que $GM = gR^2$, donde R es el radio de la Tierra, se tiene

$$GM = gR^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3\text{/s}^2$$
$$\frac{GM}{h^2} = \frac{398 \times 10^{12} \text{ m}^3\text{/s}^2}{4.96 \times 10^{21} \text{ m}^4\text{/s}^2} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

Al sustituir este valor dentro de (1), se obtiene

$$\frac{1}{r} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos \theta \qquad (2)$$

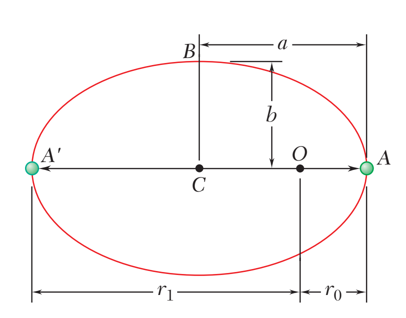
Al advertir que el punto A es $\theta = 0$ y $r = r_0 = 6.87 \times 10^6$ m, se calcula la constante C:

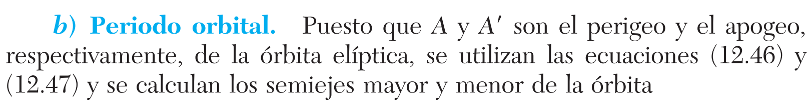
$$\frac{1}{6.87 \times 10^6 \text{ m}} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos 0° \qquad C = 65.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

En A', el punto de la órbita más alejado de la Tierra, se tiene $\theta = 180°$. Mediante (2), se calcula la distancia correspondiente r_1:

$$\frac{1}{r_1} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + (65.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}) \cos 180°$$
$$r_1 = 66.7 \times 10^6 \text{ m} = 66\,700 \text{ km}$$

Altura máxima $= 66\,700 \text{ km} - 6\,370 \text{ km} = 60\,300 \text{ km}$ ◀





***b*) Periodo orbital.** Puesto que A y A' son el perigeo y el apogeo, respectivamente, de la órbita elíptica, se utilizan las ecuaciones (12.46) y (12.47) y se calculan los semiejes mayor y menor de la órbita

$$a = \tfrac{1}{2}(r_0 + r_1) = \tfrac{1}{2}(6.87 + 66.7)(10^6) \text{ m} = 36.8 \times 10^6 \text{ m}$$
$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6.87)(66.7)} \times 10^6 \text{ m} = 21.4 \times 10^6 \text{ m}$$
$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi(36.8 \times 10^6 \text{ m})(21.4 \times 10^6 \text{ m})}{70.4 \times 10^9 \text{ m}^2\text{/s}}$$
$$\tau = 70.3 \times 10^3 \text{ s} = 1\,171 \text{ min} = 19 \text{ h } 31 \text{ min}$$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se continuó el estudio del movimiento de una partícula bajo una fuerza central y se aplicaron los resultados a problemas en mecánica celeste. Se encontró que la trayectoria de una partícula bajo una fuerza central se define mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \qquad (12.37)$$

donde u es el recíproco de la distancia r de la partícula al centro de fuerza ($u = 1/r$), F es la magnitud de la fuerza central $\mathbf{F}$, y h es una constante igual a la cantidad de movimiento angular por unidad de masa de la partícula. En problemas de mecánica celeste, $\mathbf{F}$ es la fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre el satélite o nave espacial por el Sol, la Tierra u otro planeta alrededor del cual viaja. Al sustituir $F = GMm/r^2 = GMmu^2$ en la ecuación (12.37), se obtiene para ese caso

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \qquad (12.38)$$

donde el miembro del lado derecho es una constante.

1. Análisis del movimiento de satélites y naves espaciales. La solución de la ecuación diferencial (12.38) define la trayectoria de un satélite o nave espacial. Ésta se obtuvo en la sección 12.12 y se expresó en dos formas alternativas

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\theta) \qquad (12.39,\ 12.39')$$

Al aplicar estas ecuaciones recuérdese que $\theta = 0$ corresponde siempre al perigeo (el punto de máximo acercamiento) de la trayectoria (figura 12.19) y que h es una constante para una trayectoria determinada. Dependiendo del valor de la excentricidad ε, la trayectoria será una hipérbola, una parábola o una elipse.

a) $\varepsilon > 1$: La trayectoria es una hipérbola, por lo que para este caso la nave espacial nunca retorna a su punto de partida.

b) $\varepsilon = 1$: La trayectoria es una parábola. Éste es el caso límite entre trayectorias abierta (hiperbólica) y cerrada (elíptica). Para este caso la velocidad v_0 en el perigeo es igual a la velocidad de escape v_{esc},

$$v_0 = v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \qquad (12.43)$$

Adviértase que la velocidad de escape es la velocidad más pequeña para la cual la nave espacial no regresa al punto de partida.

c) $\varepsilon < 1$: La trayectoria es una órbita elíptica. En problemas que implican órbitas elípticas, tal vez se encuentre útil en la solución de problemas subsecuentes la relación que se obtuvo en el problema 12.102,

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

Cuando se aplique esta ecuación, hay que recordar que r_0 y r_1 son las distancias desde el centro de fuerza desde el perigeo ($\theta = 0$) y el apogeo ($\theta = 180°$), respectivamente; que $h = r_0 v_0 = r_1 v_1$ y que, para un satélite que orbita a la Tierra, $GM_{\text{tierra}} = gR^2$, donde R es el radio terrestre. Recuérdese también que la trayectoria es un círculo cuando $\varepsilon = 0$.

2. Determinación del punto de impacto de una nave espacial que desciende. En problemas de este tipo, es posible que se suponga que la trayectoria sea elíptica, y que el punto inicial de la trayectoria de descenso es el apogeo de la trayectoria (figura 12.22). Adviértase que en el punto de impacto, la distancia r en las ecuaciones (12.39) y (12.39′) es igual al radio R del cuerpo sobre el cual la nave espacial aterriza o se estrella. Además, se tiene que $h = Rv_I \operatorname{sen} \phi_I$, donde v_I es la velocidad de la nave espacial en el impacto y ϕ_I es el ángulo que su trayectoria forma con la vertical en el punto de impacto.

3. Cálculo del tiempo de recorrido entre dos puntos sobre una trayectoria. Para el movimiento de fuerza central, el tiempo t que se requiere para que una partícula recorra una porción de su trayectoria se determina al recordar de la sección 12.9 que la razón a la cual el vector de posición **r** barre el área en la unidad de tiempo es igual a la mitad de la cantidad de movimiento angular por masa unitaria h de la partícula: $dA/dt = h/2$. Se concluye que, dado que h es constante para una trayectoria dada, que

$$t = \frac{2A}{h}$$

donde A es el área total barrida en el tiempo t.

a) En el caso de una trayectoria elíptica, el tiempo que se requiere para completar una órbita recibe el nombre de *periodo orbital* y se expresa como

$$\tau = \frac{2(\pi ab)}{h} \tag{12.45}$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente, de la elipse, y se relacionan con las distancias r_0 y r_1 mediante

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \qquad \text{y} \qquad b = \sqrt{r_0 r_1} \qquad (12.46,\ 12.47)$$

b) La tercera ley de Kepler proporciona una relación conveniente entre los periodos orbitales de dos satélites que describen órbitas elípticas alrededor del mismo cuerpo [sección 12.13]. Al denotar los semiejes mayores de las dos órbitas de a_1 y a_2, respectivamente, y los periodos orbitales correspondientes por τ_1 y τ_2 se tiene

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

c) En el caso de una trayectoria parbólica, es posible que se recurra a la expresión dada en la portada del libro para un área parabólica o un área semiparabólica con el fin de calcular el tiempo que se requiere para viajar entre los dos puntos de la trayectoria.

Problemas

12.94 Una partícula de masa m describe el cardioide $r = r_0(1 + \cos \theta)/2$ bajo una fuerza central **F** dirigida hacia el centro de fuerza O. Mediante la ecuación (12.37), demuestre que **F** es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia r desde la partícula hasta O.

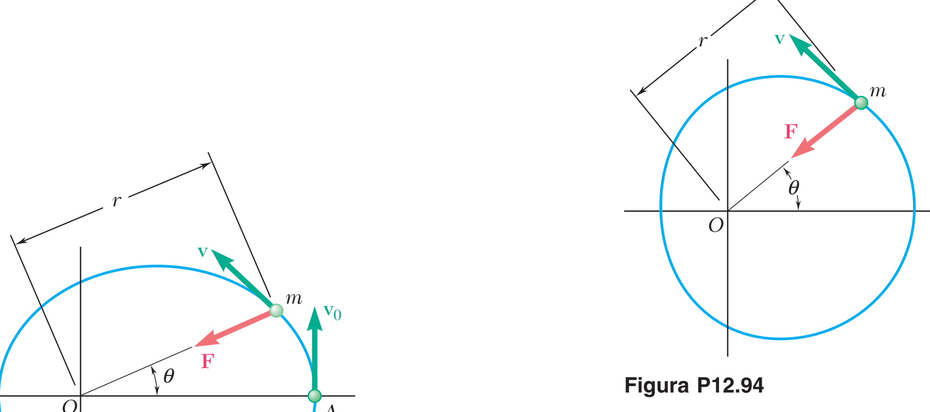


Figura P12.94

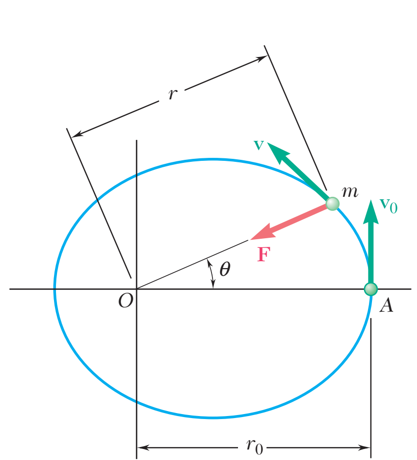


Figura P12.95

12.95 Una partícula de masa m se proyecta desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a OA y se mueve bajo una fuerza central **F** a lo largo de una trayectoria elíptica definida por la ecuación $r = r_0/(2 - \cos \theta)$. Mediante la ecuación (12.37), demuestre que **F** es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r desde la partícula hasta el centro de fuerza O.

12.96 Una partícula de masa m describe la trayectoria definida por la ecuación $r = r_0 \operatorname{sen} \theta$ bajo la acción de una fuerza central **F** dirigida hacia el centro de fuerza O. Mediante la ecuación (12.37), demuestre que **F** es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia r desde la partícula hasta O.

12.97 Para la partícula del problema 12.76, utilice la ecuación (12.37) para demostrar que la fuerza central **F** es proporcional a la distancia r desde la partícula hasta el centro de fuerza O.

12.98 Se observó que durante el primer vuelo sobre la Tierra de la nave espacial Galileo, la altura mínima fue de 960 km sobre la superficie terrestre. Suponiendo que la trayectoria de la nave espacial fue parabólica, determine su velocidad máxima durante este primer vuelo sobre la Tierra.

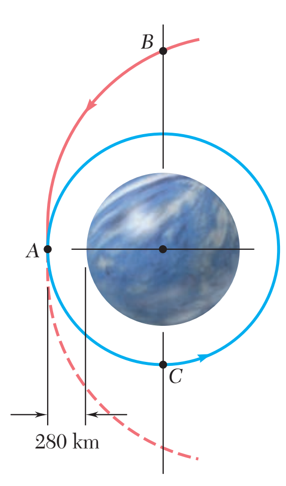


Figura P12.99

12.99 Cuando una sonda espacial que se aproxima al planeta Venus en una trayectoria parabólica alcanza el punto A de máximo acercamiento al planeta, su velocidad se reduce para incorporarla a una órbita circular. Si se sabe que la masa y el radio de Venus son 4.87×10^{24} kg y 6 052 km, respectivamente, determine *a*) la velocidad de la sonda cuando se aproxima a A, *b*) la reducción de velocidad que se requiere para incorporarla en una órbita circular.

12.100 Se observó que durante su segundo vuelo sobre la Tierra, la nave espacial Galileo tuvo una velocidad de 46.2×10^3 ft/s cuando alcanzó su altura mínima de 188.3 mi sobre la superficie terrestre. Determine la excentricidad de la trayectoria de la nave espacial durante esta parte de su vuelo.

12.101 Se observó que cuando la nave espacial Galileo alcanzó el punto de su trayectoria más próximo a Io, una de las lunas del planeta Júpiter, se ubicaba a una distancia de 1 750 mi desde el centro de este satélite que tenía una velocidad de 49.4×10^3 ft/s. Si se sabe que la masa de Io es 0.01496 veces la masa de la Tierra, determine la excentricidad de la trayectoria de la nave espacial cuando se aproximaba a Io.

12.102 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M. Si se denota por medio de r_0 y r_1, respectivamente, los valores mínimo y máximo de la distancia r desde el satélite hasta el centro del planeta, deduzca la relación

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

donde h es la cantidad de movimiento angular por unidad de masa del satélite.

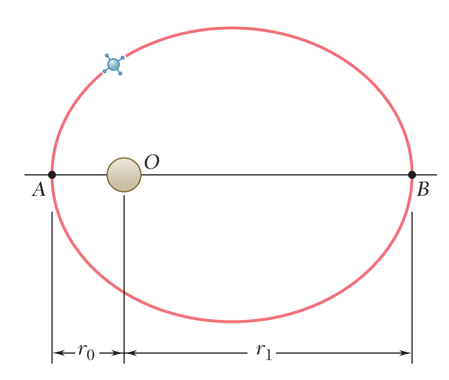


Figura P12.102

12.103 En el corte del motor principal de su decimotercer vuelo, el transbordador espacial Discovery mantuvo una órbita elíptica de 40.3 mi de altura mínima y 336 mi de altura máxima sobre la superficie terrestre. Si se sabe que en el punto A el transbordador tuvo una velocidad $\mathbf{v}_0$ paralela a la superficie de la Tierra y que el vehículo espacial se transfirió a una órbita circular cuando pasó por el punto B, determine *a*) la velocidad v_0 del transbordador espacial en A, *b*) el aumento en la rapidez requerido en B para incorporar al transbordador en la órbita circular.

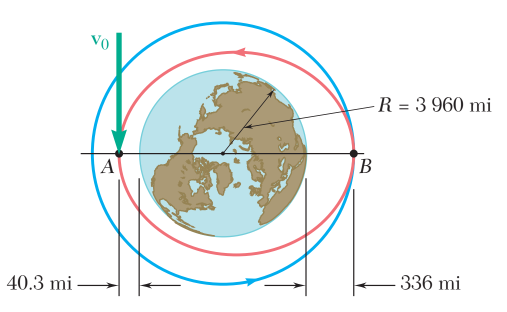


Figura P12.103

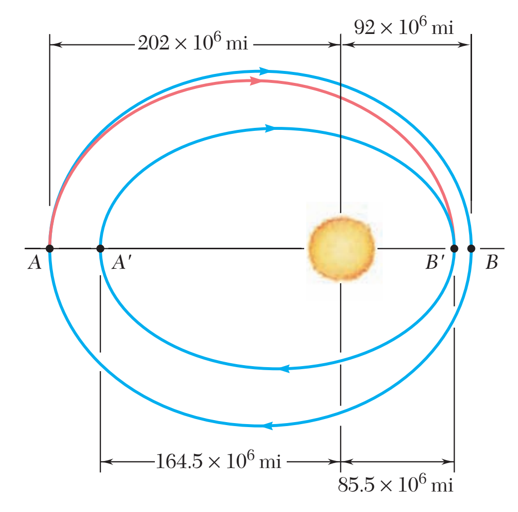


Figura P12.105

12.104 Una sonda espacial describe una órbita circular alrededor de un planeta de radio R. La altura de la sonda sobre la superficie del planeta es αR y su velocidad es v_0. Para colocar a la sonda en una órbita elíptica que la acercará más al planeta, su rapidez se reduce desde v_0 hasta βv_0, donde $\beta < 1$, al encender su motor durante un intervalo corto de tiempo. Determine el valor mínimo permisible de β si la sonda no debe chocar con la superficie del planeta.

12.105 Mientras describe una órbita elíptica alrededor del Sol, una nave espacial alcanza una distancia máxima de 202×10^6 mi desde el centro del Sol en el punto A (llamado *afelio*) y una distancia mínima de 92×10^6 mi en el punto B (llamado *perihelio*). Para colocar la nave espacial en una órbita elíptica más pequeña con afelio A' y perihelio B', donde A' y B' se localizan, respectivamente, a 164.5×10^6 mi y 85.5×10^6 mi, desde el centro del Sol, la rapidez de la nave espacial se reduce primero cuando pasa por A y después se reduce más cuando pasa por B'. Si se sabe que la masa del Sol es de 332.8×10^3 veces la masa de la Tierra, determine *a*) la rapidez de la nave espacial en A y *b*) la cantidad que la rapidez de la nave espacial debe reducirse en A y B' para que ingrese en la órbita elíptica deseada.

12.106 Una sonda espacial se colocará en una órbita circular con 5 600 mi de radio alrededor del planeta Venus en un plano especificado. Cuando la sonda alcanza A, el punto de su trayectoria original más cercano a Venus, se inserta en una primera órbita de transferencia elíptica al reducir su rapidez en Δv_A. Esta órbita lo lleva al punto B con una velocidad más baja. Allí, la sonda se inserta en una segunda órbita de transferencia ubicada en el plano especificado al cambiar la dirección de su velocidad y además al reducir su rapidez en Δv_B. Por último, cuando la sonda llega al punto C, se inserta en la órbita circular deseada al reducir su rapidez en Δv_C. Si se sabe que la masa de Venus es 0.82 veces la masa de la Tierra, que $r_A = 9.3 \times 10^3$ mi y $r_B = 190 \times 10^3$ mi y que la sonda se aproxima a A en una trayectoria parabólica, determine en cuánto debe reducirse la velocidad de la sonda *a*) en A, *b*) en B, *c*) en C.

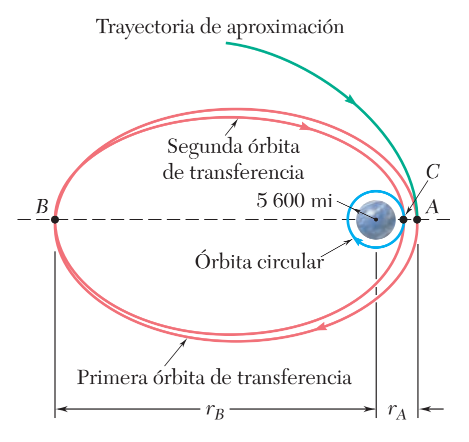


Figura *P12.106*

12.107 Para la sonda espacial del problema 12.106, se sabe que $r_A = 9.3 \times 10^3$ mi y que la velocidad de la sonda se reduce hasta 20 000 ft/s cuando pasa por A. Determine *a*) la distancia desde el centro de Venus hasta el punto B, *b*) la cantidad en la que debe reducirse la velocidad de la sonda en B y C.

12.108 Determine el tiempo necesario para que la sonda espacial del problema 12.106 viaje de A a B sobre su primera órbita de transferencia.

12.109 La nave espacial Clementina describió una órbita elíptica de altura mínima $h_A = 400$ km y una altura máxima de $h_B = 2\,940$ km sobre la superficie de la Luna. Si el radio de esta última es de 1 737 km y su masa corresponde a 0.01230 veces la masa de la Tierra, determine el periodo orbital de la nave espacial.

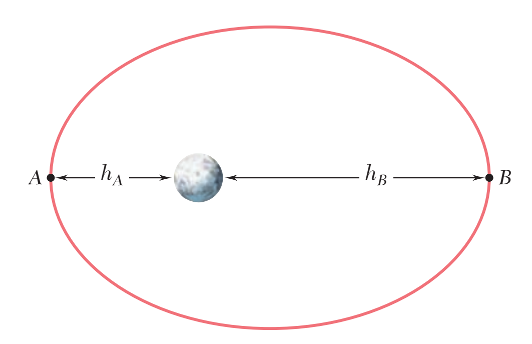


Figura P12.109

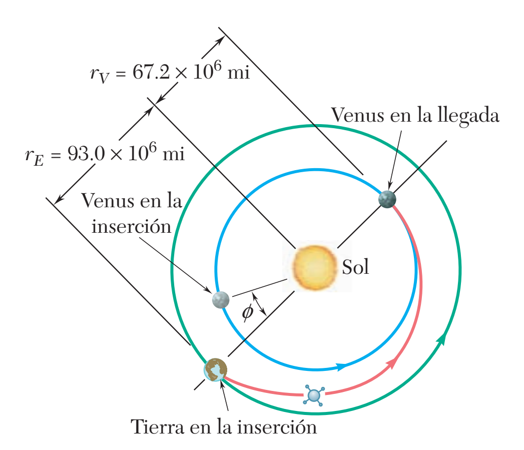


Figura P12.110

12.110 Una sonda espacial en una órbita terrestre baja se inserta en una órbita de transferencia elíptica al planeta Venus. Si se sabe que la masa del Sol es 332.8×10^3 veces la masa de la Tierra y se supone que la sonda está sujeta sólo a la atracción gravitatoria del Sol, determine el valor de ϕ, que define la posición relativa de Venus con respecto a la Tierra, en el momento que la sonda se inserta a la órbita de transferencia.

12.111 Con base en las observaciones efectuadas durante el avistamiento en 1996 del cometa Hyakutake, se concluyó que su trayectoria es una elipse sumamente alargada para la cual la excentricidad es casi de $\varepsilon = 0.999887$. Si se sabe que para el avistamiento de 1996 la distancia mínima entre el cometa y el Sol era de $0.230R_E$, donde R_E es la distancia media desde el Sol hasta la Tierra, determine el periodo orbital del cometa.

12.112 El cometa Halley viaja en una órbita elíptica alargada para la cual la distancia mínima desde el Sol es de aproximadamente $\frac{1}{2}r_E$, donde $r_E = 150 \times 10^6$ km es la distancia media del Sol a la Tierra. Si se sabe que el periodo orbital del cometa Halley es de alrededor de 76 años, determine la distancia máxima desde el Sol alcanzada por el cometa.

12.113 Determine el tiempo necesario para que la sonda espacial del problema 12.99 viaje desde B hasta C.

12.114 Una sonda espacial describe una órbita circular de radio nR con una velocidad v_0 alrededor de un planeta de radio R y centro O. Cuando la sonda pasa por un punto A, su velocidad se reduce de v_0 a βv_0, donde $\beta < 1$, para poner la sonda en una trayectoria de impacto. Exprese en términos de n y β el ángulo AOB, donde B denota el punto de impacto de la sonda sobre el planeta.

12.115 Antes de las misiones Apolo a la Luna, se utilizaron varios orbitadores lunares para fotografiar la superficie del satélite y obtener información relativa a posibles sitios de alunizaje. Al final de cada misión, se ajustó la trayectoria de cada nave de manera que éstas se estrellaran a fin de efectuar estudios adicionales de las características de la superficie lunar. En la figura se muestra la órbita elíptica del *Orbitador Lunar 2*. Si se sabe que la masa de la Luna es 0.01230 veces la masa de la Tierra, determine la cantidad que debe reducirse la rapidez del orbitador en el punto B de modo que choque con la superficie lunar en el punto C. (*Sugerencia*: El punto B es el apogeo de la trayectoria de impacto elíptica.)

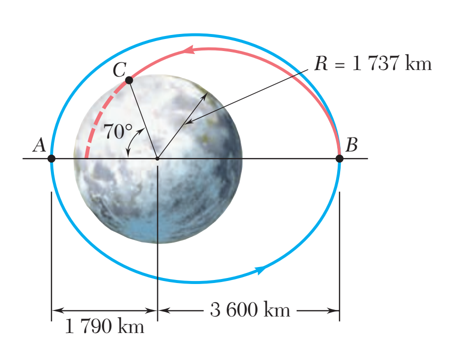


Figura P12.115

12.116 Mientras una nave espacial se aproxima al planeta Júpiter, libera una sonda que debe entrar a la atmósfera del planeta en el punto B a una altitud de 450 km sobre la superficie de Júpiter. La trayectoria de la sonda es una hipérbole de excentricidad $\varepsilon = 1.031$. Si se sabe que el radio y la masa de Júpiter son 71.492×10^3 y 1.9×10^{27} kg, respectivamente, y que la velocidad $\mathbf{v}_B$ de la sonda en B forma un ángulo de 82.9° con la dirección de OA, determine *a*) el ángulo AOB, *b*) la velocidad v_B de la sonda en B.

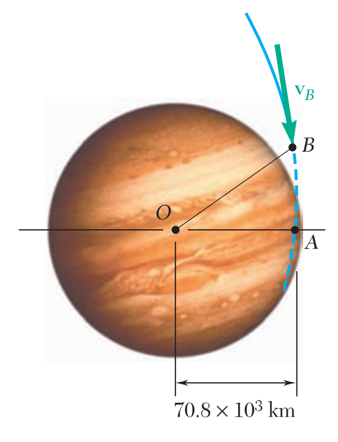


Figura P12.116

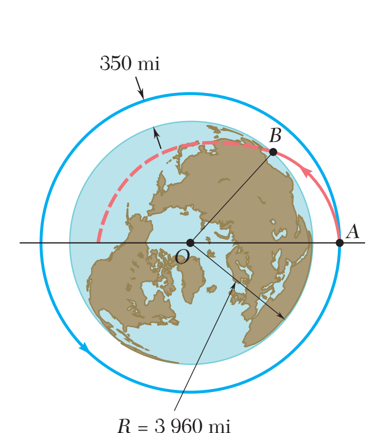


Figura *P12.117*

12.117 Un transbordador espacial describe una órbita circular a una altura de 350 mi sobre la superficie de la Tierra. Cuando pasa por el punto A, enciende su motor durante un breve intervalo de tiempo para reducir su rapidez en 500 ft/s y empezar su descenso hacia la Tierra. Determine el ángulo AOB de manera que la altura del transbordador en el punto B sea 75 mi. (*Sugerencia*: El punto A es el apogeo de la trayectoria descendente elíptica.)

12.118 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta. Denotando por r_0 y r_1 las distancias correspondientes, respectivamente, al perigeo y al apogeo de la órbita, demuestre que la curvatura de esta última en cada uno de los dos puntos indicados puede expresarse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}\right)$$

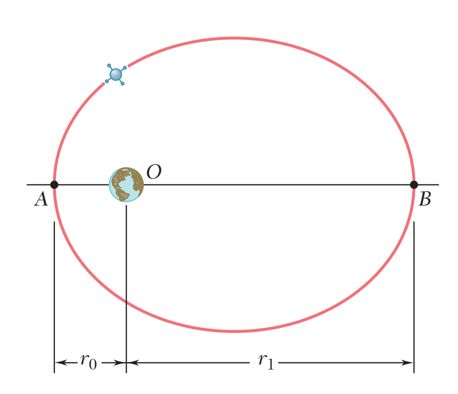


Figura P12.118 y *P12.119*

12.119 *a*) Exprese la excentricidad ε de la órbita elíptica descrita por un satélite alrededor de un planeta en términos de las distancias r_0 y r_1 correspondientes al perigeo y al apogeo de la órbita, *b*) Utilice el resultado que se obtuvo en el inciso *a*) y los datos dados en el problema 12.111, donde $R_E = 149.6 \times 10^6$ km, para determinar la distancia máxima apropiada desde el Sol que alcanza el cometa Hyakutake.

12.120 Demuestre que el movimiento angular de masa unitaria h de un satélite que describe una órbita elíptica del semieje mayor a y excentricidad ε alrededor de un planeta de masa M puede expresarse como

$$h = \sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)}$$

12.121 Deduzca la tercera ley del movimiento planetario de Kepler a partir de las ecuaciones (12.39) y (12.45).

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 12

Este capítulo se dedicó a la segunda ley de Newton y su aplicación al análisis del movimiento de partículas.

Segunda ley de Newton

Al denotar mediante m la masa de una partícula, por $\Sigma\mathbf{F}$ la suma, o resultante, de las fuerzas que actúan sobre la partícula, y por $\mathbf{a}$ la aceleración de la partícula relativa a un *sistema de referencia newtoniano* [sección 12.2], se escribe

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

Cantidad de movimiento lineal

Al presentar la *cantidad de movimiento lineal* de una partícula, $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ [sección 12.3], se vio que la segunda ley de Newton también puede escribirse en la forma

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \tag{12.5}$$

la cual expresa que la resultante *de la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula.*

Sistemas de unidades consistentes

La ecuación (12.2) se cumple sólo si se usa un sistema consistente en unidades. Con unidades del SI, las fuerzas se expresarán en newtons, las masas en kilogramos y las aceleraciones en m/s^2; con unidades de uso común en Estados Unidos las fuerzas deben expresarse en libras, las masas en lb · s^2/ft (conocidas también como *slugs*), y las aceleraciones en ft/s^2 [sección 12.4].

Ecuaciones de movimiento de una partícula

Para resolver un problema que implica el movimiento de una partícula, la ecuación (12.2) debe sustituirse por ecuaciones que contengan cantidades escalares [sección 12.5]. Al usar *componentes rectangulares* de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{a}$, se escribe

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.8}$$

Mediante las *componentes tangencial y normal,* se tiene

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{12.9'}$$

Equilibrio dinámico

También se señaló [sección 12.6] que las ecuaciones del movimiento de una partícula pueden sustituirse por ecuaciones similares a las de equilibrio que se usan en estática si un vector $-m\mathbf{a}$ de magnitud ma pero de sentido opuesto al de la aceleración, se añade a las fuerzas aplicadas a la partícula; en ese caso se dice que la partícula está en *equilibrio dinámico*. Sin embargo, por uniformidad, todos los problemas resueltos se solucionaron utilizando las ecuaciones de movimiento, primero con componentes rectangulares [problemas resueltos 12.1 a 12.4] y después con las componentes tangencial y normal [problemas resueltos 12.5 y 12.6].

Cantidad de movimiento angular

En la segunda parte del capítulo se definió la *cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_O$ de una partícula alrededor de un punto O como el momento alrededor de O de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}$ de esa partícula [sección 12.7]. Se escribe

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (12.12)$$

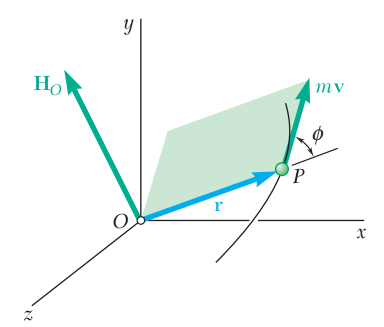


Figura 12.24

y se tiene que $\mathbf{H}_O$ es un vector perpendicular en el plano que contiene $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$ (figura 12.24) y de magnitud

$$H_O = rmv \text{ sen } \phi \qquad (12.13)$$

Al descomponer los vectores $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$ en componentes rectangualres, se expresa la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ en la forma determinada

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \qquad (12.14)$$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano xy, se tiene $z = v_z = 0$. La cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano xy y está completamente definida por su magnitud. Se escribe

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \qquad (12.16)$$

Razón de cambio de la cantidad del movimiento angular

Al calcular la tasa de cambio $\dot{\mathbf{H}}_O$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$, y al aplicar la segunda ley de Newton, se escribe la ecuación

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (12.19)$$

la cual establece que *la suma de los momentos alrededor de O de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad del movimiento angular de la partícula en torno a O.*

Componentes radial y transversal

En muchos problemas que implican el movimiento plano de una partícula, se encontró conveniente utilizar las *componentes radial y transversal* [sección 12.8, problema resuelto 12.7] y escribir las ecuaciones

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (12.21)$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (12.22)$$

Movimiento bajo una fuerza central

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es la fuerza $\mathbf{F}$ dirigida hacia o alejándose de un punto fijo O, se dice que la partícula se mueve *bajo la acción de una fuerza central* [sección 12.9]. Puesto que $\Sigma\mathbf{M}_O = 0$ en cualquier instante dado, se concluye de la ecuación (12.19) que $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$ para todos los valores de t y, en consecuencia, que

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \qquad (12.23)$$

Se concluye que la cantidad de *movimiento angular de una partícula que se mueve bajo uno fuerza central es constante, tanto en magnitud como en dirección,* y que la partícula se mueve en un plano perpendicular al vector $\mathbf{H}_O$.

Al recordar la ecuación (12.13), se escribe la relación

$$rmv \text{ sen } \phi = r_0 m v_0 \text{ sen } \phi_0 \qquad (12.25)$$

para el movimiento de cualquier partícula bajo una fuerza central (figura 12.25). Mediante coordenadas polares y recordando la ecuación (12.18), se obtuvo también

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad (12.27)$$

donde h es una constante que representa la cantidad de movimiento angular por unidad de masa, H_O/m, de la partícula. Se señaló (figura 12.26) que el área infinitesimal dA que barre el radio vector OP cuando gira un ángulo $d\theta$ es igual a $\frac{1}{2}r^2\, d\theta$ y, en consecuencia, que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (12.27) representa el doble de la *velocidad del área dA/dt* de la partícula. Por lo tanto, la *velocidad de área de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante.*

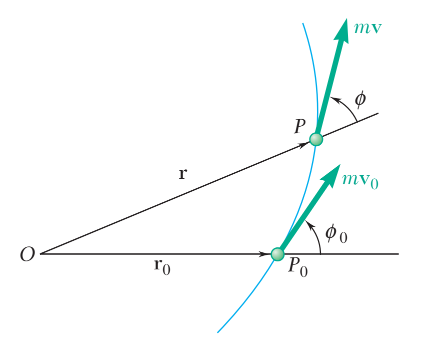


Figura 12.25

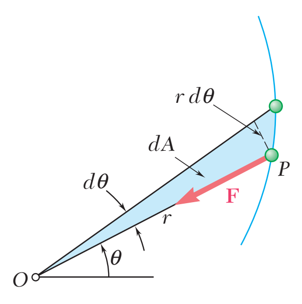


Figura 12.26

Ley de Newton de la gravitación universal

Una aplicación importante del movimiento bajo una fuerza central la ofrece el movimiento orbital de cuerpos sometidos a la atracción gravitacional [sección 12.10]. De acuerdo con la *ley de Newton de la gravitación universal,* dos partículas a una distancia r una de la otra y de masas M y m, respectivamente, se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que une las partículas (figura 12.27). La magnitud común F de las dos fuerzas es

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (12.28)$$

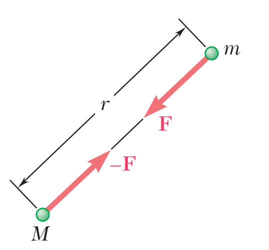


Figura 12.27

donde G es la *constante de gravitación.* En el caso de un cuerpo de masa m sujeto a la atracción gravitacional de la Tierra, el producto GM, donde M es la masa de la Tierra, puede expresarse como

$$GM = gR^2 \qquad (12.30)$$

donde $g = 9.81$ m/s^2 = 32.2 ft/s^2 y R es el radio de la Tierra.

Movimiento orbital

Se demostró en la sección 12.11 que una partícula que se mueve bajo una fuerza central describe una trayectoria definida por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \qquad (12.37)$$

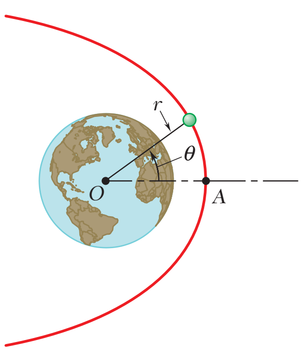


Figura 12.28

donde $F > 0$ corresponde a una fuerza atractiva y $u = 1/r$. En el caso de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza de atracción gravitacional [sección 12.12], se sustituye F por la expresión dada en la ecuación (12.28). Midiendo θ a partir del eje OA que une el foco O con el punto A de la trayectoria más cercano a O (figura 12.28), se encuentra que la solución de la ecuación (12.37) era

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \qquad (12.39)$$

Ésta es la ecuación de una cónica de excentricidad $\varepsilon = Ch^2/GM$. La cónica es una *elipse* si $\varepsilon < 1$, una *parábola* si $\varepsilon = 1$, y una hipérbola si $\varepsilon > 1$. Es posible determinar las constantes C y h de las condiciones iniciales; si la partícula se proyecta desde el punto A ($\theta = 0$, $r = r_0$) con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a OA, tenemos $h = r_0 v_0$ [problema resuelto 12.9].

Velocidad de escape

Se indicó también que los valores de la velocidad inicial correspondientes, respectivamente, a una trayectoria parabólica y a una circular eran

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \qquad (12.43)$$

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \qquad (12.44)$$

y que el primero de estos valores, denominado la *velocidad de escape,* es el valor más pequeño de v_0 para el cual la partícula no regresará a su punto de partida.

Periodo orbital

El *periodo orbital* τ de un planeta o satélite se definió como el tiempo requerido por el cuerpo para describir su órbita. Se mostró que

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \qquad (12.45)$$

donde $h = r_0 v_0$ y donde a y b representan los semiejes mayor y menor de la órbita. Se indicó además que estos semiejes son iguales respectivamente a las medias aritmética y geométrica de los valores máximo y mínimo del vector radio r.

Leyes de Kepler

La última sección del capítulo [sección 12.13] presentó las *leyes de Kepler del movimiento planetario* y mostró que estas leyes empíricas, obtenidas a partir de antiguas observaciones astronómicas, confirman las leyes de movimiento de Newton, así como su ley de gravitación.

Problemas de repaso

12.122 Un automóvil de 3 000 lb es conducido hacia abajo sobre un plano inclinado de 5° a una rapidez de 50 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que ocasiona la aplicación de una fuerza de frenado total de 1 200 lb sobre el automóvil. Determine la distancia recorrida por el automóvil antes de detenerse.

12.123 Un bloque *B* de 6 kg descansa, como se muestra en la figura, sobre una ménsula *A* de 10 kg. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$ entre el bloque *B* y la ménsula *A*, y no existe fricción en la polea o entre la ménsula y la superficie horizontal. *a*) Determine la masa máxima del bloque *C* si el bloque *B* no debe deslizarse sobre la ménsula *A*. *b*) Si la masa del bloque *C* es 10% más grande que la respuesta obtenida en *a*, determine las aceleraciones de *A*, *B* y *C*.

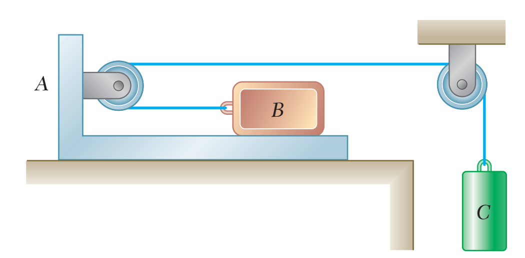


Figura *P12.123*

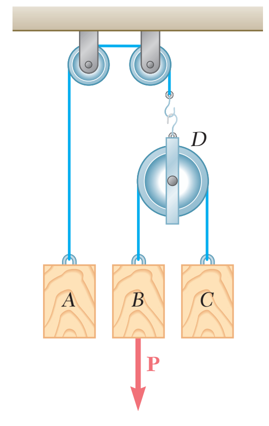
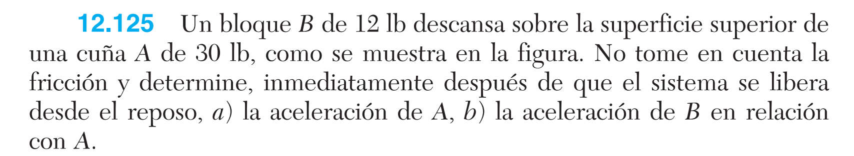


Figura P12.124


12.124 El bloque *A* pesa 20 lb y los bloques *B* y *C* pesan 10 lb cada uno. Si se sabe que los bloques se encuentran inicialmente en reposo y que *B* recorre 8 ft en 2 s, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) la tensión en la cuerda *AD*. Desprecie las masas de las poleas y el efecto de la fricción.

12.125 Un bloque *B* de 12 lb descansa sobre la superficie superior de una cuña *A* de 30 lb, como se muestra en la figura. No tome en cuenta la fricción y determine, inmediatamente después de que el sistema se libera desde el reposo, *a*) la aceleración de *A*, *b*) la aceleración de *B* en relación con *A*.

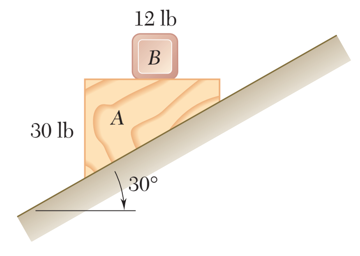


Figura P12.125

12.126 La pista de la montaña rusa que se muestra está contenida en un plano vertical. La parte de la vía entre A y B es recta y horizontal, en tanto que las porciones a la izquierda de A y a la derecha de B tienen los radios de curvatura que se indican. Un carro viaja a la rapidez de 72 km/h cuando se aplican repentinamente los frenos, lo que provoca que las ruedas del carro se deslicen sobre la vía ($\mu_k = 0.25$). Determine la desaceleración inicial del carro si los frenos se aplican cuando este último *a*) casi ha llegado a A, *b*) está viajando entre A y B, *c*) acaba de pasar por B.

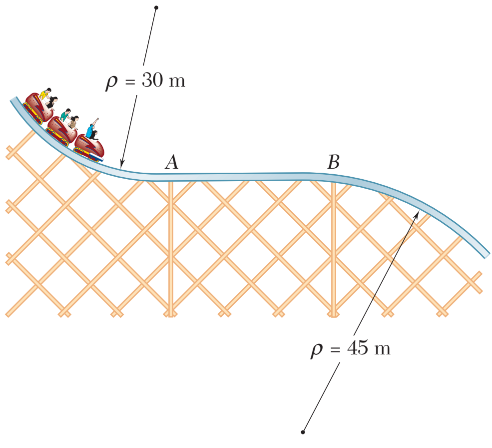


Figura ***P12.126***

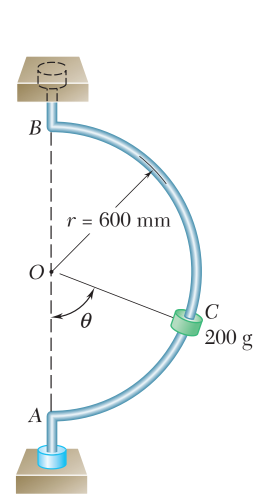


Figura P12.127

12.127 Un pequeño collarín C de 200 g se puede deslizar sobre una varilla semicircular que está diseñada para girar alrededor de la vertical AB a una razón constante de 6 rad/s. Determine el valor mínimo requerido del coeficiente de fricción estática entre el collarín y la varilla si el collarín no debe deslizarse cuando *a*) $\theta = 90°$, *b*) $\theta = 75°$, *c*) $\theta = 45°$. Indique en cada caso la dirección del movimiento inminente.

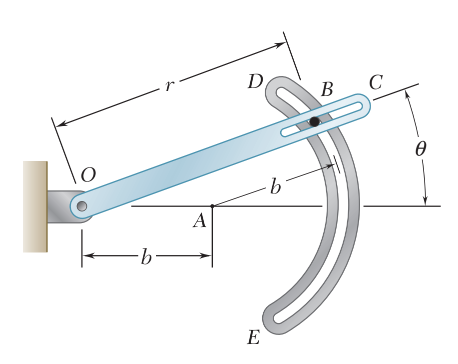


Figura P12.128

12.128 El pasador B que pesa 4 oz se desliza libremente en un plano horizontal a lo largo de la ranura en el brazo rotatorio OC y a lo largo de la ranura DE con radio $b = 20$ in. Si se desprecia la fricción y se sabe que $\dot{\theta} = 15$ rad/s y $\ddot{\theta} = 250$ rad/s^2 para la posición $\theta = 20°$, determine para esa posición *a*) las componentes radial y transversal de la fuerza resultante que se ejerce sobre el pasador B, *b*) las fuerzas **P** y **Q** ejercidas sobre el pasador B por el brazo OC y la pared de la ranura DE, respectivamente.

12.129 Una partícula de masa m se proyecta desde el punto A con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a la línea OA y se mueve bajo la acción de una fuerza central **F** que se aleja del centro de fuerza O. Si la partícula sigue una trayectoria definida por la ecuación $r = r_0/\cos 2\theta$ y usa la ecuación (12.27), exprese las componentes radial y transversal de la velocidad **v** de la partícula como funciones del ángulo θ.

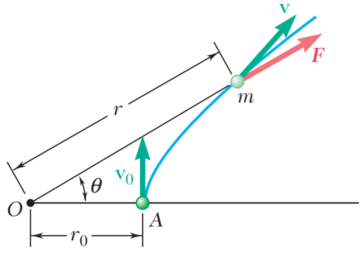


Figura P12.129

12.130 Demuestre que el radio r de la órbita de la Luna puede determinarse a partir del radio R de la Tierra, la aceleración de la gravedad g en la superficie de la Tierra y el tiempo τ requerido por la Luna para completar una revolución alrededor del planeta. Calcule r si se sabe que $\tau = 27.3$ días, dé la respuesta en unidades del SI y de uso común de Estados Unidos.

***12.131** El disco A gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical a razón constante de $\dot{\theta}_0 = 12$ rad/s. La corredera B pesa 8.05 oz y se mueve en una ranura sin fricción del disco. La corredera se une a un resorte de constante k, el cual se mantiene sin deformar cuando $r = 0$. Si la corredera se libera sin velocidad radial en la posición $r = 15$ in., determine la posición de la corredera y la fuerza horizontal ejercida sobre ésta por el disco cuando $t = 0.1$ s para *a*) $k = 2.25$ lb/ft, *b*) $k = 3.25$ lb/ft.

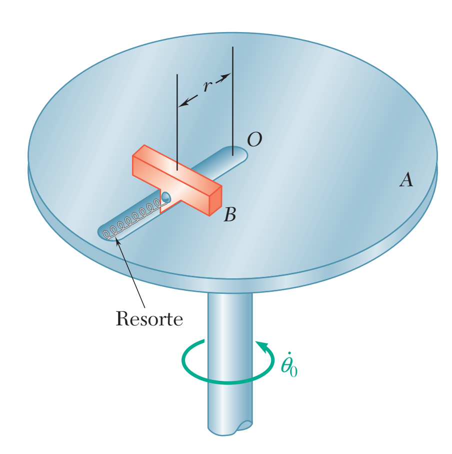


Figura P12.131

12.132 Se observó que cuando la nave espacial *Voyager I* alcanzó el punto de su trayectoria más próximo a Saturno, se ubicaba a una distancia de 185×10^3 km desde el centro del planeta y tenía una velocidad de 21.0 km/s. Si se sabe que Tethys, una de las lunas de Saturno, describe una órbita circular con radio de 295×10^3 km a una rapidez de 11.35 km/s, determine la excentricidad de la trayectoria del *Voyager I* cuando se aproximaba a Saturno.

12.133 Mediante la ignición de su motor, un transbordador alcanzó el punto A a una altitud de 40 mi sobre la superficie de la Tierra y tenía una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$. Si su primera órbita era elíptica y el transbordador se transfirió a una órbita circular cuando pasó por el punto B a una altura de 170 mi, determine *a*) el tiempo necesario para que el transbordador viaje desde A hasta B sobre su órbita elíptica original, *b*) el periodo orbital del transbordador en su órbita circular final.

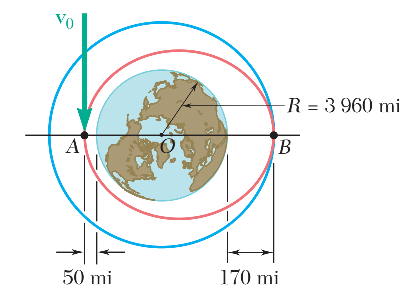


Figura *P12.133*

Problemas de computadora

12.C1 El bloque *B* que tiene una masa de 10 kg está inicialmente en reposo, como se indica en la figura, sobre la superficie superior de una cuña *A* de 20 kg, la cual se sostiene por medio de una superficie horizontal. Un bloque *C* de 2 kg se conecta al bloque *B* mediante una cuerda, que pasa sobre una polea de masa despreciable. Si se recurre al software y se denota mediante μ al coeficiente de fricción de todas las superficies, calcule las aceleraciones para los valores de $\mu \geqslant 0$. Utilice incrementos de 0.01 para μ, hasta que la cuña no se mueva y luego use incrementos de 0.1 hasta que no haya movimiento.

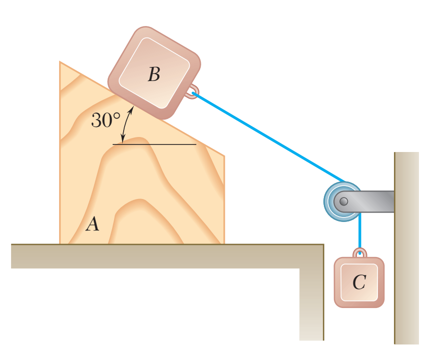


Figura P12.C1

12.C2 Un pequeño bloque de 1 lb está en reposo en la parte superior de una superficie cilíndrica. Al bloque se le da una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ hacia la derecha de magnitud 10 ft/s la cual provoca que se deslice sobre la superficie cilíndrica. Utilizando software calcule y grafique los valores de θ para los cuales el bloque pierde contacto con la superficie con valores de μ_k, el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie, desde 0 hasta 0.4.

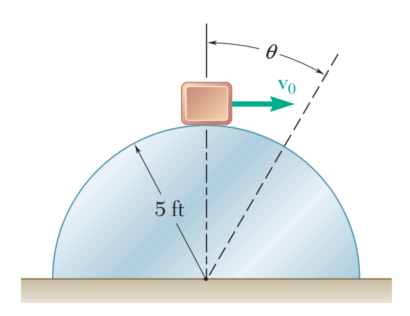


Figura P12.C2

12.C3 Un bloque de masa m está unido a un resorte de constante k. El bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte está en posición horizontal y no deformada. Utilice software para determinar, para diversos valores seleccionados de k/m y r_0, *a*) la longitud del resorte y la magnitud y la dirección de la velocidad del bloque cuando éste pasa directamente bajo el punto de suspensión del resorte, *b*) el valor de k/m para el cual la velocidad es horizontal si $r_0 = 1$ m.

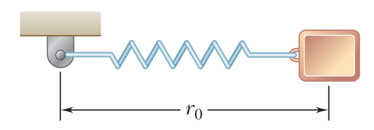


Figura P12.C3

12.C4 Use software para determinar los intervalos de valores de θ para los cuales el bloque E del problema 12.58 no se deslizará en la ranura semicircular de la placa plana. Si se supone un coeficiente de fricción estática de 0.35, determine los intervalos de valores cuando la razón constante de rotación de la placa es *a*) 14 rad/s, *b*) 2 rad/s.

12.C5 Con software determine el tiempo requerido por una nave espacial para viajar entre dos puntos de su trayectoria, dada la distancia al apogeo o al perigeo de la trayectoria y la rapidez de la nave espacial en ese punto. Use este programa para determinar *a*) el tiempo requerido por el *Orbitador Lunar 2* del problema 12.115 para viajar entre los puntos B y C de su trayectoria de impacto, si se sabe que la velocidad del orbitador es de 869.4 m/s cuando comienza a descender en B, *b*) el tiempo requerido por el transbordador espacial del problema 12.117 para viajar entre los puntos A y B de su trayectoria de aterrizaje, si se sabe que la rapidez del transbordador es de 24 371 ft/s cuando comienza a descender en A.

Una pelota de golf se deforma después de un impacto, como lo muestra esta fotografía de alta velocidad. La deformación máxima ocurrirá cuando la velocidad de la cabeza del bastón y la velocidad de la pelota sean iguales. En este capítulo se analizarán los impactos utilizando el coeficiente de restitución y la conservación de la cantidad de movimiento lineal. El tema de este capítulo es la cinética de partículas a partir de los métodos de energía y cantidad de movimiento.

CAPÍTULO 13

Cinética de partículas: métodos de la energía y la cantidad de movimiento



CAPÍTULO 13 CINÉTICA DE PARTÍCULAS: MÉTODOS DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

13.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior la mayor parte de los problemas relacionados con el movimiento de partículas se resolvieron mediante el uso de la ecuación fundamental del movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Dada una partícula sobre la que se ejerce una fuerza **F**, se podría resolver esta ecuación para la aceleración **a**; luego, aplicando los principios de la cinemática sería posible determinar a partir de **a** la velocidad y la posición de la partícula en cualquier tiempo.

El uso de la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ junto con los principios de la cinemática permiten obtener dos métodos de análisis adicionales, el *método del trabajo y la energía* y el *método del impulso y la cantidad de movimiento.* La ventaja de estos métodos radica en el hecho de que hacen que resulte innecesaria la determinación de la aceleración. En realidad, el método del trabajo y la energía relaciona directamente la fuerza, la masa, la velocidad y el desplazamiento, en tanto que el método del impulso y la cantidad de movimiento relaciona la fuerza, la masa, la velocidad y el tiempo.

Primero se considera el método del trabajo y la energía. En las secciones 13.2 a 13.4 se analizan el *trabajo de una fuerza* y la *energía cinética de una partícula* y se aplica el principio del trabajo y la energía a la solución de problemas de ingeniería. Los conceptos de *potencia* y *eficiencia* de una máquina se presentan en la sección 13.5.

Las secciones 13.6 a 13.8 se dedican al concepto de *energía potencial* de una fuerza conservativa y a la aplicación del principio de la conservación de energía a diversos problemas de interés práctico. En la sección 13.9, los principios de la conservación de la energía y de la conservación del momento angular se emplean en forma conjunta para resolver problemas de mecánica celeste.

La segunda parte del capítulo se dedica al *principio del impulso y la cantidad de movimiento* y a su aplicación en el estudio del movimiento de una partícula. Como se verá en la sección 13.11, este principio es en particular eficaz en el estudio del *movimiento impulsivo* de una partícula, en el cual se aplican fuerzas muy grandes durante un intervalo de tiempo muy corto.

En las secciones 13.12 a 13.14 se considera el *impacto central* de dos cuerpos y se muestra que existe cierta relación entre las velocidades relativas de los dos cuerpos en colisión antes y después del impacto. Esta relación, junto con el hecho de que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos, puede utilizarse para resolver varios problemas de interés práctico.

Por último, en la sección 13.15 se aborda la selección de los tres métodos fundamentales que se presentan en los capítulos 12 y 13 y el más adecuado para la solución de un problema dado. También se verá cómo es posible combinar el principio de conservación de la energía y el método del impulso y la cantidad de movimiento para resolver problemas que implican únicamente fuerzas conservativas, con excepción de la fase de corto impacto durante la cual también deben tomarse en cuenta las fuerzas impulsivas.

13.2. TRABAJO DE UNA FUERZA

Se definen primero los términos *desplazamiento* y *trabajo* en la forma que se utilizan en mecánica.[†] Considere una partícula que se mueve de

[†]La definición de trabajo se presentó en la sección 10.2 y las propiedades básicas del trabajo de una fuerza se detallaron en las secciones 10.2 y 10.6. Por conveniencia, se repiten aquí las partes de este material que se relacionan con la cinética de partículas.

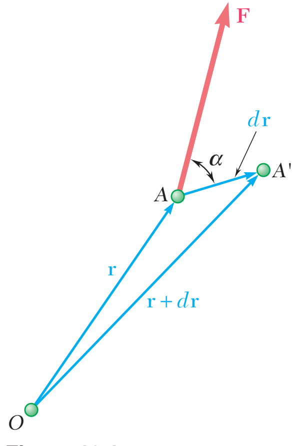


Figura 13.1

un punto A a un punto cercano A' (figura 13.1). Si **r** denota el vector de posición correspondiente al punto A, el vector que une a A y a A' puede denotarse mediante la diferencial $d\mathbf{r}$; el vector $d\mathbf{r}$ se denomina el *desplazamiento* de la partícula. Suponga ahora que una fuerza **F** actúa sobre la partícula. El *trabajo de la fuerza* **F** *correspondiente al desplazamiento* $d\mathbf{r}$ se define como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.1}$$

obtenida al formar el producto escalar de la fuerza **F** y el desplazamiento $d\mathbf{r}$. Denotando por medio de F y ds, respectivamente, las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, y mediante α el ángulo formado por **F** y $d\mathbf{r}$, y recordando la definición de producto escalar de dos vectores (sección 3.9), se escribe

$$dU = F\, ds \cos \alpha \tag{13.1'}$$

Utilizando la fórmula (3.30), es posible expresar también el trabajo dU en términos de las componentes rectangulares de la fuerza y del desplazamiento:

$$dU = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \tag{13.1''}$$

Al ser una *cantidad escalar,* el trabajo tiene magnitud y signo, pero no dirección. También se vio que el trabajo debe expresarse en unidades que se obtienen al multiplicar unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, el trabajo debe expresarse en ft · lb o in. · lb. Si se emplean unidades del SI, el trabajo se expresará en N · m. La unidad de trabajo N · m se denomina como *joule* (J).[†] Al recordar los factores de conversión indicados en la sección 12.4, se escribe

$$1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = (1 \text{ ft})(1 \text{ lb}) = (0.3048 \text{ m})(4.448 \text{ N}) = 1.356 \text{ J}$$

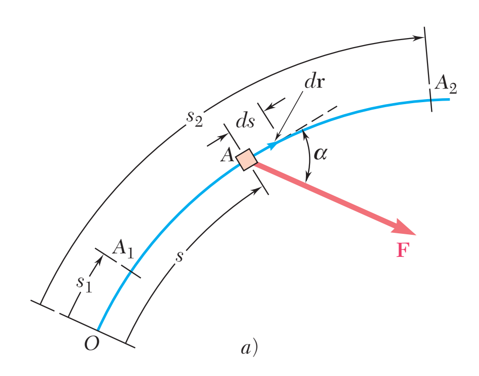
Se deduce de (13.1′) que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si α es obtuso. Son tres los casos de interés particular. Si

[†]El joule (J) es la unidad de *energía* del SI, ya sea en forma mecánica (trabajo, energía potencial, energía cinética) o en forma química, eléctrica o térmica. Se debe señalar que aun cuando N · m = J, el momento de una fuerza debe expresarse en N · m y no en joules, ya que el momento de una fuerza no es una forma de energía.

la fuerza **F** tiene la misma dirección que $d\mathbf{r}$, y el trabajo dU se reduce a $F\,ds$. Si **F** tiene dirección opuesta a la de $d\mathbf{r}$, el trabajo es $dU = -F\,ds$. Si **F** es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es cero.

El trabajo de **F** durante un desplazamiento *finito* de la partícula de A_1 a A_2 (figura 13.2*a*) se obtiene al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria que describe la partícula. Este trabajo, denotado por $U_{1\rightarrow 2}$, es

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.2}$$



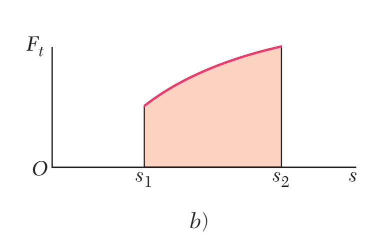


Figura 13.2

Al utilizar la expresión alternativa (13.1′) para el trabajo elemental dU y observar que $F \cos \alpha$ representa la componente tangencial F_t de la fuerza, es posible expresar el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ como

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds \tag{13.2′}$$

donde la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria. El trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ se representa por medio del área bajo la curva que se obtiene al graficar $F_t = F \cos \alpha$ contra s (figura 13.2*b*).

Cuando la fuerza **F** se define por medio de sus componentes rectangulares, la expresión (13.1″) puede utilizarse para el trabajo elemental. En ese caso se escribe

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) \tag{13.2″}$$

donde la integración se va a realizar a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula.

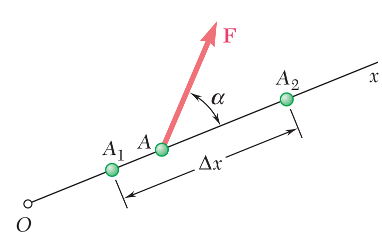


Figura 13.3

Trabajo de una fuerza constante en movimiento rectilíneo. Cuando una partícula que se mueve en una línea recta se somete a una fuerza **F** de magnitud constante y dirección constante (figura 13.3), la fórmula (13.2′) produce

$$U_{1\rightarrow 2} = (F \cos \alpha)\, \Delta x \tag{13.3}$$

donde α = ángulo que forma la fuerza con la dirección de movimiento
Δx = desplazamiento de A_1 a A_2

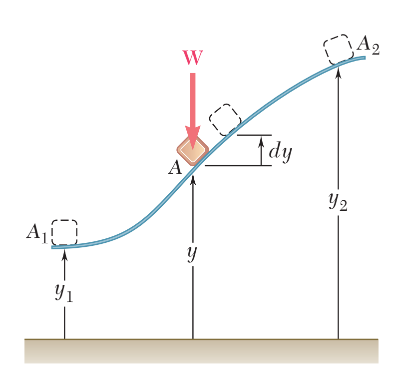


Figura 13.4

Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad. El trabajo del peso **W** de un cuerpo, esto es, de la fuerza que la gravedad ejerce sobre ese cuerpo, se obtiene al sustituir las componentes de **W** en (13.1″) y (13.2″). Al elegir el eje y hacia arriba (figura 13.4), se tiene $F_x = 0$, $F_y = -W$ y $F_z = 0$, y se escribe

$$dU = -W\, dy$$

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{13.4}$$

o

$$U_{1\rightarrow 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\, \Delta y \tag{13.4′}$$

donde Δy es el desplazamiento vertical de A_1 a A_2. En consecuencia, el trabajo del peso **W** es igual *al producto de W y el desplazamiento vertical*

del centro de gravedad del cuerpo. El trabajo es *positivo* cuando $\Delta y < 0$, esto es, *cuando el cuerpo se mueve hacia abajo.*

Trabajo realizado por la fuerza que ejerce un resorte o muelle. Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que este último no está deformado cuando el cuerpo se encuentra en A_0 (figura 13.5*a*). La evidencia experimental muestra que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el resorte sobre un cuerpo A es proporcional a la deformación x del resorte medida a partir de la posición A_0. Se tiene

$$F = kx \tag{13.5}$$

donde k es la *constante del resorte*, expresada en N/m o kN/m si se usan unidades del SI y en lb/ft o lb/in. si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos.†

El trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercido por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo de $A_1(x = x_1)$ a $A_2(x = x_2)$ se obtiene al escribir

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{13.6}$$

Debe tenerse cuidado de expresar k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos, k debe expresarse en lb/ft y x en pies, o k en lb/in. y x en pulgadas; en el primer caso, el trabajo se obtiene en ft · lb, en el segundo, en in. · lb. Adviértase que el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el resorte sobre el cuerpo es *positivo* cuando $x_2 < x_1$, esto es, *cuando el resorte está regresando a la posición no deformada.*

Puesto que la ecuación (13.5) es la de una línea recta de pendiente k que pasa por el origen, el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ de $\mathbf{F}$ durante el desplazamiento de A_1 a A_2 puede obtenerse al evaluar el área del trapezoide que se muestra en la figura 13.5*b*. Esto se hace al calcular F_1 y F_2 y multiplicar la base Δx del trapezoide por medio de su altura media $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Puesto que el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercido por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx, se escribe

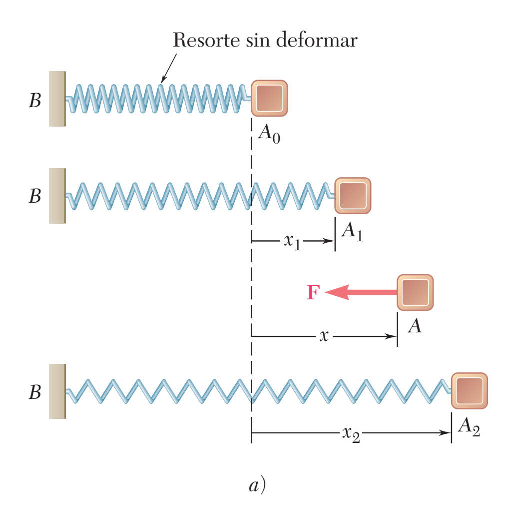
$$U_{1\rightarrow 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \tag{13.6'}$$

La fórmula (13.6′) suele ser más conveniente que la (13.6), pues son menores las posibilidades de confundir las unidades que se utilizan.

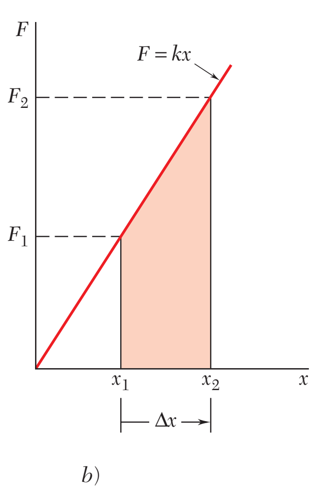
Trabajo realizado por una fuerza gravitacional. En la sección 12.10 se vio que dos partículas de masa M y m a una distancia r una de la otra se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$, dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas y de magnitud

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Suponga que la partícula M ocupa una posición fija O mientras la partícula m se mueve a lo largo de la trayectoria indicada en la figura 13.6. El tra-



a)



b)

Figura 13.5

†La relación $F = kx$ es correcta únicamente bajo condiciones estáticas. Bajo condiciones dinámicas, la fórmula (13.5) debe modificarse para tomar en cuenta la inercia del resorte. Sin embargo, el error que se introduce al utilizar la relación $F = kx$ en la solución de problemas de cinética es mínimo si la masa del resorte es pequeña comparada con las demás masas en movimiento.

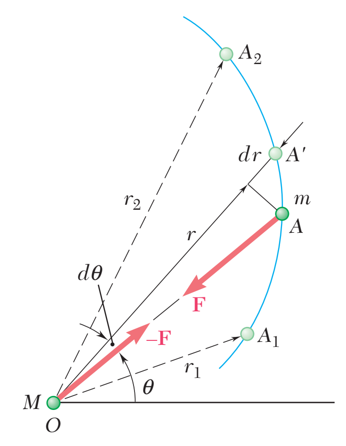


Figura 13.6

bajo de la fuerza **F** ejercida sobre la partícula m durante un desplazamiento infinitesimal de la partícula de A a A' puede obtenerse al multiplicar la magnitud F de la fuerza por la componente radial dr del desplazamiento. Puesto que **F** está dirigida hacia O, el trabajo es negativo y se escribe

$$dU = -F\,dr = -G\frac{Mm}{r^2}\,dr$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional **F** durante un desplazamiento finito de $A_1(r = r_1)$ a $A_2(r = r_2)$ es por tanto

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \qquad (13.7)$$

donde M es la masa de la Tierra. Es posible utilizar esta fórmula para determinar el trabajo de la fuerza ejercida por la Tierra sobre un cuerpo de masa m a una distancia r del centro de la misma, cuando r es más grande que el radio R terrestre. Al recordar la primera de las relaciones (12.29), se puede sustituir el producto GMm en la ecuación (13.7) por WR^2, donde R es el radio de la Tierra ($R = 6.37 \times 10^6$ m o 3 960 mi) y W es el peso del cuerpo en la superficie terrestre.

Varias fuerzas que se encuentran con frecuencia en problemas de cinética *no realizan trabajo.* Se trata de fuerzas aplicadas en puntos fijos ($ds = 0$) o actuando en una dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos \alpha = 0$). Entre las fuerzas que no realizan trabajo se encuentran las siguientes: la reacción en un pasador sin fricción cuando el cuerpo que se soporta gira alrededor del pasador, la reacción en una superficie sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie, la reacción en un rodillo que se desplaza a lo largo de su pista y el peso de un cuerpo cuando el centro de gravedad se mueve en forma horizontal.

13.3. ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

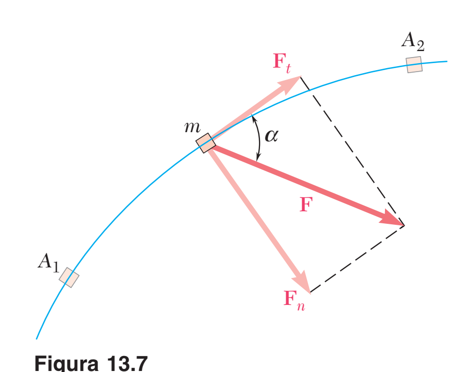


Figura 13.7

Considere una partícula de masa m que se somete a una fuerza **F** y que se mueve a lo largo de una trayectoria que es rectilínea o curva (figura 13.7). Al expresar la segunda ley de Newton en términos de las componentes tangenciales de la fuerza y de la aceleración (véase la sección 12.5), se escribe

$$F_t = ma_t \qquad \text{o} \qquad F_t = m\frac{dv}{dt}$$

donde v es la velocidad de la partícula. Al recordar de la sección 11.9 que $v = ds/dt$, se obtiene

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$
$$F_t\,ds = mv\,dv$$

Al integrar desde A_1, donde $s = s_1$ y $v = v_1$, hasta A_2, donde $s = s_2$ y $v = v_2$, se escribe

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (13.8)$$

El miembro de la izquierda de la ecuación (13.8) representa el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ de la fuerza **F** ejercida sobre la partícula durante el desplazamiento de A_1 a A_2; como se indica en la sección 13.2, el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ es una

cantidad escalar. La expresión $\frac{1}{2}mv^2$ es también una cantidad escalar; se define como la energía cinética de la partícula y se denota mediante T. Se escribe

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{13.9}$$

Al sustituir en (13.8), se tiene

$$U_{1\rightarrow 2} = T_2 - T_1 \tag{13.10}$$

la cual expresa que, cuando la partícula se mueve de A_1 a A_2 bajo la acción de una fuerza **F**, *el trabajo de la fuerza* **F** *es igual al cambio de la energía cinética de la partícula.* Lo anterior se conoce como el *principio del trabajo y la energía.* Al rearreglar los términos en (13.10), se escribe

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \tag{13.11}$$

Así, *la energía cinética de una partícula en A_2 puede obtenerse agregando a su energía cinética en A_1 el trabajo realizado durante el desplazamiento de A_1 a A_2 que lleva a cabo la fuerza* **F** *ejercida sobre la partícula.* Al igual que la segunda ley de Newton de la cual se deriva, el principio del trabajo y la energía se aplica sólo con respecto a un marco de referencia newtoniano (sección 12.2). La rapidez v que se emplea para determinar la energía cinética T debe, por tanto, medirse con respecto a un marco de referencia newtoniano.

Puesto que tanto el trabajo como la energía cinética son cantidades escalares, su suma puede calcularse como una suma algebraica ordinaria, considerándose el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ positivo o negativo de acuerdo con la dirección de **F**. Cuando varias fuerzas actúan sobre la partícula, la expresión $U_{1\rightarrow 2}$ representa el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre la partícula; ésta se obtiene sumando algebraicamente el trabajo de las diversas fuerzas.

Como se señaló antes, la energía cinética de una partícula es una cantidad escalar. Además, por la definición $T = \frac{1}{2}mv^2$, la energía cinética siempre es positiva, independientemente de la dirección de movimiento de la partícula. Al considerar el caso particular cuando $v_1 = 0$ y $v_2 = v$, y al sustituir $T_1 = 0$ y $T_2 = T$ en (13.10) se observa que el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a T. En consecuencia, la energía cinética de una partícula que se mueve con una rapidez v representa el trabajo que debe efectuarse para llevar la partícula desde el reposo hasta la rapidez v. Si se sustituye $T_1 = T$ y $T_2 = 0$ en (13.10), también se advierte que cuando una partícula que se mueve con una rapidez v se lleva al reposo, el trabajo ejecutado por las fuerzas que actúan sobre la misma es $-T$. Suponiendo que no se disipa energía en forma de calor, la conclusión es que el trabajo realizado por las fuerzas ejercidas *por la partícula* sobre los cuerpos que provocan que quede en reposo es igual a T. Por consiguiente, la energía cinética de una partícula representa también *la capacidad para realizar trabajo asociado con la velocidad de la partícula.*

La energía cinética se mide en las mismas unidades que el trabajo, esto es, en joules si se usan unidades del SI y en ft · lb si se emplean unidades de uso común en Estados Unidos. Se confirma que, en unidades del SI,

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \text{kg(m/s)}^2 = (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\text{m} = \text{N}\cdot\text{m} = \text{J}$$

en tanto que, en unidades de uso común en Estados Unidos,

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = (\text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft})(\text{ft/s})^2 = \text{ft}\cdot\text{lb}$$

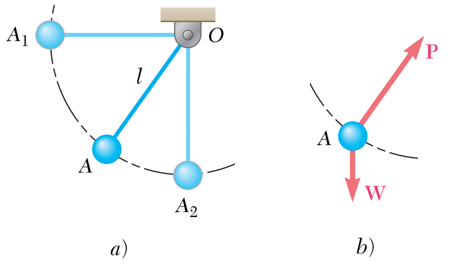


Figura 13.8

13.4. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

La aplicación del principio del trabajo y la energía simplifica en forma considerable la solución de muchos problemas que implican fuerzas, desplazamientos y velocidades. Considere, por ejemplo, el péndulo OA compuesto por una plomada A de peso W unida a una cuerda de longitud l (figura 13.8*a*). El péndulo se suelta sin velocidad inicial desde una posición horizontal OA_1 y se deja que oscile en un plano vertical. Se desea determinar la rapidez de la plomada cuando pasa por A_2, directamente abajo de O.

Primero se determina el trabajo realizado durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 por las fuerzas que actúan sobre la plomada. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de esta última, indicando todas las fuerzas *reales* que actúan sobre ella, esto es, el peso **W** y la fuerza **P** ejercida por la cuerda (figura 13.8*b*). (Un vector de inercia no es una fuerza real y *no debe* incluirse en el diagrama de cuerpo libre.) Adviértase que la fuerza **P** no realiza trabajo, ya que es normal a la trayectoria; la única fuerza que efectúa trabajo es consecuentemente el peso **W**. El trabajo de **W** se obtiene al multiplicar su magnitud W por el desplazamiento vertical l (sección 13.2); en vista de que el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo es positivo. Por lo tanto, se escribe $U_{1\rightarrow 2} = Wl$.

Si se considera ahora la energía cinética de la plomada, se encuentra que $T_1 = 0$ en A_1 y que $T_2 = \frac{1}{2}(W/g)v_2^2$ en A_2. Después de esto es posible aplicar el principio del trabajo y la energía; al recordar la fórmula (13.11), se escribe

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad 0 + Wl = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$$

Al resolver para v_2, se encuentra $v_2 = \sqrt{2gl}$. Adviértase que la rapidez que se obtiene es la de un cuerpo que cae libremente desde una altura l.

El ejemplo considerado ilustra las siguientes ventajas del método del trabajo y la energía:

1. Con el fin de encontrar la rapidez en A_2, no hay necesidad de determinar la aceleración en una posición intermedia A y de integrar la expresión que se obtuvo de A_1 a A_2.
2. Todas las cantidades implicadas son escalares y pueden sumarse de manera directa, sin utilizar las componentes x y y.
3. Las fuerzas que no realizan trabajo se eliminan de la solución del problema.

Lo que es una ventaja en un problema, sin embargo, quizá sea una desventaja en otro. Es evidente, por ejemplo, que no es posible utilizar el método del trabajo y la energía para determinar de manera directa una aceleración. Igualmente es evidente que al determinar una fuerza que es normal a la trayectoria de la partícula, una fuerza que no realiza trabajo, el método del trabajo y la energía debe complementarse mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton. Supóngase, por ejemplo, que interesa determinar la tensión en la cuerda del péndulo de la figura 13.8*a* cuando la plomada pasa por A_2. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la plomada en esa posición (figura 13.9) y se expresa la segunda ley de Newton en términos de las componentes tangencial y normal. Las ecuaciones $\Sigma F_t = ma_t$ y $\Sigma F_n = ma_n$ producen, respectivamente, $a_t = 0$ y

Figura 13.9

$$P - W = ma_n = \frac{W}{g}\frac{v_2^2}{l}$$

Sin embargo, la rapidez en A_2 se determinó antes por el método del trabajo y la energía. Al sustituir $v_2^2 = 2gl$ y resolver para P, se escribe

$$P = W + \frac{W}{g}\frac{2gl}{l} = 3W$$

Cuando un problema implica dos o más partículas, es factible aplicar el principio del trabajo y la energía a cada partícula por separado. Al sumar las energías cinéticas de las diversas partículas y considerar el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre ellas, es posible escribir una sola ecuación del trabajo y la energía para todas las partículas implicadas. Se tiene

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \tag{13.11}$$

donde T representa la suma aritmética de las energías cinéticas de las partículas que se consideran (todos los términos son positivos) y $U_{1\rightarrow 2}$ es el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas, *incluyendo las fuerzas de acción y reacción que ejercen las partículas entre sí.* Sin embargo, en problemas que implican cuerpos conectados mediante *cuerdas o eslabones inextensibles,* se cancela el trabajo de las fuerzas ejercidas por una cuerda o eslabón determinado sobre los dos cuerpos que conecta, ya que los puntos de aplicación de estas fuerzas se mueven a través de distancias iguales (véase el problema resuelto 13.2).[†]

Puesto que las fuerzas de fricción tienen una dirección opuesta a la del desplazamiento del cuerpo sobre el cual actúan, *el trabajo de las fuerzas de fricción siempre es negativo.* Este trabajo representa la energía disipada en calor y siempre da por resultado una disminución de la energía cinética del cuerpo que se considera (véase el problema resuelto 13.3).

13.5. POTENCIA Y EFICIENCIA

La *potencia* se define como la tasa en el tiempo a la cual se efectúa el trabajo. En la selección de un motor o máquina, la potencia es un criterio mucho más importante que la cantidad real de trabajo que se lleva a cabo. Es posible utilizar un motor pequeño o una gran planta eléctrica para realizar una cantidad determinada de trabajo; sin embargo, el motor pequeño quizá requiera un mes para efectuar el trabajo que la planta eléctrica realizaría en unos cuantos minutos. Si ΔU es el trabajo realizado durante el intervalo Δt, entonces la potencia promedio durante ese intervalo es

$$\text{Potencia promedio} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

al dejar que Δt tienda a cero, se obtiene en el límite

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} \tag{13.12}$$

[†]La aplicación del método del trabajo y la energía a un sistema de partículas se estudia en detalle en el capítulo 14.

Al sustituir el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por dU, se puede escribir también

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

y, al recordar que $d\mathbf{r}/dt$ representa la velocidad $\mathbf{v}$ del punto de aplicación de $\mathbf{F}$,

$$\text{Potencia} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{13.13}$$

Puesto que la potencia se definió como la tasa en el tiempo a la cual se realiza el trabajo, ésta debe expresarse en unidades que se obtienen al dividir unidades de trabajo entre la unidad de tiempo. De tal modo, si se usan unidades del SI, la potencia debe expresarse en J/s; esta unidad se conoce como *watt* (W). Se tiene

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

Si se emplean unidades de uso común en Estados Unidos, la potencia debe expresarse en ft · lb/s o en *caballos de potencia* (hp), con esta última unidad definida como

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

Al recordar de la sección 13.2 que 1 ft · lb = 1.356 J, se verifica que

$$1 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 1.356 \text{ J/s} = 1.356 \text{ W}$$
$$1 \text{ hp} = 550(1.356 \text{ W}) = 746 \text{ W} = 0.746 \text{ kW}$$

La *eficiencia mecánica* de una máquina se definió en la sección 10.5 como la relación entre el trabajo de salida y el trabajo de entrada:

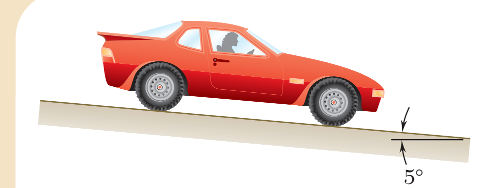
$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \tag{13.14}$$

Esta definición se basa en la suposición de que el trabajo se realiza a una tasa constante. La relación entre el trabajo de salida y el de entrada es, por tanto, igual a la relación de las tasas a las cuales se realiza el trabajo de salida y de entrada, y se tiene

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \tag{13.15}$$

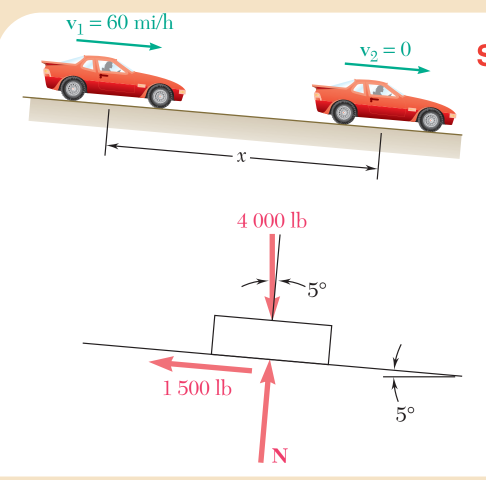
Debido a las pérdidas de energía resultado de la fricción, el trabajo de salida siempre es más pequeño que el trabajo de entrada y, en consecuencia, la salida de potencia es siempre menor que la entrada de potencia. La eficiencia mecánica de una máquina es entonces siempre menor que 1.

Cuando se usa una máquina para transformar la energía mecánica en energía eléctrica, o la energía térmica en energía mecánica, su *eficiencia o rendimiento total* puede obtenerse de la fórmula (13.15). La eficiencia total de una máquina es siempre menor que 1; proporciona una medida del total de las diversas pérdidas de energía implicadas (pérdidas de energía eléctrica o térmica, así como pérdidas por fricción). Advierta que es necesario expresar la salida de potencia y la entrada de potencia en las mismas unidades antes de utilizar la fórmula (13.15).



PROBLEMA RESUELTO 13.1

Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una pendiente de 5° de inclinación a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre las llantas) de 1 500 lb. Determine la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse.



SOLUCIÓN

Energía cinética

Posición 1: $v_1 = \left(60 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5\,280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}}\right) = 88 \text{ ft/s}$

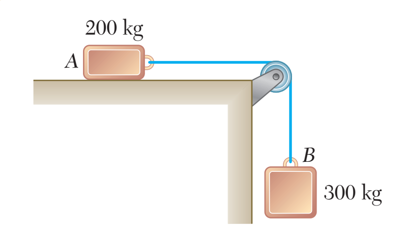
$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(4\,000/32.2)(88)^2 = 481\,000 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Posición 2: $v_2 = 0 \qquad T_2 = 0$

Trabajo $U_{1\to 2} = -1\,500x + (4\,000 \text{ sen } 5°)x = -1\,151x$

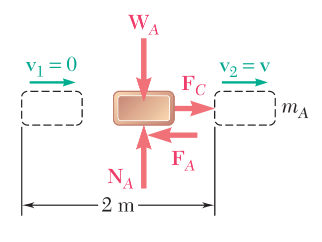
Principio del trabajo y la energía

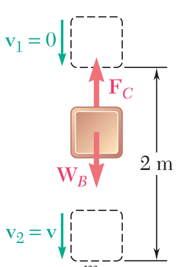
$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$
$$481\,000 - 1\,151x = 0 \qquad x = 418 \text{ ft} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 13.2

Dos bloques están unidos por un cable inextensible en la forma que se muestra. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la velocidad del bloque A después de que éste se ha movido 2 m. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y el plano es $\mu_k = 0.25$ y que la polea no tiene peso ni fricción.





SOLUCIÓN

Trabajo y energía del bloque *A*. Al detonar la fuerza de fricción $\mathbf{F}_A$ y la fuerza ejercida por el cable mediante $\mathbf{F}_C$, se escribe

$$m_A = 200 \text{ kg} \qquad W_A = (200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 1\,962 \text{ N}$$
$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0.25(1\,962 \text{ N}) = 490 \text{ N}$$
$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2: \qquad 0 + F_C(2 \text{ m}) - F_A(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}m_A v^2$$
$$F_C(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200 \text{ kg})v^2 \qquad (1)$$

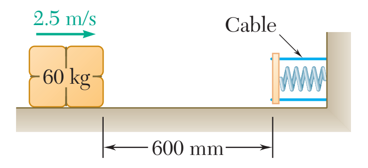
Trabajo y energía del bloque *B*. Se escribe

$$m_B = 300 \text{ kg} \qquad W_B = (300 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 2\,940 \text{ N}$$
$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2: \qquad 0 + W_B(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}m_B v^2$$
$$(2\,940 \text{ N})(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(300 \text{ kg})v^2 \qquad (2)$$

Al sumar los miembros izquierdo y derecho de (1) y (2), se observa que se cancela el trabajo de las fuerzas ejercidas por el cable sobre A y B:

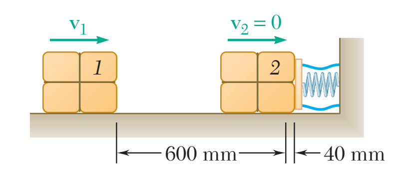
$$(2\,940 \text{ N})(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200 \text{ kg} + 300 \text{ kg})v^2$$
$$4\,900 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(500 \text{ kg})v^2 \qquad v = 4.43 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 13.3



Se utiliza un resorte para detener un paquete de 60 kg que se desliza sobre una superficie horizontal. El resorte tiene una constante $k = 20$ kN/m y se sostiene mediante cables de manera que se encuentre inicialmente comprimido 120 mm. Sabiendo que el paquete tiene una velocidad de 2.5 m/s en la posición que se indica y que la máxima compresión adicional del resorte es de 40 mm, determine *a*) el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la superficie, *b*) la velocidad del paquete cuando éste pasa otra vez por la posición mostrada.

SOLUCIÓN



***a*) Movimiento desde la posición *1* hasta la posición 2**

Energía cinética. ***Posición 1:*** $v_1 = 2.5$ m/s

$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(60 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2 = 187.5 \text{ N} \cdot \text{m} = 187.5 \text{ J}$$

Posición 2: (deformación máxima del resorte): $v_2 = 0$ $\quad T_2 = 0$

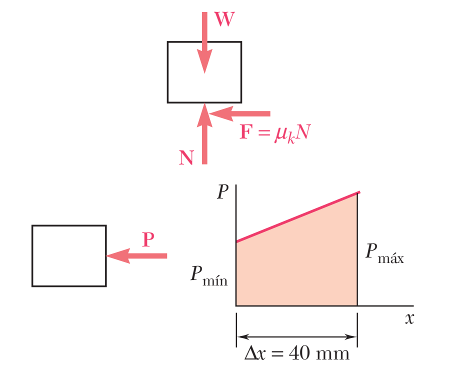
Trabajo

Fuerza de fricción **F**. Se tiene

$$F = \mu_k N = \mu_k W = \mu_k mg = \mu_k(60 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = (588.6 \text{ N})\mu_k$$

El trabajo de **F** es negativo e igual a

$$(U_{1\to 2})_f = -Fx = -(588.6 \text{ N})\mu_k(0.600 \text{ m} + 0.040 \text{ m}) = -(377 \text{ J})\mu_k$$



Fuerza del resorte **P**. La fuerza variable **P** ejercida por el resorte realiza una cantidad de trabajo negativa igual al área bajo la curva fuerza-deformación de la fuerza del resorte. Se tiene

$$P_{mín} = kx_0 = (20 \text{ kN/m})(120 \text{ mm}) = (20\,000 \text{ N/m})(0.120 \text{ m}) = 2\,400 \text{ N}$$
$$P_{máx} = P_{mín} + k\,\Delta x = 2\,400 \text{ N} + (20 \text{ kN/m})(40 \text{ mm}) = 3\,200 \text{ N}$$
$$(U_{1\to 2})_e = -\tfrac{1}{2}(P_{mín} + P_{máx})\,\Delta x = -\tfrac{1}{2}(2\,400 \text{ N} + 3\,200 \text{ N})(0.040 \text{ m}) = -112.0 \text{ J}$$

El trabajo total es entonces

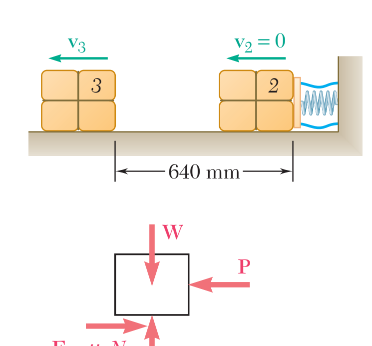
$$U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_f + (U_{1\to 2})_e = -(377 \text{ J})\mu_k - 112.0 \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía

$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$: $\quad 187.5 \text{ J} - (377 \text{ J})\mu_k - 112.0 \text{ J} = 0 \qquad \mu_k = 0.20$ ◀

***b*) Movimiento desde la posición 2 hasta la posición 3**

Energía cinética. ***Posición 2:*** $v_2 = 0 \quad T_2 = 0$



Posición 3: $T_3 = \tfrac{1}{2}mv_3^2 = \tfrac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2$

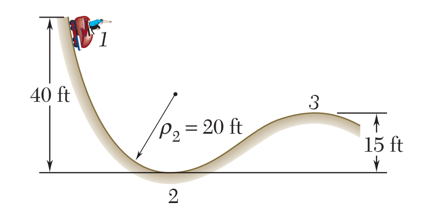
Trabajo. Puesto que las distancias implicadas son las mismas, los valores numéricos del trabajo de la fuerza de fricción **F** y de la fuerza del resorte **P** son los mismos que antes. Sin embargo, mientras que el trabajo **F** sigue siendo negativo, el trabajo de **P** es en este caso positivo.

$$U_{2\to 3} = -(377 \text{ J})\mu_k + 112.0 \text{ J} = -75.5 \text{ J} + 112.0 \text{ J} = +36.5 \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía

$T_2 + U_{2\to 3} = T_3$: $\quad 0 + 36.5 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2$

$v_3 = 1.103$ m/s $\qquad \mathbf{v}_3 = 1.103$ m/s ← ◀



PROBLEMA RESUELTO 13.4

Un vehículo de 2 000 lb parte del reposo en el punto *1* y desciende sin fricción por la pista que se indica. *a*) Determine la fuerza que ejerce la pista sobre el vehículo en el punto *2*, donde el radio de curvatura de la pista es de 20 ft. *b*) Determine el valor mínimo seguro del radio de curvatura en el punto *3*.

SOLUCIÓN

***a*) Fuerza ejercida por pista en el punto *2*.** Se utiliza el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad del vehículo cuando éste pasa por el punto *2*.

Energía cinética. $T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$

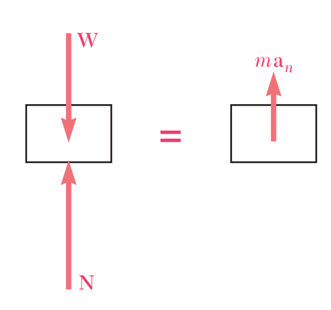
Trabajo. La única fuerza que efectúa trabajo es el peso **W**. Puesto que el desplazamiento vertical desde el punto *1* hasta el punto *2* es de 40 ft hacia abajo, el trabajo del peso es

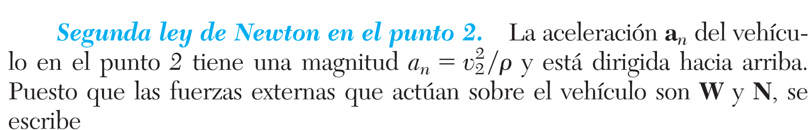
$$U_{1\rightarrow 2} = +W(40 \text{ ft})$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad 0 + W(40 \text{ ft}) = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$$

$$v_2^2 = 80g = 80(32.2) \qquad v_2 = 50.8 \text{ ft/s}$$





Segunda ley de Newton en el punto 2. La aceleración $\mathbf{a}_n$ del vehículo en el punto *2* tiene una magnitud $a_n = v_2^2/\rho$ y está dirigida hacia arriba. Puesto que las fuerzas externas que actúan sobre el vehículo son **W** y **N**, se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n: \qquad -W + N = ma_n$$

$$= \frac{W}{g}\frac{v_2^2}{\rho}$$

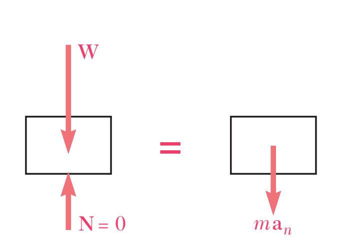
$$= \frac{W}{g}\frac{80g}{20}$$

$$N = 5W \qquad \mathbf{N} = 10\,000 \text{ lb}\uparrow \quad ◀$$

b*) Valor mínimo de ρ en el punto *3*. *Principio del trabajo y de la energía. Al aplicar el principio del trabajo y la energía entre el punto *1* y el punto *3*, se obtiene

$$T_1 + U_{1\rightarrow 3} = T_3 \qquad 0 + W(25 \text{ ft}) = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_3^2$$

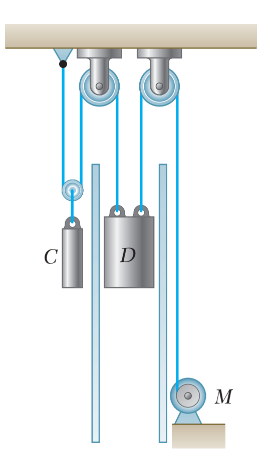
$$v_3^2 = 50g = 50(32.2) \qquad v_3 = 40.1 \text{ ft/s}$$



Segunda ley de Newton en el punto 3. El valor mínimo seguro de ρ ocurre cuando $\mathbf{N} = 0$. En este caso, la aceleración $\mathbf{a}_n$ de magnitud $a_n = v_3^2/\rho$, está dirigida hacia abajo, y se escribe

$$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n: \qquad W = \frac{W}{g}\frac{v_3^2}{\rho}$$

$$= \frac{W}{g}\frac{50g}{\rho} \qquad \rho = 50 \text{ ft} \quad ◀$$

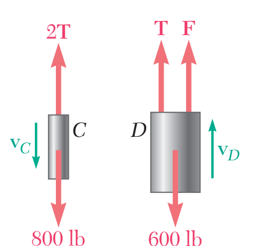


PROBLEMA RESUELTO 13.5

El montacargas D y su carga tienen un peso combinado de 600 lb, en tanto que el contrapeso C pesa 800 lb. Determine la potencia entregada por el motor eléctrico M cuando el montacargas *a*) se mueve hacia arriba a una rapidez constante de 8 ft/s, *b*) tiene una velocidad instantánea de 8 ft/s y una aceleración de 2.5 ft/s^2, ambas dirigidas hacia arriba.

SOLUCIÓN

Puesto que la fuerza **F** ejercida por el cable del motor tiene la misma dirección que la velocidad $\mathbf{v}_D$ del montacargas, la potencia es igual a Fv_D, donde $v_D = 8$ ft/s. Para obtener la potencia, se debe determinar primero **F** en cada una de las dos situaciones indicadas.



***a*) Movimiento uniforme.** Se tiene que $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D = 0$; ambos cuerpos se encuentran en equilibrio.

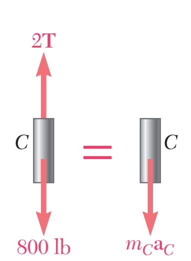
Cuerpo libre C: $+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $2T - 800 \text{ lb} = 0$ $T = 400$ lb

Cuerpo libre D: $+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $F + T - 600 \text{ lb} = 0$

$$F = 600 \text{ lb} - T = 600 \text{ lb} - 400 \text{ lb} = 200 \text{ lb}$$

$$Fv_D = (200 \text{ lb})(8 \text{ ft/s}) = 1\,600 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (1\,600 \text{ ft}\cdot\text{lb/s})\frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}} = 2.91 \text{ hp} \quad ◀$$

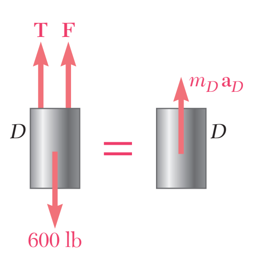


***b*) Movimiento acelerado.** Se tiene

$$\mathbf{a}_D = 2.5 \text{ ft/s}^2\uparrow \qquad \mathbf{a}_C = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}_D = 1.25 \text{ ft/s}^2\downarrow$$

Las ecuaciones de movimiento son

Cuerpo libre C: $+\downarrow\Sigma F_y = m_C a_C$: $800 - 2T = \dfrac{800}{32.2}(1.25)$ $T = 384.5$ lb



Cuerpo libre D: $+\uparrow\Sigma F_y = m_D a_D$: $F + T - 600 = \dfrac{600}{32.2}(2.5)$

$$F + 384.5 - 600 = 46.6 \qquad F = 262.1 \text{ lb}$$

$$Fv_D = (262.1 \text{ lb})(8 \text{ ft/s}) = 2\,097 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (2\,097 \text{ ft}\cdot\text{lb/s})\frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ ft}\cdot\text{lb/s}} = 3.81 \text{ hp} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En el capítulo anterior se resolvieron problemas relacionados con el movimiento de una partícula utilizando la ecuación fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para determinar la aceleración $\mathbf{a}$. Al aplicar los principios de la cinemática se pudo determinar a partir de $\mathbf{a}$ la velocidad y el desplazamiento de la partícula en cualquier tiempo. En esta lección se combinó $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y los principios de la cinemática para obtener un método de análisis adicional que se conoce como el *método del trabajo y la energía.* Éste elimina la necesidad de calcular la aceleración y permite relacionar las velocidades de la partícula en dos puntos a lo largo de su trayectoria de movimiento. Para resolver un problema mediante el método del trabajo y la energía se deben seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el trabajo de cada una de las fuerzas. El trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ de una fuerza dada $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento finito de la partícula desde A_1 hasta A_2 se define como

$$U_{1\rightarrow 2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{o} \qquad U_{1\rightarrow 2} = \int (F \cos \alpha)\, ds \quad (13.2, 13.2')$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$. El trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ es una cantidad escalar y se expresa en ft · lb o in. · lb en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos y en N · m o joules (J) en el SI. Hay que observar que el trabajo efectuado es cero para la fuerza perpendicular al desplazamiento ($\alpha = 90°$). El trabajo negativo se realiza para $90° < \alpha < 180°$ y en particular para una fuerza de fricción, la cual siempre se opone en dirección al desplazamiento ($\alpha = 180°$).

El trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ puede evaluarse fácilmente en los siguientes casos:

a) Trabajo de la fuerza constante en movimiento rectilíneo

$$U_{1\rightarrow 2} = (F \cos \alpha)\, \Delta x \qquad (13.3)$$

donde α = ángulo que forma la fuerza con la dirección del movimiento
Δx = desplazamiento de A_1 a A_2 (figura 13.3)

b) Trabajo de la fuerza de gravedad

$$U_{1\rightarrow 2} = -W\, \Delta y \qquad (13.4')$$

donde Δy es el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo de peso W. Advierta que el trabajo es positivo cuando Δy es negativo, esto es, cuando el cuerpo desciende (figura 13.4).

c) Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

$$U_{1\rightarrow 2} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (13.6)$$

donde k es la constante de resorte y x_1 y x_2 son las elongaciones del resorte correspondientes a las posiciones A_1 y A_2 (figura 13.5).

(*continúa*)

d) Trabajo de una fuerza gravitacional

$$U_{1\to 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \tag{13.7}$$

para un desplazamiento del cuerpo $A_1(r = r_1)$ a $A_2(r = r_2)$ (figura 13.6).

2. Calcular la energía cinética en A_1 y A_2. La energía cinética T es

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{13.9}$$

donde m es la masa de la partícula y v es la magnitud de su velocidad. Las unidades de la energía cinética son las mismas que las unidades del trabajo, esto es, ft · lb o in. · lb si se usan unidades de uso común en Estados Unidos y N · m o joules (J) si se usan unidades del SI.

3. Sustituir los valores para el trabajo realizado $U_{1\to 2}$ y las energías cinéticas T_1 y T_2 en la ecuación

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{13.11}$$

Habrá *una ecuación* que puede resolver para *una incógnita.* Hay que observar que esta ecuación no proporciona directamente el tiempo de recorrido o la aceleración. Sin embargo, si se conoce el radio de curvatura ρ de la trayectoria de la partícula en el punto donde se ha obtenido la velocidad v, puede expresar la componente normal de la aceleración como $a_n = v^2/\rho$ y obtener la componente normal de la fuerza ejercida sobre la partícula al escribir $F_n = mv^2/\rho$.

4. La potencia se presentó en esta lección como la tasa en el tiempo a la cual se realiza el trabajo, $P = dU/dt$. La potencia se mide en ft · Ib/s o *caballos de potencia* (hp) en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos y J/s o *watts* (W) en el sistema de unidades del SI. Para calcular la potencia, puede usar la fórmula equivalente,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{13.13}$$

donde **F** y **v** denotan la fuerza y la velocidad, respectivamente, en un tiempo determinado [problema resuelto 13.5]. En algunos problemas [véase, por ejemplo, el problema 13.50] se pedirá la *potencia promedio,* la cual es posible obtener al dividir el trabajo total entre el intervalo durante el cual se efectúa el trabajo.

Problemas

13.1 Un pequeño automóvil híbrido de 1 300 kg viaja a 108 km/h. Determine *a*) la energía cinética del vehículo, *b*) la rapidez requerida para que un camión de 9 000 kg tenga la misma energía cinética.

13.2 Un satélite de 870 lb se pone en una órbita circular a 3 973 mi sobre la superficie de la Tierra. A esta altura la aceleración de la gravedad es igual a 8.03 ft/s^2. Si la rapidez orbital del satélite es de 12 500 mi/h, determine su energía cinética.

13.3 Una piedra de 2 lb se deja caer desde una altura *h* y golpea el suelo con una velocidad de 50 ft/s. *a*) Encuentre la energía cinética de la piedra cuando golpea el suelo y la altura *h* desde la cual se dejó caer. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que la misma piedra se deja caer sobre la Luna. (La aceleración de la gravedad sobre la Luna = 5.31 ft/s^2.)

13.4 Una piedra de 4 kg se deja caer desde una altura *h* y golpea el suelo con una velocidad de 25 m/s. *a*) Encuentre la energía cinética de la piedra cuando golpea el suelo y la altura *h* desde la cual se dejó caer. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que la misma piedra se deja caer sobre la Luna. (La aceleración de la gravedad sobre la Luna = 1.62 m/s^2.)

13.5 Determine la máxima rapidez teórica que puede alcanzar un automóvil, en una distancia de 360 ft, si éste parte desde el reposo y se supone que no sufre deslizamiento. El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento es de 0.75 y 60 por ciento del peso del automóvil está distribuido en las llantas delanteras, mientras que 40 por ciento lo está en los neumáticos traseros. Suponga que el automóvil tiene *a*) tracción delantera, *b*) tracción trasera.



Figura P13.6

13.6 Las marcas que se dejaron sobre una pista de carreras indican que las ruedas traseras (las de la tracción) de un automóvil patinaron en los primeros 60 ft de la pista de 1 320 ft. *a*) Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética es de 0.60, determine la rapidez del automóvil al final de los primeros 60 ft de la pista si éste parte desde el reposo y las llantas delanteras se levantan un poco del suelo. *b*) ¿Cuál es la máxima rapidez teórica del automóvil en la línea de meta si, después de patinar 60 ft, éste no vuelve a patinar en el resto de la pista? Suponga que mientras el automóvil avanza sin patinar, 60 por ciento de su peso está sobre las llantas traseras y que el coeficiente de fricción estática es de 0.85. No tome en cuenta la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

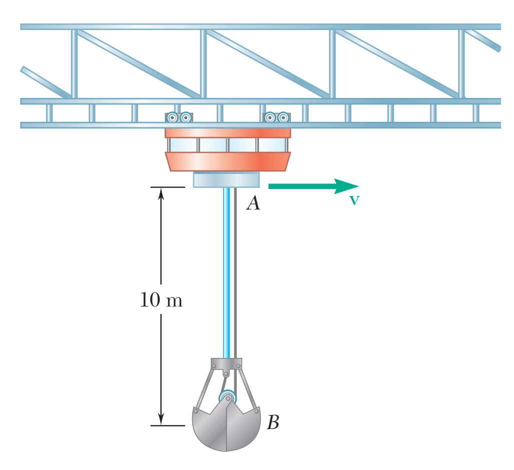


Figura P13.7 y P13.8

13.7 En una operación para mezclar minerales, un perol lleno de material está suspendido de una grúa móvil que se traslada a lo largo de un puente estacionario. El perol no debe oscilar horizontalmente más de 4 m cuando la grúa se detiene en forma súbita. Determine la máxima rapidez *v* permisible para la grúa.

13.8 En una operación para mezclar minerales, un perol lleno de material está suspendido de una grúa móvil que se traslada a lo largo de un puente estacionario. La grúa se mueve a una rapidez de 3 m/s cuando se detiene de súbito. Determine la máxima distancia horizontal a través de la cual oscilará el perol.

13.9 Un paquete se proyecta 10 m hacia arriba sobre un plano inclinado de 15° de modo que alcanza la parte superior del plano con una velocidad cero. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano inclinado es de 0.12, determine *a*) la velocidad inicial del paquete en *A*, *b*) la velocidad del paquete cuando éste regrese a su posición original.

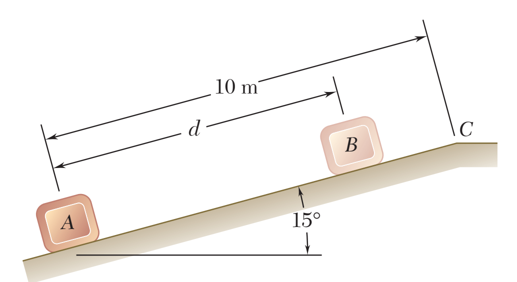


Figura P13.9 y P13.10

13.10 Un paquete se proyecta hacia arriba sobre un plano inclinado de 15° con una velocidad inicial de 8 m/s en *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano inclinado es de 0.12, determine *a*) la distancia máxima *d* que se moverá el paquete sobre el plano inclinado, *b*) la velocidad del paquete cuando éste regrese a su posición original.

13.11 Se transportan cajas sobre una banda transportadora con una velocidad $\mathbf{v}_0$ hasta una pendiente fija en *A* donde se deslizan y al final caen en *B*. Si se sabe que $\mu_k = 0.40$, determine la velocidad de la banda transportadora si las cajas dejan la pendiente en *B* con una velocidad de 8 ft/s.

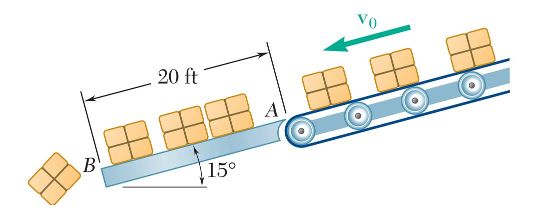


Figura *P13.11* y *P13.12*

13.12 Se transportan cajas sobre una banda transportadora con una velocidad $\mathbf{v}_0$ hasta una pendiente fija en *A* donde se deslizan y al final caen en *B*. Si se sabe que $\mu_k = 0.40$, determine la velocidad de la banda transportadora si la velocidad de las cajas en *B* es igual a cero.

13.13 Los paquetes que se muestran en la figura se lanzan hacia abajo sobre un plano inclinado en *A* con una velocidad de 1 m/s. Los paquetes se deslizan a lo largo de la superficie *ABC* hacia una banda transportadora que se mueve con una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que $\mu_k = 0.25$ entre los paquetes y la superficie *ABC*, determine la distancia *d* si los paquetes deben llegar a *C* con una velocidad de 2 m/s.

13.14 Los paquetes que se muestran en la figura se lanzan hacia abajo sobre un plano inclinado en *A* con una velocidad de 1 m/s. Los paquetes se deslizan a lo largo de la superficie *ABC* hacia una banda transportadora que se mueve con una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que $d = 7.5$ m y $\mu_k = 0.25$ entre los paquetes y todas las superficies, determine *a*) la rapidez del paquete en *C*, *b*) la distancia que se deslizará un paquete sobre la banda transportadora antes de llegar al reposo con respecto a la banda.

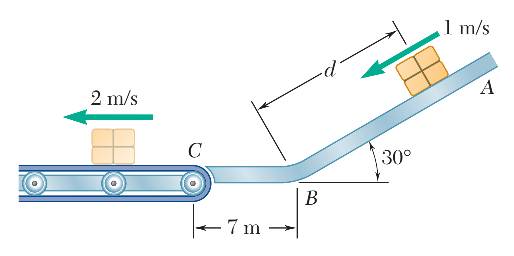


Figura P13.13 y P13.14

13.15 El tren subterráneo que se muestra en la figura viaja a una rapidez de 30 mi/h cuando se aplican por completo los frenos en las ruedas de los carros *B* y *C*, lo que causa que éstos se deslicen sobre la vía, pero los frenos no se aplican en las ruedas del carro *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética es de 0.35 entre las ruedas y la vía, determine *a*) la distancia requerida para que el tren se detenga, *b*) la fuerza en cada acoplamiento.

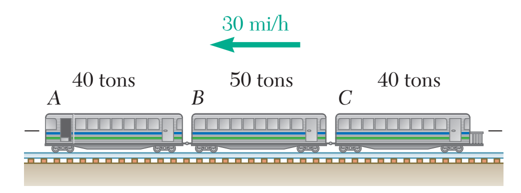


Figura P13.15

13.16 Retome el problema 13.15, y ahora suponga que los frenos se aplican sólo sobre las ruedas del carro *A*.

13.17 Un tractocamión entra a una pendiente descendente de 2 por ciento viajando a 108 km/h y debe bajar su velocidad a 72 km/h en 300 m. La cabina tiene una masa de 1 800 kg y el remolque de 5 400 kg. Determine *a*) la fuerza de frenado promedio que se debe aplicar, *b*) la fuerza promedio ejercida sobre el acoplamiento si 70 por ciento de la fuerza de frenado la proporciona el remolque y 30 por ciento la cabina.

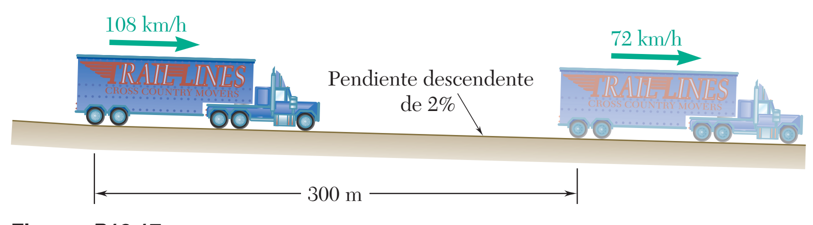


Figura ***P13.17***

13.18 Un tractocamión ingresa a una pendiente ascendente de 2 por ciento mientras viaja a 72 km/h y alcanza una rapidez de 108 km/h en 300 m. La cabina tiene una masa de 1 800 kg y el remolque de 5 400 kg. Determine *a*) la fuerza promedio en las ruedas de la cabina, *b*) la fuerza promedio en el acoplamiento entre la cabina y el remolque.

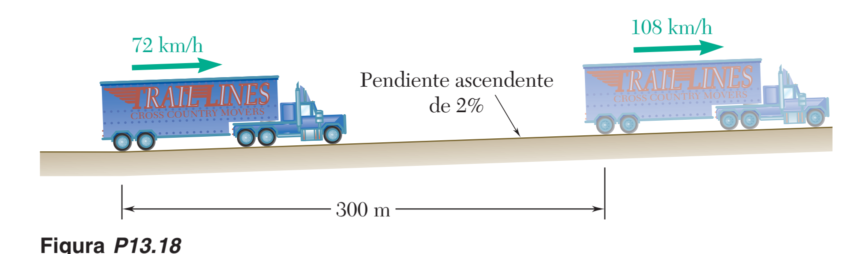


Figura ***P13.18***

13.19 Los dos bloques idénticos que se muestran en la figura se sueltan desde el reposo. Si se ignoran las masas de las poleas y el efecto de la fricción, determine *a*) la velocidad del bloque *B* después de que éste se ha movido 2 m, *b*) la tensión en el cable.

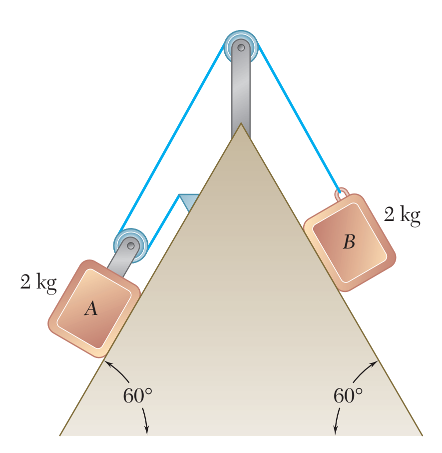


Figura *P13.19* y *P13.20*

13.20 Los dos bloques idénticos que se muestran en la figura se sueltan desde el reposo. Si se ignoran las masas de las poleas y se sabe que los coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) la velocidad del bloque *B* después de que éste se ha movido 2 m, *b*) la tensión en el cable.

13.21 El sistema que se muestra en la figura está en reposo cuando se aplica una fuerza constante de 150 N al collarín *B*. *a*) Si la fuerza actúa a través de todo el movimiento, determine la rapidez del collarín *B* al golpear al soporte en *C*. *b*) ¿Después de qué distancia *d* debería retirarse la fuerza de 150 N si el collarín debe llegar al soporte *C* con velocidad cero?

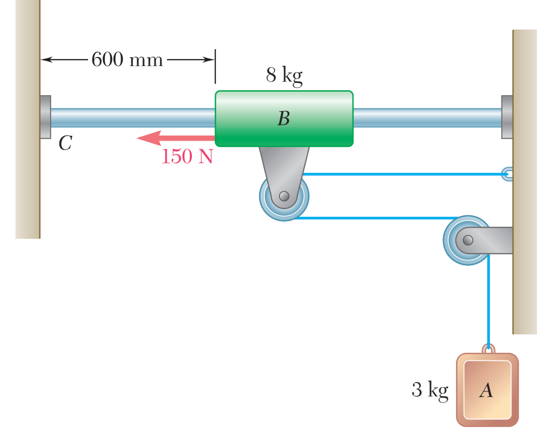


Figura P13.21

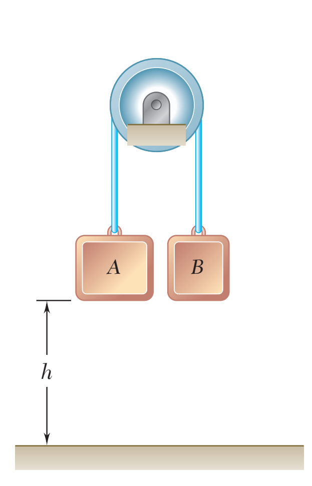


Figura P13.22

13.22 Los bloques *A* y *B* tienen masas de 11 kg y 5 kg, respectivamente, y se encuentran a una altura $h = 2$ m sobre el suelo cuando el sistema se suelta desde el reposo. Justo antes de que *A* golpee el suelo se mueve a una rapidez de 3 m/s. Determine *a*) la cantidad de energía que se disipa por la fricción en la polea, *b*) la tensión en cada porción de la cuerda durante el movimiento.

13.23 El sistema que se muestra, compuesto por un collarín *A* de 40 lb y un contrapeso *B* de 20 lb está en reposo cuando se aplica una fuerza constante de 100 lb al collarín *A*. *a*) Determine la rapidez de *A* justo antes de que golpee el soporte en *C*. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que el contrapeso *B* se sustituye por una fuerza hacia abajo de 20 lb. No tome en cuenta la fricción ni las masas de las poleas.

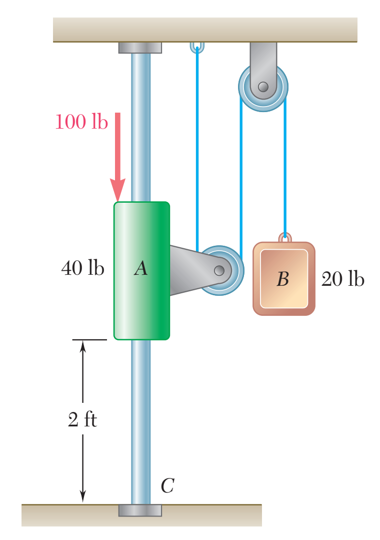


Figura P13.23

13.24 Cuatro paquetes, cada uno con un peso de 6 lb, se mantienen fijos por la fricción sobre una banda transportadora que está desacoplada de su motor. Cuando el sistema se suelta desde el reposo, el paquete *1* deja la banda en *A* justo cuando el paquete *4* ingresa a la parte inclinada de la banda en *B*. Determine *a*) la rapidez del paquete *2* cuando deja la banda en *A*, *b*) la rapidez del paquete *3* cuando deja la banda en *A*. No tome en cuenta las masas de la banda ni los rodillos.

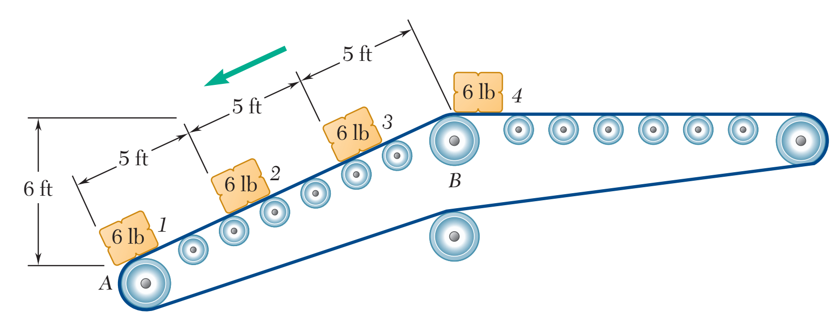


Figura P13.24

13.25 Dos bloques *A* y *B*, de 4 y 5 kg de masa, respectivamente, están conectados por una cuerda que pasa sobre las poleas en la forma que se muestra en la figura. Un collarín *C* de 3 kg se coloca sobre el bloque *A* y el sistema se suelta desde el reposo. Después de que los bloques se mueven 0.9 m, se retira el collarín *C* y los bloques *A* y *B* continúan moviéndose. Determine la rapidez del bloque *A* justo antes de que golpee el suelo.

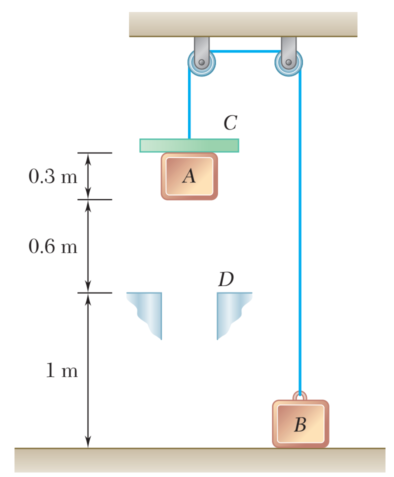


Figura P13.25

13.26 Un bloque de 10 lb está unido a un resorte sin estirar con una constante $k = 12$ lb/in. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y el plano son 0.60 y 0.40, respectivamente. Si se aplica lentamente una fuerza **F** al bloque hasta que la tensión en el resorte alcance 20 lb y luego, de manera súbita, se retira la fuerza determine *a*) la rapidez del bloque cuando regresa a su posición inicial, *b*) la rapidez máxima alcanzada por el bloque.

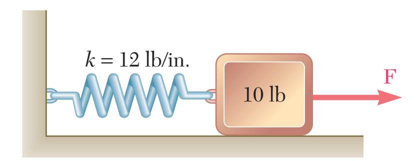


Figura P13.26 y P13.27

13.27 Un bloque de 10 lb está unido a un resorte sin estirar con una constante $k = 12$ lb/in. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y el plano son 0.60 y 0.40, respectivamente. Si se aplica una fuerza **F** al bloque hasta que la tensión en el resorte alcance 20 lb y luego, de manera súbita, se retira la fuerza determine *a*) a qué distancia se moverá el bloque hacia la izquierda antes de llegar al reposo y *b*) si el bloque se moverá después de nuevo a la derecha.

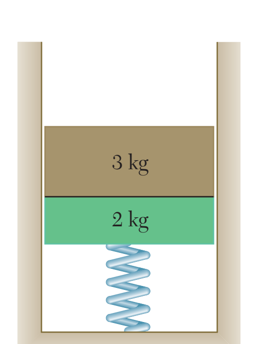


Figura *P13.28*

13.28 Un bloque de 3 kg descansa sobre la parte superior de un bloque de 2 kg soportado pero no unido a un resorte con una constante de 40 N/m. El bloque superior se retira de manera repentina. Determine *a*) la rapidez máxima alcanzada por el bloque de 2 kg, *b*) la altura máxima alcanzada por el bloque de 2 kg.

13.29 Retome el problema 13.28, y ahora suponga que el bloque de 2 kg está unido al resorte.

13.30 Un collarín *C* de 8 lb se desliza sobre una varilla horizontal entre los resortes *A* y *B*. Si se empuja el collarín hacia la derecha hasta que el resorte *B* se comprime 2 in. y se suelta, determine la distancia que recorre el collarín, suponiendo *a*) ninguna fricción entre el collarín y la varilla, *b*) un coeficiente de fricción $\mu_k = 0.35$.

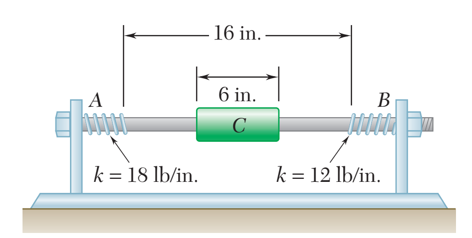


Figura *P13.30*

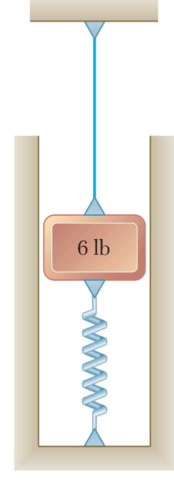


Figura P13.31

13.31 Un bloque de 6 lb está unido a un cable y a un resorte como se muestra en la figura. La constante del resorte es $k = 8$ lb/in. y la tensión en el cable es de 3 lb. Si se corta el cable, determine *a*) el desplazamiento máximo del bloque, *b*) la rapidez máxima del bloque.

13.32 Un automóvil fuera de control que viaja a 65 mi/h golpea en forma perpendicular un amortiguador de impactos de una autopista en el que el automóvil se detiene al aplastar en forma sucesiva a los barriles de acero. La magnitud F que se requiere para aplastar los barriles se muestra como una función de la distancia x que el automóvil se ha desplazado dentro de la zona de amortiguamiento. Si se sabe que el automóvil tiene un peso de 2 250 lb y se desprecia el efecto de la fricción, determine *a*) la distancia que el automóvil se desplazará en el amortiguador antes de detenerse, *b*) la desaceleración máxima del automóvil.

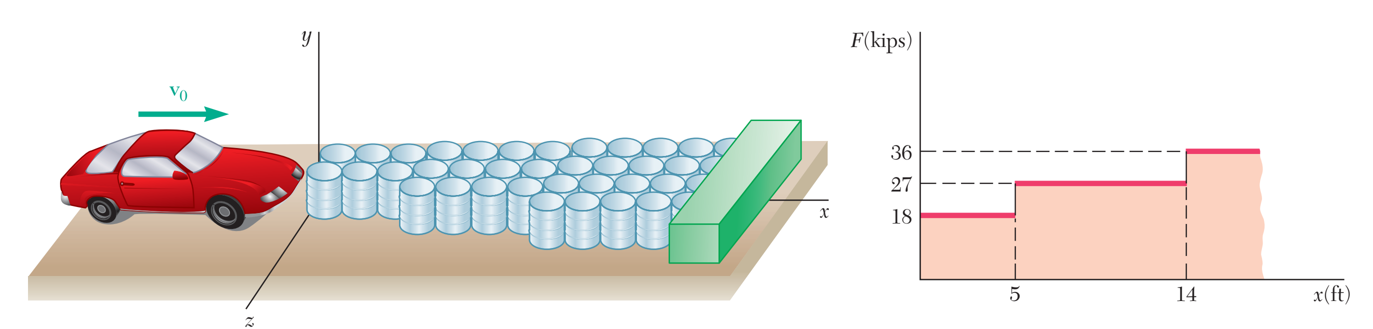


Figura *P13.32*

13.33 Un pistón de masa m y área de sección transversal A está en equilibrio bajo la presión p en el centro de un cilindro cerrado en ambos extremos. Si se supone que el pistón se mueve hacia la izquierda una distancia $a/2$ y se suelta, y si se sabe que la presión sobre cada lado del pistón varía inversamente con el volumen, determine la velocidad del pistón cuando regresa al centro del cilindro. Desprecie la fricción entre el pistón y el cilindro y exprese su respuesta en términos de m, a, p y A.

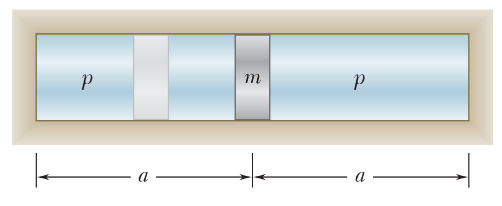


Figura P13.33

13.34 Exprese la aceleración de la gravedad g_h a una altura h sobre la superficie de la Tierra en términos de la aceleración de la gravedad g_0 en la superficie terrestre, la altura h y el radio R de la Tierra. Determine el error porcentual si el peso que un objeto tiene sobre la superficie de la Tierra se usa como su peso a una altura de *a*) 1 km, *b*) 1 000 km.

13.35 Un cohete se dispara verticalmente desde la superficie de la Luna con una rapidez v_0. Deduzca una fórmula para el cociente h_n/h_u de las alturas alcanzadas con una rapidez v, si se usa la ley de Newton de la gravitación para calcular h_n y se recurre a un campo gravitacional uniforme para calcular h_u. Exprese su respuesta en términos de la aceleración de la gravedad g_m sobre la superficie de la Luna, el radio R_m de la Luna y las velocidades v y v_0.

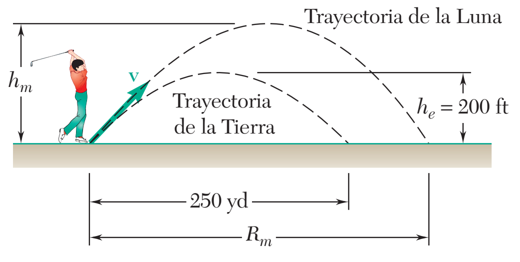


Figura P13.36

13.36 Una pelota de golf golpeada en la Tierra alcanza una altura máxima de 200 pies y choca en el suelo a 250 yardas de distancia. ¿Qué distancia recorrerá la misma pelota en la Luna si la magnitud y dirección de su velocidad son iguales que en la Tierra, inmediatamente después de haber sido golpeada? Suponga que la pelota se golpea y choca con la superficie a la misma altura y que se desprecia el efecto de la atmósfera en la Tierra, de manera que en ambos casos la trayectoria es una parábola. La aceleración de la gravedad en la Luna es 0.165 veces la de la Tierra.

13.37 Un bloque A de latón (no magnético) de 300 g y un imán B de acero de 200 g están en equilibrio en un tubo de latón bajo la acción de la fuerza repelente magnética de otro imán de acero C ubicado a una distancia x = 4 mm de B. La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre B y C. Si el bloque A se quita repentinamente, determine *a*) la velocidad máxima de B, *b*) la aceleración máxima de B. Suponga que la resistencia del aire y la fricción son despreciables.

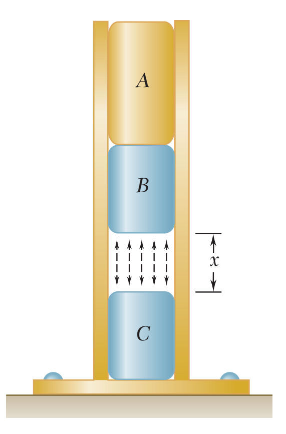


Figura *P13.37*

13.38 Los resortes no lineales se clasifican como duros o suaves, dependiendo de la curvatura de su función fuerza-deflexión (vea la figura). Si un instrumento delicado que tiene una masa de 5 kg se coloca sobre un resorte de longitud l de manera que su base justo toca el resorte sin deformar y después de manera inadvertida se libera desde esa posición, determine la deflexión máxima x_m del resorte y la fuerza máxima F_m ejercida por el resorte, suponiendo *a*) un resorte lineal de constante k = 3 kN/m, *b*) un resorte duro, no lineal, para el cual $F = (3 \text{ kN/m})(x + 160x^3)$.

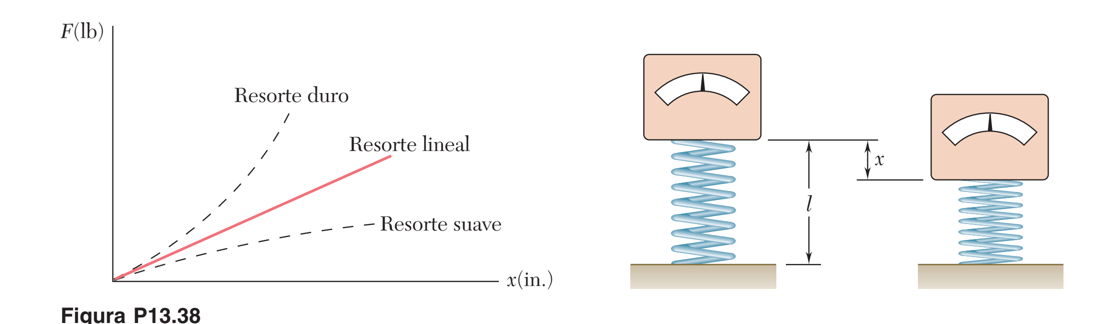


Figura P13.38

13.39 A una esfera en A se le da una velocidad hacia abajo $\mathbf{v}_0$ y oscila en un círculo vertical de radio l y centro O. Determine la velocidad más baja $\mathbf{v}_0$ para la cual la esfera alcanzará el punto B cuando ésta gire en torno al punto O *a*) si AO es una cuerda, *b*) si AO es una varilla delgada de masa despreciable.

13.40 A la esfera en A se le da una velocidad hacia abajo $\mathbf{v}_0$ de magnitud igual a 5 m/s y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud $l = 2$ m unida a un soporte en O. Determine el ángulo θ al cual se romperá la cuerda, si se sabe que ésta puede resistir una tensión máxima igual al doble del peso de la esfera.

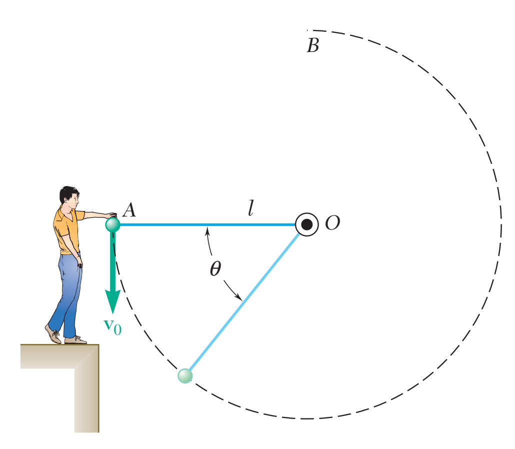


Figura P13.39 y P13.40

13.41 Una sección de la pista de una montaña rusa está compuesta por dos arcos circulares AB y CD unidos por una porción recta BC. El radio de AB es de 90 ft y el radio de CD es de 240 ft. El carro y sus ocupantes, con un peso total de 560 lb, llega al punto A prácticamente sin velocidad y luego cae libremente a lo largo de la pista. Determine la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carro cuando éste alcanza el punto B. Desprecie la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

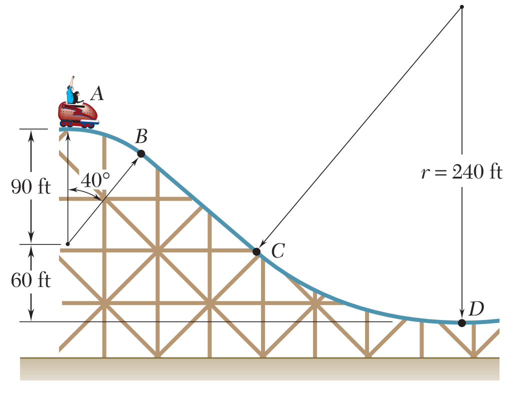


Figura P13.41 y P13.42

13.42 Una sección de la pista de una montaña rusa está compuesta por dos arcos circulares AB y CD unidos por una porción recta BC. El radio de AB es de 90 ft y el radio de CD es de 240 ft. El carro y sus ocupantes, con un peso total de 560 lb, llega al punto A prácticamente sin velocidad y luego cae libremente a lo largo de la pista. Determine los valores máximo y mínimo de la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carro mientras éste viaja desde A hasta D. Desprecie la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

13.43 Una pequeña esfera B de masa m se libera desde el reposo en la posición mostrada y oscila libremente en un plano vertical, primero alrededor de O y luego alrededor de la clavija A después de que la cuerda entra en contacto con la clavija. Determine la tensión en la cuerda *a*) justo antes de que la cuerda entre en contacto con la clavija, *b*) justo después de que la cuerda hace contacto con la clavija.

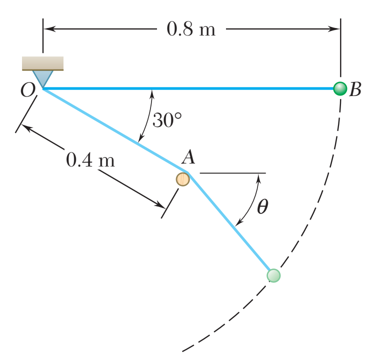


Figura *P13.43*

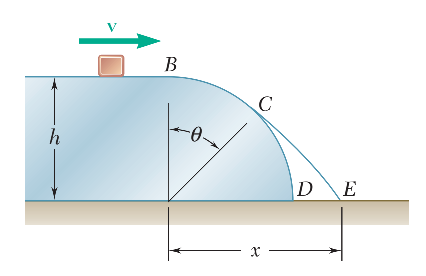


Figura P13.44 y *P13.45*

13.44 Un pequeño bloque se desliza a una rapidez $v = 8$ ft/s sobre una superficie horizontal a una altura $h = 3$ ft sobre el suelo. Determine *a*) el ángulo θ al cual el bloque abandonará la superficie cilíndrica *BCD*, *b*) la distancia x a la cual golpeará el suelo. No tome en cuenta la fricción ni la resistencia del aire.

13.45 Un pequeño bloque se desliza a una rapidez v sobre una superficie horizontal. Se sabe que $h = 2.5$ m, determine la rapidez requerida del bloque si éste debe dejar la superficie cilíndrica *BCD* cuando $\theta = 40°$.

13.46 *a*) Una mujer de 120 lb conduce una bicicleta de 15 lb hacia arriba por una pendiente de 3 por ciento a una rapidez constante de 5 ft/s. ¿Cuánta potencia debe generar la mujer? *b*) Un hombre de 180 lb sobre una bicicleta de 18 lb empieza a desplazarse hacia abajo por la misma pendiente y mantiene una rapidez constante de 20 ft/s accionando los frenos. ¿Cuánta potencia disipan los frenos? No tome en cuenta la resistencia del aire ni la resistencia al rodamiento.

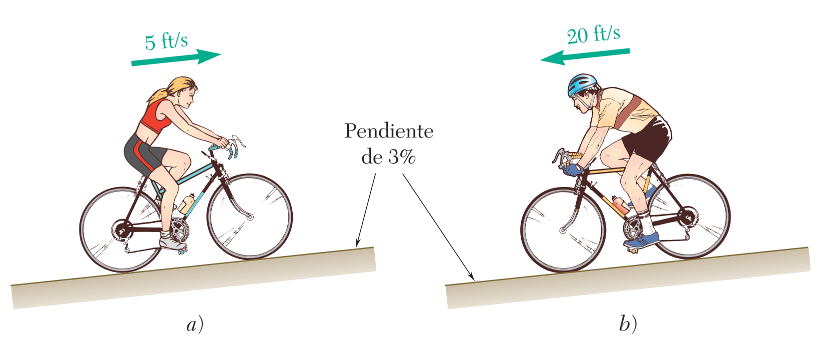


Figura P13.46

13.47 Se va a deducir una fórmula para especificar la potencia de un motor eléctrico que acciona una banda transportadora que mueve material sólido a diferentes velocidades y a distintas alturas y distancias. Si se denota la eficiencia de los motores mediante η y no se toma en cuenta la potencia que se necesita para accionar la propia banda, obtenga una fórmula *a*) en el sistema de unidades del SI, para la potencia P en kW, en términos de la tasa del flujo de masa m en kg/h, la altura b y la distancia horizontal l en metros, y *b*) en unidades de uso común en Estados Unidos, para la potencia en hp, en términos de la razón de flujo de masa w en tons/h y la altura b y la distancia horizontal l en pies.

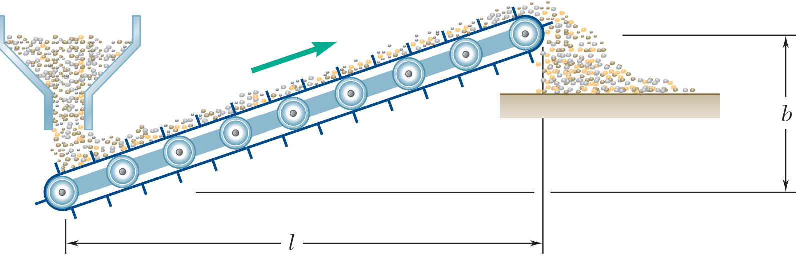


Figura *P13.47*

13.48 Un transportador de sillas está diseñado para trasladar 900 esquiadores por hora desde la base *A* hasta la cumbre *B*. El peso promedio de un esquiador es de 160 lb y la rapidez promedio del transportador es de 250 ft/min. Determine *a*) la potencia promedio requerida, *b*) la capacidad requerida del motor si la eficiencia mecánica es de 85 por ciento y se permite una sobrecarga de 300 por ciento.

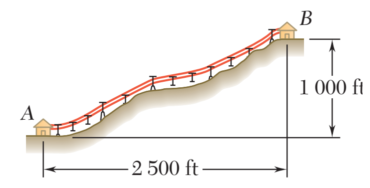
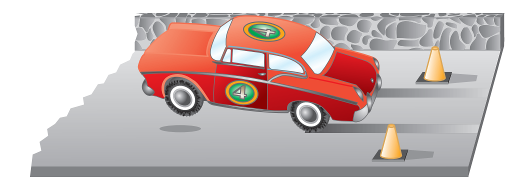


Figura *P13.48*

13.49 En una carrera de automóviles, las llantas traseras (de tracción) de un automóvil de 1 000 kg patinan los primeros 20 m y ruedan sin patinar los restantes 380 m. Las ruedas delanteras del automóvil se despegan un poco del piso durante los primeros 20 m y para el resto de la carrera 80 por ciento del peso del automóvil está sobre las ruedas traseras. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.90$ y $\mu_k = 0.68$, determine la potencia desarrollada por el automóvil en las llantas de tracción *a*) al final de los primeros 20 m de la carrera, *b*) al final de la carrera. Dé su respuesta en kW y en hp. No tome en cuenta el efecto de la resistencia del aire ni la resistencia al rodamiento.


Figura P13.49

13.50 Se requieren 15 s para levantar un automóvil de 1 200 kg y la plataforma de soporte de 300 kg del elevador de automóviles hidráulico hasta una altura de 2.8 m. Si se sabe que la eficiencia de conversión total de potencia eléctrica en mecánica para el sistema es de 82 por ciento, determine *a*) la potencia de salida promedio entregada por la bomba hidráulica para elevar el sistema, *b*) la potencia eléctrica promedio que se requiere.

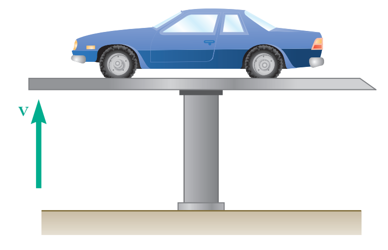


Figura P13.50

13.51 La velocidad del elevador del problema 13.50 aumenta de manera uniforme desde cero hasta su valor máximo en 7.5 s y después disminuye uniformemente hasta cero en 7.5 s. Si se sabe que la salida de potencia máxima de la bomba hidráulica es de 6 kW cuando la velocidad es máxima, determine la fuerza de elevación máxima proporcionada por la bomba.

13.52 Un tren de 100 ton que viaja sobre una pista horizontal requiere 400 hp para mantener una rapidez constante de 50 mi/h. Determine *a*) la fuerza total necesaria para contrarrestar la fricción del eje, la resistencia al rodamiento y la resistencia del aire, *b*) los caballos de fuerza adicionales requeridos si el tren debe mantener la misma rapidez cuando asciende por una pendiente de 1 por ciento.

13.53 Se sabe que la resistencia de fricción de un barco varía directamente como la potencia 1.75 de la velocidad v del barco. Un solo remolcador a máxima potencia puede jalar al barco a una rapidez constante de 4.5 km/h, ejerciendo una fuerza constante de 300 kN. Determine *a*) la potencia desarrollada por el remolcador, *b*) la rapidez máxima a la que dos remolcadores, capaces de entregar la misma potencia, pueden arrastrar al barco.

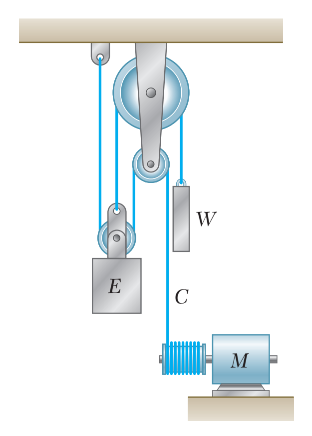


Figura P13.54

13.54 El elevador E tiene una masa de 3 000 kg cuando está completamente cargado y se conecta como se muestra a un contrapeso W de 1 000 kg de masa. Determine la potencia en kW que entrega el motor *a*) cuando el elevador se mueve hacia abajo a una rapidez constante de 3 m/s, *b*) cuando tiene una velocidad hacia arriba de 3 m/s y una desaceleración de 0.5 m/s^2.

13.6. ENERGÍA POTENCIAL†

Considere de nuevo un cuerpo de peso **W** que se mueve a lo largo de una trayectoria curva desde un punto A_1 de elevación y_1 hasta un punto A_2 de elevación y_2 (figura 13.4). En la sección 13.2 se estudió que el trabajo de la fuerza de gravedad **W** durante este desplazamiento es

$$U_{1\rightarrow 2} = Wy_1 - Wy_2 \qquad (13.4)$$

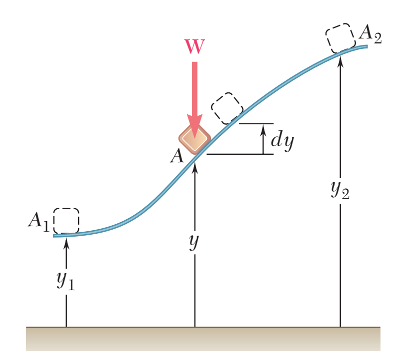


Figura 13.4 (*repetida*)

El trabajo de **W** puede obtenerse entonces al restar el valor de la función Wy, correspondiente a la segunda posición del cuerpo, del valor que corresponde a su primera posición. El trabajo de **W** es independiente de la trayectoria real seguida; depende sólo de los valores inicial y final de la función Wy. Esta función recibe el nombre de *energía potencial* del cuerpo respecto a la *fuerza de gravedad* **W**, y se denota mediante V_g. Se escribe

$$U_{1\rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \qquad \text{con } V_g = Wy \qquad (13.16)$$

Se observa que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, esto es, *si la energía potencial aumenta* durante el desplazamiento (como en el caso considerado aquí), *el trabajo* $U_{1\rightarrow 2}$ *es negativo*. Si, por otro lado, el trabajo de **W** es positivo, disminuye la energía potencial. Por lo tanto, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del trabajo que puede realizarse mediante su peso **W**. Puesto que en la fórmula (13.16) únicamente está implicado el *cambio* en la energía potencial, y no el valor real de V_g, puede agregarse una constante arbitraria a la expresión obtenida para V_g. En otras palabras, el nivel de referencia desde el cual es medida la elevación y se puede elegir de manera arbitraria. Advierta que la energía potencial se expresa en las mismas unidades que el trabajo, esto es, en joules si se usan unidades SI y en ft · lb o in. · lb si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos.

†Parte del material de esta sección ya se consideró en la sección 10.7.

Hay que observar que la expresión que se acaba de obtener para la energía potencial de un cuerpo con respecto a la gravedad sólo es válida mientras es posible suponer que el peso **W** del cuerpo permanece constante. Esto es, siempre y cuando los desplazamientos del cuerpo sean pequeños comparados con el radio de la Tierra. Sin embargo, en el caso de un vehículo espacial debemos tomar en consideración la variación de la fuerza de la gravedad con la distancia r desde el centro de la Tierra. Con base en la expresión que se obtuvo en la sección 13.2 para el trabajo de una fuerza gravitacional, se escribe (figura 13.6)

$$U_{1\rightarrow 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \qquad (13.7)$$

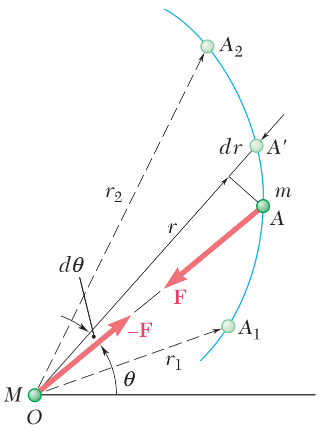


Figura 13.6 (*repetida*)

El trabajo de la fuerza de gravedad puede entonces obtenerse al sustraer el valor de la función $-GMm/r$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. En consecuencia, la expresión que debe usarse para la energía potencial V_g cuando la variación en la fuerza de la gravedad no puede ignorarse es

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \qquad (13.17)$$

Si se toma la primera de las relaciones (12.29) en cuenta, se escribe V_g en la forma alternativa

$$V_g = -\frac{WR^2}{r} \qquad (13.17')$$

donde R es el radio de la Tierra y W es el valor del peso del cuerpo en la superficie terrestre. Cuando cualquiera de las relaciones (13.17) o (13.17′) se usa para expresar V_g, la distancia r debe, desde luego, medirse desde el centro de la Tierra.† Advierta que V_g siempre es negativa y que se aproxima a cero para valores muy grandes de r.

Considere ahora un cuerpo unido a un resorte y que se mueve de una posición A_1, correspondiente a una deformación x_1 del resorte, a una posición A_2, correspondiente a una deformación x_2 del resorte (figura 13.5). Recuérdese de la sección 13.2 que el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es

$$U_{1\rightarrow 2} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (13.6)$$

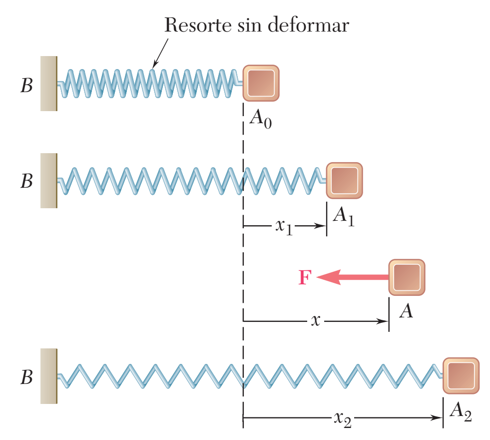


Figura 13.5 (*repetida*)

El trabajo de la fuerza elástica se obtiene de tal modo al sustraer el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. Esta función se denota mediante V_e y se denomina la *energía potencial* del cuerpo con respecto a la *fuerza elástica* **F**. Se escribe

$$U_{1\rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \qquad \text{con } V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (13.18)$$

y se observa que durante el desplazamiento considerado, el trabajo de la fuerza **F** ejercido por el resorte sobre el cuerpo es negativo y que aumenta la energía potencial V_e. Hay que observar que la expresión que

†Las expresiones dadas para V_g en (13.17) y (13.17′) son válidas sólo cuando $r \geq R$, esto es, cuando el cuerpo considerado está sobre la superficie de la Tierra.

se obtuvo para V_e sólo es válida si las deformaciones del resorte se miden a partir de su posición no deformada. Por otro lado, es posible utilizar la fórmula (13.18) incluso cuando el resorte se gira alrededor de su extremo fijo (figura 13.10*a*). El trabajo de la fuerza elástica depende de únicamente de las deformaciones inicial y final del resorte (figura 13.10*b*).

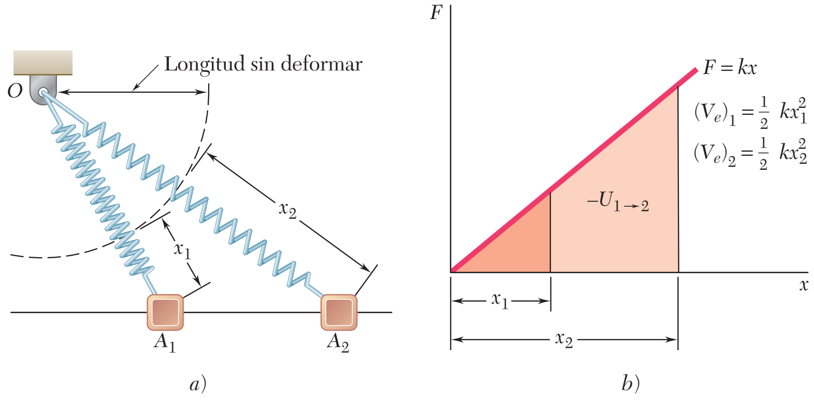


Figura 13.10

Es posible recurrir al concepto de energía potencial cuando están implicadas fuerzas diferentes a las de la gravedad y elásticas. En realidad, sigue siendo válido siempre que el trabajo de la fuerza considerada sea independiente de la trayectoria seguida por su punto de aplicación cuando este punto se mueve de una posición dada A_1 a una posición dada A_2. Este tipo de fuerzas se dice que son *fuerzas conservativas*; las propiedades generales de las fuerzas conservativas se estudian en la siguiente sección.

*13.7. FUERZAS CONSERVATIVAS

Como se indica en la sección precedente, una fuerza **F** que actúa sobre una partícula *A* se dice que es conservativa *si su trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ es independiente de la trayectoria seguida por la partícula A cuando se mueve de* A_1 *a* A_2 (figura 13.11*a*). Se puede escribir entonces

$$U_{1\rightarrow 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \qquad (13.19)$$

o, en forma resumida,

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \qquad (13.19')$$

La función $V(x, y, z)$ recibe el nombre de energía potencial, o *función potencial* de **F**.

Note que si A_2 se elige para coincidir con A_1, esto es, si la partícula describe una trayectoria cerrada (figura 13.11*b*), $V_1 = V_2$ y el trabajo es cero. De tal modo, es posible escribir para una fuerza conservativa **F**

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (13.20)$$

donde el círculo sobre el signo integral indica que la trayectoria es cerrada.

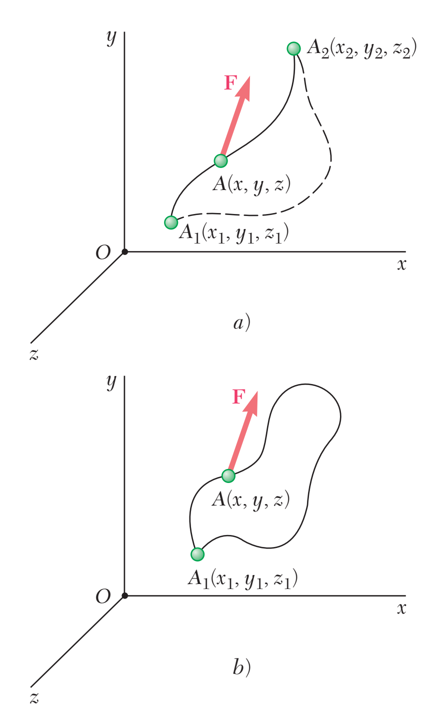


Figura 13.11

Al aplicar ahora (13.19) entre dos puntos vecinos $A(x, y, z)$ y $A'(x + dx, y + dy, z + dz)$. El trabajo elemental dU correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$ de A a A' es

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$

o

$$dU = -dV(x, y, z) \qquad (13.21)$$

Así, el trabajo elemental de una fuerza conservativa es una *diferencial exacta.*

Al sustituir para dU en (13.21) la expresión que se obtuvo en (13.1″) y recordar la definición de la diferencial de una función de varias variables, se escribe

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

de la cual se sigue que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (13.22)$$

Es claro que las componentes de **F** deben ser funciones de las coordenadas x, y y z. En consecuencia, una condición *necesaria* para una fuerza conservativa es que ésta sólo depende de la posición de su punto de aplicación. Las relaciones (13.22) pueden expresarse de manera más concisa si se escribe

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

El vector entre paréntesis se conoce como el *gradiente de la función escalar* V y se denota por **grad** V. Se escribe entonces para cualquier fuerza conservativa

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\,V \qquad (13.23)$$

Se demostró que las relaciones (13.19) a (13.23) serán satisfechas por cualquier fuerza conservativa. También se mostró que si una fuerza **F** satisface una de estas relaciones, **F** debe ser una fuerza conservativa.

13.8. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En las dos secciones anteriores se ha visto que el trabajo de una fuerza conservativa, tal como el peso de una partícula o la fuerza ejercida por un resorte, puede expresarse como un cambio en la energía potencial. Cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el principio del trabajo y la energía enunciado en la sección 13.3 puede expresarse en forma modificada. Al sustituir $U_{1\rightarrow 2}$ de (13.19′) en (13.10), se escribe

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (13.24)$$

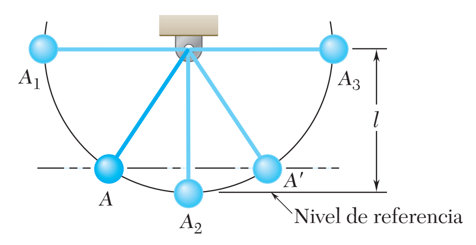


Figura 13.12

La fórmula (13.24) indica que cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de la energía cinética y de la energía potencial de la partícula permanece constante.* La suma $T + V$ se denomina la *energía mecánica total* de la partícula y se denota por medio de E.

Considere, por ejemplo, el péndulo que se analizó en la sección 13.4, el cual se suelta sin velocidad desde A_1 y se permite que se balancee en un plano vertical (figura 13.12). Al medir la energía potencial desde el nivel de A_2, hay, en A_1,

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = Wl \qquad T_1 + V_1 = Wl$$

Al recordar que en A_2 la rapidez del péndulo es $v_2 = \sqrt{2gl}$, se tiene

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(2gl) = Wl \qquad V_2 = 0$$
$$T_2 + V_2 = Wl$$

Se verifica de ese modo que la energía mecánica total $E = T + V$ del péndulo es la misma en A_1 y en A_2. En tanto que la energía es enteramente potencial en A_1, ésta se vuelve por completo cinética en A_2, y cuando el péndulo se mantiene oscilando hacia la derecha, la energía cinética se transforma de nuevo en energía potencial. En A_3, $T_3 = 0$ y $V_3 = Wl$.

Puesto que la energía mecánica total del péndulo permanece constante y debido a que la energía potencial depende exclusivamente de su elevación, la energía cinética del péndulo tendrá el mismo valor en cualesquiera dos puntos ubicados al mismo nivel. De tal manera, la rapidez del péndulo es la misma en A y en A' (figura 13.12). Este resultado puede extenderse al caso de una partícula que se mueve a lo largo de cualquier trayectoria determinada, independientemente de la forma de la trayectoria, siempre y cuando las únicas fuerzas que actúen sobre la partícula sean su peso y la reacción normal de la trayectoria. La partícula de la figura 13.13, por ejemplo, la cual desliza sobre un plano vertical a lo largo de una pista sin fricción, tendrá la misma velocidad en A, A' y A''.

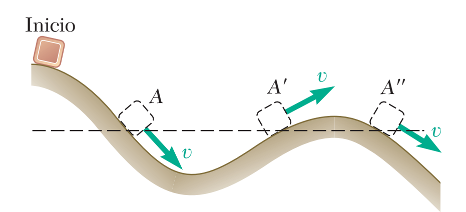


Figura 13.13

Si bien el peso de una partícula y la fuerza ejercida por un resorte son fuerzas conservativas, *las fuerzas de fricción son fuerzas no conservativas.* En otras palabras, *el trabajo de la fuerza de fricción no puede expresarse como un cambio en la energía potencial.* El trabajo de la fuerza de fricción depende de la trayectoria seguida por su punto de aplicación; y mientras el trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ definido por (13.19) es positivo o negativo de acuerdo con el sentido de movimiento, *el trabajo de una fuerza de fricción*, como se señaló en la sección 13.4, *siempre es negativo.* Hay que concluir que cuando un sistema mecánico implica fricción, su energía mecánica total no permanece constante, sino que disminuye. Sin embargo, la energía del sistema no se pierde; se transforma en calor, y la suma de la *energía mecánica* y de la *energía térmica* del sistema permanece constante.

Otras formas de energía también pueden estar implicadas en un sistema. Por ejemplo, un generador convierte energía mecánica en *energía eléctrica*; un motor a gasolina convierte *energía química* en energía mecánica; un reactor nuclear convierte *masa* en energía térmica. Si se toman en cuenta todas las formas de energía, la energía de cualquier sistema puede considerarse como constante y el principio de conservación de la energía sigue siendo válido bajo todas las condiciones.

13.9. MOVIMIENTO BAJO UNA FUERZA CENTRAL CONSERVATIVA. APLICACIÓN A LA MECÁNICA CELESTE

En la sección 12.9 se analizó que cuando una partícula P se mueve bajo la acción de una fuerza central $\mathbf{F}$, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula alrededor del centro de fuerza O es constante. Si la fuerza $\mathbf{F}$ es también conservativa, existe ahí una energía potencial V asociada con $\mathbf{F}$, y la energía total $E = T + V$ de la partícula es constante (sección 13.8). Así, cuando una partícula se mueve bajo una fuerza central conservativa, tanto el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular como el principio de conservación de la energía pueden utilizarse para estudiar su movimiento.

Considere, por ejemplo, un vehículo espacial de masa m que se mueve bajo la fuerza gravitacional de la Tierra. Suponga que inicia su vuelo libre en el punto P_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra, con una velocidad $\mathbf{v}_0$ formando un ángulo ϕ_0 con el radio vector OP_0 (figura 13.14). Sea P un punto de la trayectoria descrita por el vehículo; denote por r la distancia de O a P, por $\mathbf{v}$ la velocidad del vehículo en P, y por ϕ el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y el radio vector OP. Al aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de O entre P_0 y P (sección 12.9), se escribe

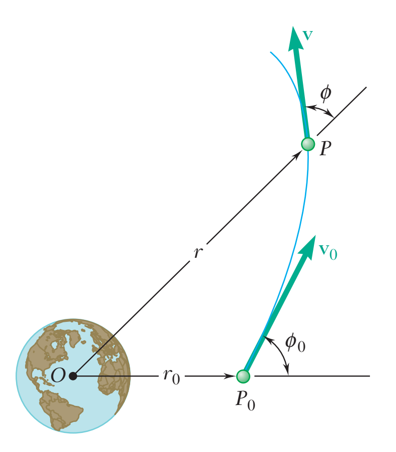


Figura 13.14

$$r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r m v \operatorname{sen} \phi \qquad (13.25)$$

Al recordar la expresión (13.17) que se obtuvo para la energía potencial debida a una fuerza gravitacional, se aplica el principio de conservación de la energía entre P_0 y P y se escribe

$$T_0 + V_0 = T + V$$

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (13.26)$$

donde M es la masa de la Tierra.

La ecuación (13.26) puede resolverse para la magnitud v de la velocidad del vehículo en P cuando se conoce la distancia r de O a P; es posible entonces utilizar la ecuación (13.25) para determinar el ángulo ϕ que forma la velocidad con el radio vector OP.

Las ecuaciones (13.25) y (13.26) también se emplean para determinar los valores máximo y mínimo de r en el caso de un satélite lanzado desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0 (figura 13.15). Los valores deseados de r se obtienen haciendo $\phi = 90°$ en (13.25) y eliminando v entre las ecuaciones (13.25) y (13.26).

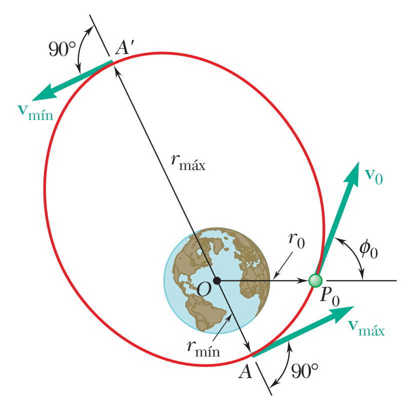
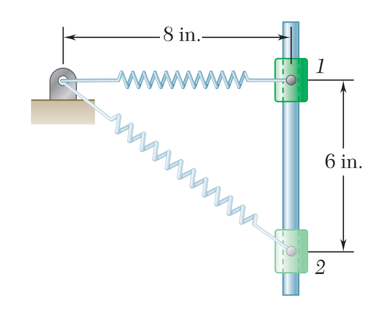


Figura 13.15

Debe notarse que la aplicación de los principios de conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular conducen a una formulación más fundamental de los problemas de la mecánica celeste que con el método indicado en la sección 12.12. En todos los casos que implican lanzamientos oblicuos, también producirá cálculos mucho más simples. Y si bien es necesario usar el método de la sección 12.12 cuando se van a determinar la trayectoria real o el periodo orbital del vehículo espacial, los cálculos se simplificarán si se usan primero los principios de conservación para calcular los valores máximo y mínimo del radio vector r.



PROBLEMA RESUELTO 13.6

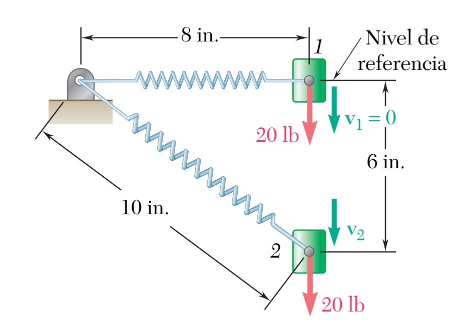
Un collarín de 20 lb desliza sin fricción a lo largo de una varilla vertical en la forma que se indica. El resorte unido al collarín tiene una longitud no deformada de 4 in. y una constante de 3 lb/in. Si el collarín se suelta desde el reposo en la posición *1*, determine su velocidad después de que se ha movido 6 in. hasta la posición *2*.

SOLUCIÓN

Posición *1*. ***Energía potencial.*** El alargamiento del resorte es

$$x_1 = 8 \text{ in.} - 4 \text{ in.} = 4 \text{ in.}$$

y se tiene



$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}(3 \text{ lb/in.})(4 \text{ in.})^2 = 24 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

Al elegir el nivel de referencia como se muestra, se tiene $V_g = 0$. Por lo tanto,

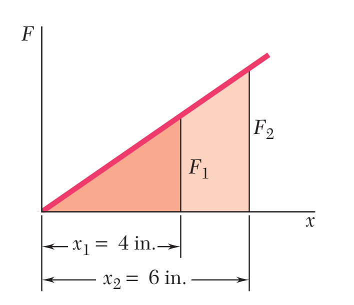
$$V_1 = V_e + V_g = 24 \text{ in.} \cdot \text{lb} = 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Puesto que la velocidad en la posición *1* es cero, $T_1 = 0$.

Posición *2*. ***Energía potencial.*** El alargamiento del resorte es

$$x_2 = 10 \text{ in.} - 4 \text{ in.} = 6 \text{ in.}$$

y se tiene



$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_2^2 = \tfrac{1}{2}(3 \text{ lb/in.})(6 \text{ in.})^2 = 54 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$
$$V_g = Wy = (20 \text{ lb})(-6 \text{ in.}) = -120 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

Por lo tanto,

$$V_2 = V_e + V_g = 54 - 120 = -66 \text{ in.} \cdot \text{lb} = -5.5 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

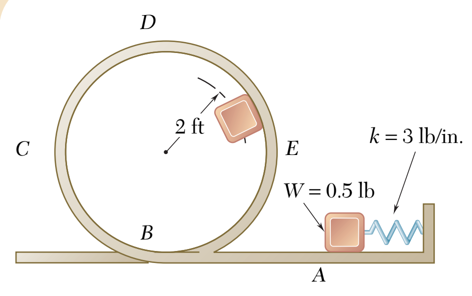
Energía cinética

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{20}{32.2}v_2^2 = 0.311v_2^2$$

Conservación de la energía. Al aplicar el principio de la conservación de la energía entre las posiciones *1* y *2*, se escribe

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 2 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 0.311v_2^2 - 5.5 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$
$$v_2 = \pm 4.91 \text{ ft/s}$$

$\mathbf{v}_2 = 4.91 \text{ ft/s}\downarrow$ ◀

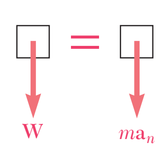


PROBLEMA RESUELTO 13.7

Un objeto de 0.5 lb se empuja contra el resorte en A y se suelta desde el reposo. Ignorando la fricción, determine la deformación mínima del resorte para la cual el objeto viajará alrededor del aro $ABCDE$ y permanecerá en contacto con él todo el tiempo.

SOLUCIÓN

Rapidez necesaria en el punto *D*. Cuando el objeto pasa por el punto más alto D, su energía potencial con respecto a la gravedad es máxima y consecuentemente su energía cinética y su rapidez son mínimas. Puesto que el objeto debe permanecer en contacto con el aro, la fuerza **N** ejercida sobre el objeto por el aro debe ser igual o mayor que cero. Al dejar $\mathbf{N} = 0$, se calcula la rapidez mínima posible v_D.



$$+\downarrow\Sigma F_n = ma_n: \qquad W = ma_n \qquad mg = ma_n \qquad a_n = g$$

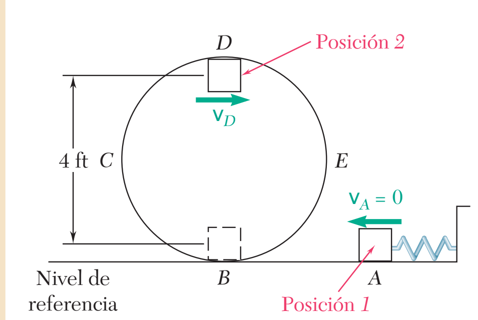
$$a_n = \frac{v_D^2}{r}: \qquad v_D^2 = ra_n = rg = (2 \text{ ft})(32.2 \text{ ft/s}^2) = 64.4 \text{ ft}^2/\text{s}^2$$

Posición *1*. *Energía potencial.* Si se denota por x la deformación del resorte y se advierte que $k = 3$ lb/in. $= 36$ lb/ft, se escribe

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(36 \text{ lb/ft})x^2 = 18x^2$$

Al elegir el nivel de referencia en A, tenemos que $V_g = 0$; por lo tanto

$$V_1 = V_e + V_g = 18x^2$$



Energía cinética. Puesto que el objeto se suelta desde el reposo, $v_A = 0$ y $T_1 = 0$.

Posición *2*. *Energía potencial.* El resorte ahora no está deformado; de tal modo, $V_e = 0$. Puesto que el objeto está 4 ft arriba del nivel de referencia, se tiene

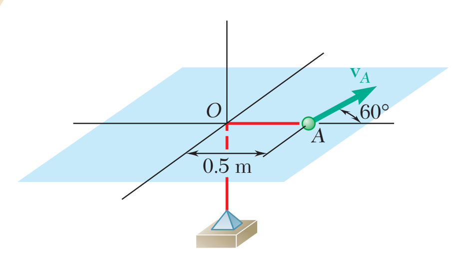
$$V_g = Wy = (0.5 \text{ lb})(4 \text{ ft}) = 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$
$$V_2 = V_e + V_g = 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Al utilizar el valor de v_D^2 que se obtuvo antes, se escribe

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}\frac{0.5 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(64.4 \text{ ft}^2/\text{s}^2) = 0.5 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Conservación de la energía. Al aplicar el principio de conservación de energía entre las posiciones *1* y *2*, se escribe

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 18x^2 = 0.5 \text{ ft} \cdot \text{lb} + 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$
$$x = 0.3727 \text{ ft} \qquad x = 4.47 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

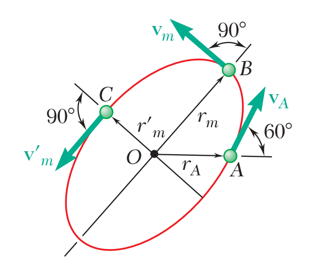


PROBLEMA RESUELTO 13.8

Una esfera de masa $m = 0.6$ kg se une a un cordón elástico de constante $k = 100$ N/m, el cual no está deformado cuando la esfera se localiza en el origen O. Si se sabe que la esfera puede deslizarse en fricción sobre la superficie horizontal y que en la posición indicada su velocidad $\mathbf{v}_A$ tiene una magnitud de 20 m/s, determine *a*) las distancias máxima y mínima de la esfera al origen O, *b*) los valores correspondientes de su rapidez.

SOLUCIÓN

La fuerza que ejerce la cuerda sobre la esfera pasa por el punto fijo O, y su trabajo puede expresarse como el cambio en la energía potencial. Por lo tanto, es una fuerza central conservativa, y se conservan tanto la energía total de la esfera como su cantidad de movimiento angular alrededor de O.



Conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de *O*. En el punto B, donde la distancia desde O es máxima, la velocidad de la esfera es perpendicular a OB y la cantidad de movimiento angular es $r_m m v_m$. Una propiedad similar se cumple en el punto C, donde la distancia desde O es mínima. Al expresar la conservación de la cantidad de movimiento angular entre A y B, se escribe

$$r_A m v_A \text{ sen } 60° = r_m m v_m$$
$$(0.5 \text{ m})(0.6 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) \text{ sen } 60° = r_m (0.6 \text{ kg}) v_m$$
$$v_m = \frac{8.66}{r_m} \quad (1)$$

Conservación de la energía

En el punto A: $T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2}(0.6 \text{ kg})(20 \text{ m/s})^2 = 120 \text{ J}$

$V_A = \frac{1}{2} k r_A^2 = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})(0.5 \text{ m})^2 = 12.5 \text{ J}$

En el punto B: $T_B = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2}(0.6 \text{ kg}) v_m^2 = 0.3 v_m^2$

$V_B = \frac{1}{2} k r_m^2 = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m}) r_m^2 = 50 r_m^2$

Al aplicar el principio de conservación de la energía entre los puntos A y B, se escribe

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$
$$120 + 12.5 = 0.3 v_m^2 + 50 r_m^2 \quad (2)$$

***a*) Valores máximo y mínimo de la distancia.** Al sustituir v_m de la ecuación (1) en la ecuación (2) y resolver para r_m^2, se obtiene

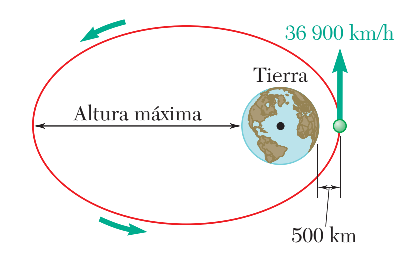
$$r_m^2 = 2.468 \text{ o } 0.1824 \qquad r_m = 1.571 \text{ m}, \; r'_m = 0.427 \text{ m} \quad ◀$$

***b*) Valores de velocidad correspodientes.** Al sustituir los valores que se obtuvieron para r_m y r'_m en la ecuación (1), se tiene

$$v_m = \frac{8.66}{1.571} \qquad v_m = 5.51 \text{ m/s} \quad ◀$$

$$v'_m = \frac{8.66}{0.427} \qquad v'_m = 20.3 \text{ m/s} \quad ◀$$

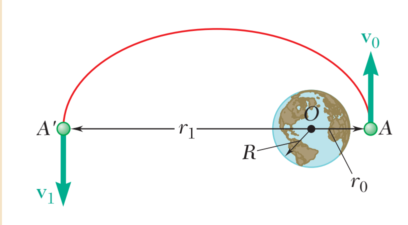
Nota. Puede mostrarse que la trayectoria de la esfera es una elipse de centro O.



PROBLEMA RESUELTO 13.9

Se lanza un satélite en dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altura de 500 km. Determine *a*) la altura máxima alcanzada por el satélite, *b*) el error máximo permisible en la dirección de lanzamiento si el satélite va a entrar a una órbita en la que su máximo acercamiento a la superficie terrestre va a ser de 200 km.

SOLUCIÓN



***a*) Altura máxima.** Se denota por A' el punto de la órbita más alejado de la Tierra y por r_1 la distancia correspondiente desde el centro de nuestro planeta. Puesto que el satélite se encuentra en vuelo libre entre A y A', se aplica el principio de conservación de la energía

$$T_A + V_A = T_{A'} + V_{A'}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} \qquad (1)$$

Puesto que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de la gravedad, que es una fuerza central, se conserva la cantidad de movimiento angular del satélite alrededor de O. Al considerar los puntos A y A', se escribe

$$r_0 m v_0 = r_1 m v_1 \qquad v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} \qquad (2)$$

Al sustituir esta expresión para v_1 en la ecuación (1), y dividir cada término entre la masa m y reagrupar los términos, se obtiene

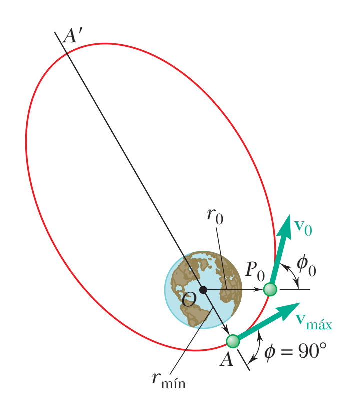
$$\tfrac{1}{2}v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) = \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \qquad 1 + \frac{r_0}{r_1} = \frac{2GM}{r_0 v_0^2} \qquad (3)$$

Al recordar que el radio de la Tierra es $R = 6\,370$ km, se calcula

$$r_0 = 6\,370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6\,870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m}$$
$$v_0 = 36\,900 \text{ km/h} = (36.9 \times 10^6 \text{ m})/(3.6 \times 10^3 \text{ s}) = 10.25 \times 10^3 \text{ m/s}$$
$$GM = gR^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Al sustituir estos valores en (3), se obtiene $r_1 = 66.8 \times 10^6$ m.

Altura máxima $= 66.8 \times 10^6 \text{ m} - 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 60.4 \times 10^6 \text{ m} =$ 60 400 km ◀



***b*) Error permisible en la dirección de lanzamiento.** El satélite se lanza desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0. El valor de ϕ_0 corresponde a $r_{mín} = 6\,370 \text{ km} + 200 \text{ km} = 6\,570$ km se obtiene aplicando el principio de conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular entre P_0 y A:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 - \frac{GMm}{r_{mín}} \qquad (4)$$

$$r_0 m v_0 \text{ sen } \phi_0 = r_{mín} m v_{máx} \qquad (5)$$

Al resolver (5) para $v_{máx}$ y luego sustituir $v_{máx}$ en (4), se puede resolver (4) respecto a sen ϕ_0. Utilizando los valores de v_0 y GM calculados en el inciso *a*) y al advertir que $r_0/r_{mín} = 6\,870/6\,570 = 1.0457$, se encuentra

sen $\phi_0 = 0.9801$ $\qquad \phi_0 = 90° \pm 11.5°$ $\qquad$ Error permisible $= \pm 11.5°$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió que cuando el trabajo realizado por una fuerza **F** que actúa sobre una partícula A *es independiente de la trayectoria que sigue la partícula* cuando se mueve de una posición dada A_1 a una posición dada A_2 (figura 13.11*a*), entonces es posible definir para la fuerza **F** una función V, llamada *energía potencial.* Este tipo de fuerzas se dice que son *fuerzas conservativas,* y se puede escribir

$$U_{1\rightarrow 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \qquad (13.19)$$

o, en forma breve,

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \qquad (13.19')$$

Hay que observar que el trabajo es negativo cuando el cambio en la energía potencial es positivo, esto es, cuando $V_2 > V_1$.

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación para el trabajo y la energía, se puede escribir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (13.24)$$

que muestra que cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa *la suma de las energías cinética y potencial de la partícula permanece constante.*

La solución de problemas en los que se use la fórmula anterior consistirá de los siguientes pasos.

1. Determine si todas las fuerzas implicadas son conservativas. Si algunas de las fuerzas no son conservativas, por ejemplo, si está implicada la fricción, se debe usar el método del trabajo y la energía de la lección anterior, ya que el trabajo efectuado por tales fuerzas depende de la trayectoria seguida por la partícula y no existe una función potencial. Si no hay fricción y si todas las fuerzas son conservativas, se puede proceder de la manera siguiente.

2. Determinar la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ en cada extremo de la trayectoria.

3. Calcular la energía potencial de todas las fuerzas implicadas en cada extremo de la trayectoria. Recuérdese que las siguientes expresiones para la energía potencial se obtuvieron en esta lección.

a) La energía potencial del peso W cerca de la superficie de la Tierra y a una altura y sobre un nivel de referencia dado,

$$V_g = Wy \qquad (13.16)$$

(continúa)

b) La energía potencial de una masa m localizada a una distancia r del centro de la Tierra, suficientemente grande de manera que la variación de la fuerza de la gravedad deba tomarse en cuenta,

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \qquad (13.17)$$

donde la distancia r se mide desde el centro de la Tierra y V_g es igual a cero en $r = \infty$.

c) La energía potencial de un cuerpo con respecto a una fuerza elástica F = kx,

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (13.18)$$

donde la distancia x es la deformación del resorte elástico medida desde su posición *no deformada* y k es la constante de resorte. Advierta que V_e *depende exclusivamente de la deformación* x y no de la trayectoria del cuerpo unido al resorte. Además, V_e siempre es positiva, ya sea que el resorte esté comprimido o extendido.

4. Sustituir las expresiones para las energías cinética y potencial en la ecuación (13.24) anterior. Se puede resolver esta ecuación para una incógnita, por ejemplo, para una velocidad [problema resuelto 13.6]. Si está implicada más de una incógnita, se tendrá que buscar otra condición o ecuación, tal como una velocidad mínima [problema resuelto 13.7] o la energía potencial mínima de la partícula. En el caso de problemas que impliquen una fuerza central, puede obtenerse una segunda ecuación utilizando la conservación de la cantidad de movimiento angular [problema resuelto 13.8]. Esto es en especial útil en las aplicaciones a la mecánica celeste [sección 13.9].

Problemas

13.55 Una fuerza **P** se aplica lentamente a una placa que está unida a dos resortes y provoca una deflexión x_0. En cada uno de los dos casos indicados, obtenga una expresión para la constante k_e, en términos de k_1 y k_2, del resorte único equivalente al sistema dado, esto es, de un resorte que experimentaría la misma deformación x_0 si se sometiera a la misma fuerza **P**.

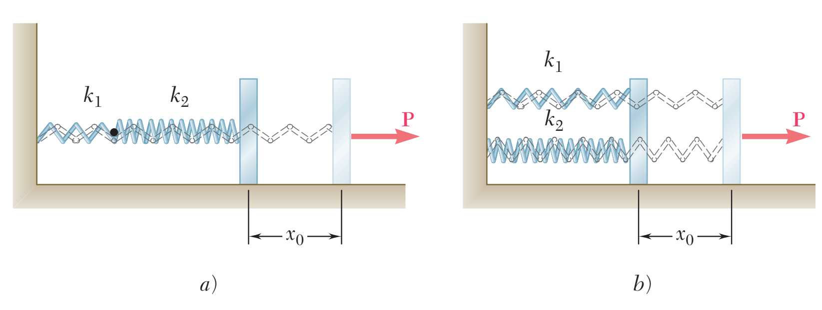


Figura P13.55

13.56 Un bloque de masa m está unido a dos resortes como se muestra en la figura. Si se sabe que en cada caso indicado el bloque se jala a través de una distancia x_0 desde su posición de equilibrio y después se suelta, determine la máxima rapidez del bloque en el movimiento subsecuente.

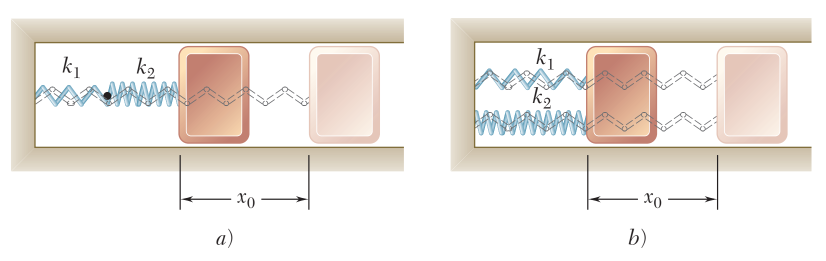


Figura P13.56

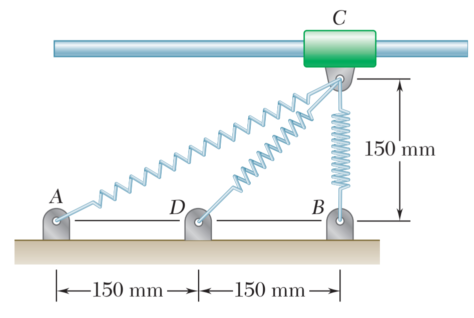


Figura P13.57

13.57 Un collarín C de 1.2 kg puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal. Está unido a tres resortes, cada uno de constante $k = 400$ N/m y con una longitud no deformada de 150 mm. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la rapidez máxima que alcanzará con el movimiento resultante.

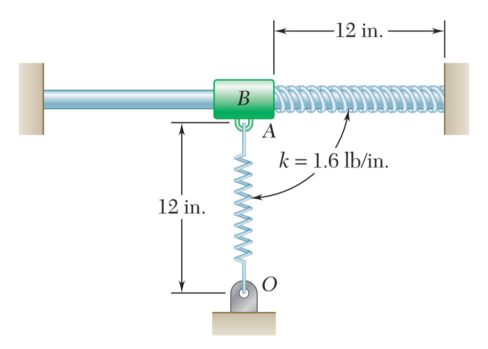


Figura P13.58

13.58 Un collarín B de 10 lb puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal y está en equilibrio en A cuando se le empuja 5 in. hacia la derecha y se le suelta desde el reposo. La longitud sin deformar de los resortes es de 12 in. y la constante de cada uno es $k = 1.6$ lb/in. Determine *a*) la rapidez máxima del collarín, *b*) la aceleración máxima del collarín.

13.59 Una cuerda elástica está estirada entre dos puntos A y B, separados por una distancia de 16 in. en el mismo plano horizontal. Cuando se estira directamente entre A y B, la tensión es de 10 lb. Después la cuerda se estira como se muestra en la figura hasta que su punto medio C se ha movido 6 in. hasta C'; se requiere una fuerza de 60 lb para mantener la cuerda en C'. Si se coloca un perdigón de 0.2 lb en C' y luego se suelta la cuerda, determine la rapidez del perdigón cuando pasa por C.

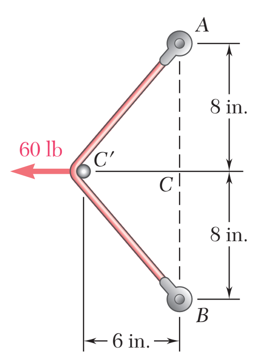


Figura P13.59

13.60 Un collarín de 1.5 kg está unido a un resorte y se desliza sin fricción a lo largo de una varilla circular en un *plano horizontal*. El resorte tiene una longitud no deformada de 150 mm y una constante $k = 400$ N/m. Si se sabe que el collarín está en equilibrio en A y se le da un ligero impulso para ponerlo en movimiento, determine la velocidad del collarín a) cuando pasa por B, b) cuando pasa por C.

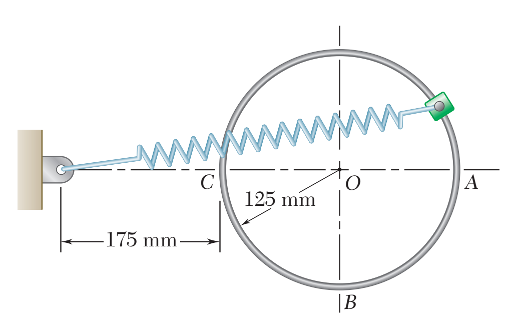
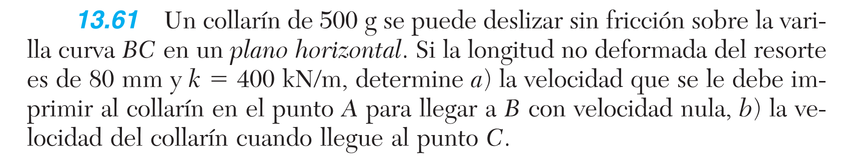
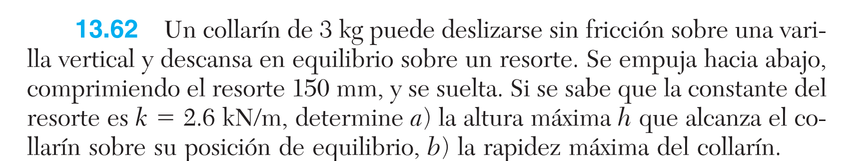


Figura *P13.60*


13.61 Un collarín de 500 g se puede deslizar sin fricción sobre la varilla curva BC en un *plano horizontal*. Si la longitud no deformada del resorte es de 80 mm y $k = 400$ kN/m, determine a) la velocidad que se le debe imprimir al collarín en el punto A para llegar a B con velocidad nula, b) la velocidad del collarín cuando llegue al punto C.


13.62 Un collarín de 3 kg puede deslizarse sin fricción sobre una varilla vertical y descansa en equilibrio sobre un resorte. Se empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte 150 mm, y se suelta. Si se sabe que la constante del resorte es $k = 2.6$ kN/m, determine a) la altura máxima h que alcanza el collarín sobre su posición de equilibrio, b) la rapidez máxima del collarín.

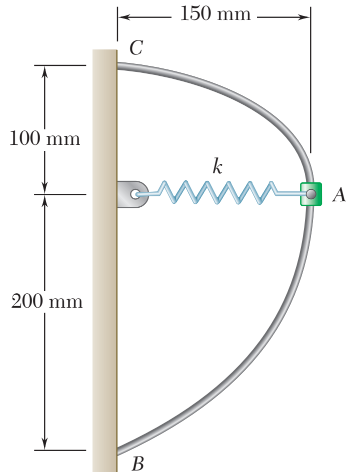


Figura *P13.61*

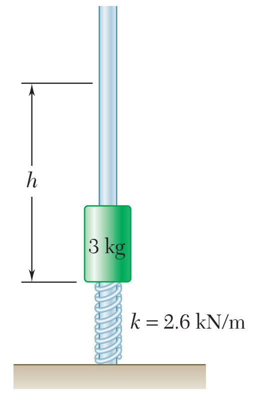


Figura P13.62



Figura P13.63

13.63 En mecánica de materiales se ha demostrado que cuando una viga elástica *AB* soporta a un bloque de peso *W* en un punto dado *B*, la deflexión y_{st} (llamada deflexión estática) es proporcional a *W*. Demuestre que si el mismo bloque se deja caer desde una altura *h* sobre el extremo *B* de una viga en voladizo *AB* y no rebota, la deflexión máxima y_m en el movimiento resultante puede expresarse como $y_m = y_{st}\,(1 + \sqrt{1 + 2h/y_{st}})$. Observe que esta fórmula es aproximada, puesto que se basa en el supuesto de que no hay energía disipada en el impacto y en que el peso de la viga es pequeño en comparación con el peso del bloque.

13.64 Una varilla circular delgada se mantiene en un *plano vertical* mediante una brida en *A*. Unido a la brida y enrollado holgadamente alrededor de la varilla está un resorte de constante $k = 3$ lb/ft y longitud no deformada igual al arco de círculo *AB*. Un collarín *C* de 8 oz, que no está unido al resorte, puede deslizarse sin fricción a lo largo de la varilla. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30°$, determine *a*) la altura máxima sobre el punto *B* que alcanza el collarín, *b*) la rapidez máxima del collarín.

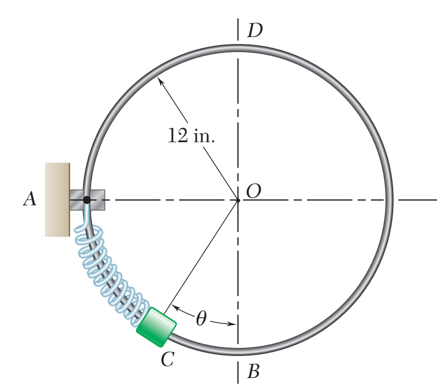


Figura P13.64 y P13.65

13.65 Una varilla circular delgada se mantiene en un *plano vertical* por medio de una brida en *A*. Unido a la brida y enrollado holgadamente alrededor de la varilla está un resorte de constante $k = 3$ lb/ft y longitud no deformada igual al arco de círculo *AB*. Un collarín *C* de 8 oz, que no está unido al resorte, puede deslizarse sin fricción a lo largo de la varilla. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo a un ángulo θ con respecto a la vertical, determine *a*) el valor mínimo de θ para el cual el collarín pasará a través de *D* y llegará al punto *A*, *b*) la velocidad del collarín cuando éste llega al punto *A*.

13.66 Un collarín de 2.7 lb puede deslizarse a lo largo de la varilla que se muestra en la figura. El collarín está unido a una cuerda elástica anclada en *F*, con una longitud sin deformar de 0.9 ft y una constante de resorte de 5 lb/ft. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en *A* y si no se toma en cuenta la fricción, determine la rapidez del collarín *a*) en *B*, *b*) en *E*.

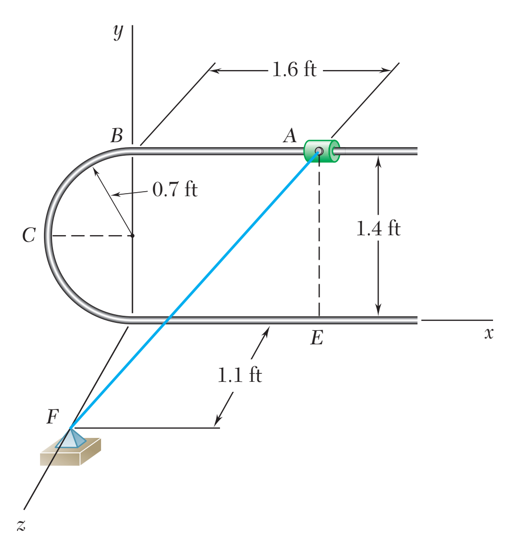


Figura *P13.66*

13.67 El sistema que se muestra está en equilibrio cuando $\phi = 0$. Si se sabe que inicialmente $\phi = 90°$ y que el bloque C recibe un ligero golpe cuando el sistema está en esa posición, determine la rapidez del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio $\phi = 0$. Desprecie la masa de la varilla.

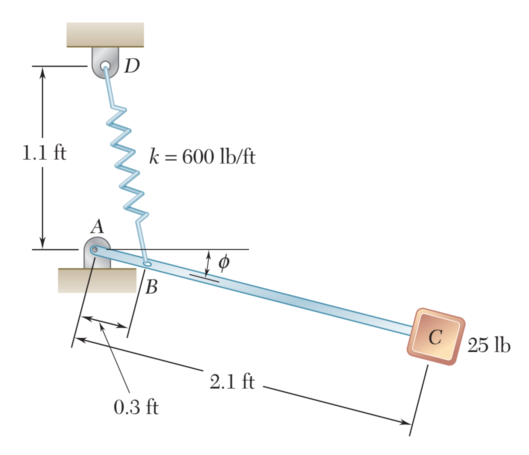


Figura *P13.67*

13.68 Un resorte se usa para detener un paquete de 50 kg, el cual se mueve hacia abajo sobre una pendiente de 20°. El resorte tiene una constante $k = 30$ kN/m y se sostiene mediante cables, de manera que en un inicio está comprimido 50 mm. Si se sabe que la velocidad del paquete es de 2 m/s cuando se encuentra a 8 m del resorte y si se desprecia la fricción, determine la deformación adicional máxima del resorte para llevar el paquete al reposo.

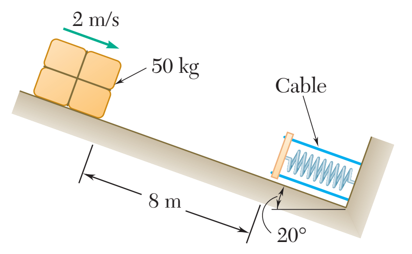
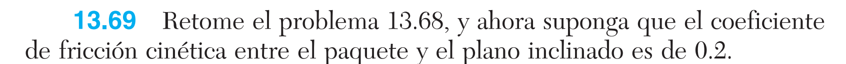


Figura P13.68



13.69 Retome el problema 13.68, y ahora suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano inclinado es de 0.2.

13.70 Un objeto de 300 g se suelta desde el reposo en A y se desliza sin fricción a lo largo de la superficie mostrada. Determine la fuerza que ejerce la superficie sobre el objeto *a*) justo antes de que llegue a B, *b*) inmediatamente después de que pasa por B.

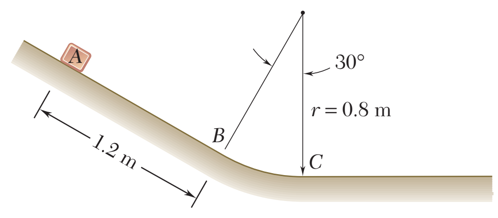


Figura P13.70 y P13.71

13.71 Un objeto de 300 g se suelta desde el reposo en A y se desliza sin fricción a lo largo de la superficie mostrada. Determine la fuerza ejercida sobre el objeto por la superficie *a*) justo antes de que llegue a C, *b*) inmediatamente después de que pasa por C.

13.72 Un collarín de 1.2 lb puede deslizarse sin fricción a lo largo de la varilla semicircular BCD. El resorte tiene una constante de 1.8 lb/in. y su longitud sin deformar es de 8 in. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en B, determine *a*) la rapidez del collarín cuando pasa por C, *b*) la fuerza que ejerce la varilla sobre el collarín en C.

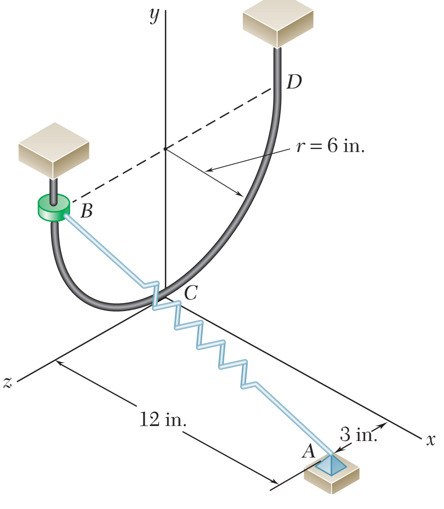


Figura P13.72

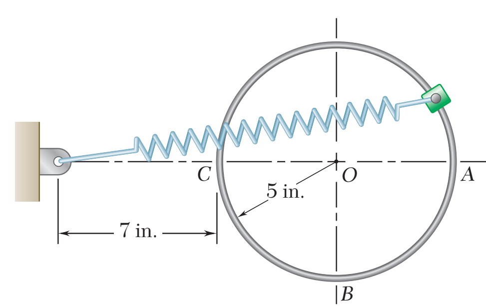


Figura P13.73

13.73 Un collarín de 1 lb está unido a un resorte y se desliza sin fricción a lo largo de una varilla circular en un *plano vertical*. El resorte tiene una longitud no deformada de 5 in. y una constante $k = 10$ lb/ft. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en A, determine la rapidez del collarín y la fuerza normal entre el collarín y la varilla cuando el collarín pasa por B.

13.74 Un paquete de 200 g se lanza, mediante un resorte en A, hacia arriba con una velocidad $\mathbf{v}_0$; el paquete se mueve alrededor de un conducto sin fricción y se deposita en C. Para cada uno de los dos conductos que se muestran, determine *a*) la velocidad mínima $\mathbf{v}_0$ para la cual el paquete llegará a C, *b*) la fuerza correspondiente ejercida por el paquete en el conducto justo antes de abandonar el conducto en C.

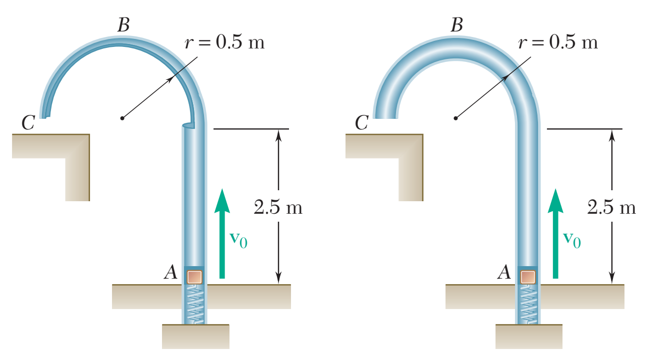


Figura P13.74

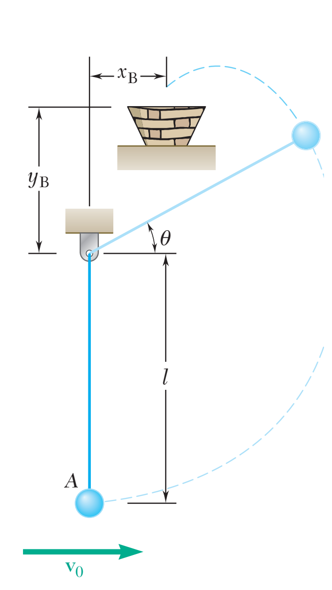


Figura P13.76 y P13.77

13.75 Si el paquete del problema 13.74 no debe golpear la superficie horizontal en C con una rapidez mayor que 3.5 m/s, *a*) demuestre que este requisito sólo puede ser satisfecho por el segundo conducto, *b*) determine la velocidad inicial máxima permisible $\mathbf{v}_0$ cuando se emplea el segundo conducto.

13.76 La pelota de 2 lb en A se encuentra suspendida de una cuerda inextensible y se le da una velocidad horizontal inicial de 16 ft/s. Si $l = 2$ ft y $x_B = 0$, determine y_B de forma que la pelota entre en la canasta.

***13.77** La pelota de 2 lb en A se encuentra suspendida de una cuerda inextensible y se le da una velocidad horizontal inicial de $\mathbf{v}_0$. Si $l = 2$ ft, $x_B = 0.3$ ft y $y_B = 0.4$ ft, determine la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de forma que la pelota entre a la canasta.

***13.78** En un almacén los paquetes se mueven desde el punto A, en el piso superior, hasta el punto B del piso inferior, 12 ft directamente por debajo de A, por medio de un tobogán cuya línea central tiene la forma de una hélice con eje vertical y y radio $R = 8$ ft. La sección transversal del tobogán debe inclinarse de modo que cada paquete, después de soltarse en A sin velocidad, se deslice a lo largo de la línea central del tobogán sin tocar los bordes. Si se desprecia la fricción, *a*) exprese el ángulo ϕ formado por la normal a la superficie del tobogán en P y la normal principal de la línea central en ese punto, como una función de la elevación y de un punto dado P de la línea central, *b*) determine la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida por el tobogán sobre un paquete de 20 lb cuando éste llega al punto B. *Sugerencia*: La normal principal a la hélice en el punto P es horizontal y está dirigida hacia el eje y, además el radio de curvatura de la hélice es $\rho = R[1 + (h/2\pi R)^2]$.

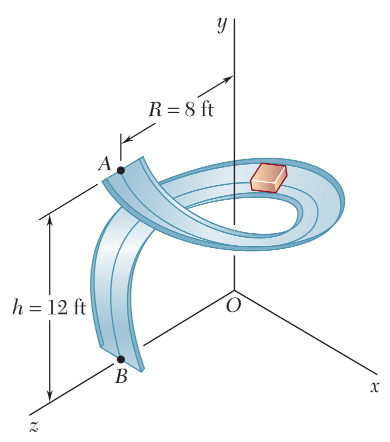


Figura P13.78

***13.79** Demuestre que una fuerza $F(x, y, z)$ es conservativa, si y sólo si se satisfacen las siguientes relaciones

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

13.80 La fuerza $\mathbf{F} = (yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k})/xyz$ actúa sobre la partícula $P(x, y, z)$ que se mueve en el espacio. *a*) Utilizando la relación deducida en el problema 13.79, demuestre que es una fuerza conservativa. *b*) Determine la función potencial asociada con **F**.

***13.81** Una fuerza **F** actúa sobre una partícula $P(x, y)$ que se mueve en el plano xy. Determine si **F** es una fuerza conservativa y calcule el trabajo de **F** cuando P describe la trayectoria A, B, C, A en el sentido de las manecillas del reloj, incluyendo el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = a^2$, si *a*) $\mathbf{F} = ky\mathbf{i}$, *b*) $\mathbf{F} = k(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

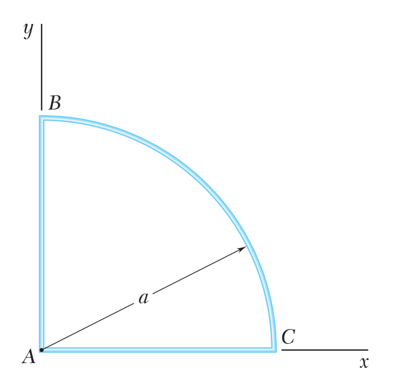


Figura P13.81

***13.82** Se sabe que la función potencial asociada con una fuerza **P** en el espacio es $V(x, y, z) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. *a*) Determine las componentes x, y y z de **P**. *b*) Calcule el trabajo realizado por **P** desde O hasta D, integrando a lo largo de la trayectoria $OABD$ y demuestre que es igual al negativo del cambio en el potencial desde O hasta D.

***13.83** *a*) Calcule el trabajo realizado desde D hasta O por la fuerza **P** del problema 13.82 integrando a lo largo de la diagonal del cubo. *b*) Usando el resultado obtenido y la respuesta al inciso *b*) del problema 13.82, verifique que el trabajo realizado por una fuerza conservativa alrededor de la trayectoria cerrada $OABDO$ es cero.

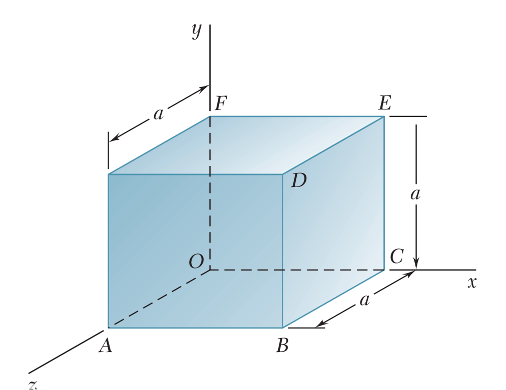


Figura P13.82

***13.84** La fuerza $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ actúa sobre la partícula $P(x, y, z)$ que se mueve en el espacio. *a*) Utilizando la relación deducida en el problema 13.79, demuestre que **F** es una fuerza conservativa. *b*) Determine la función potencial $V(x, y, z)$ asociada con **F**.

13.85 Mientras describe una órbita circular a 300 km sobre la Tierra un vehículo espacial lanza un satélite de comunicaciones de 3 600 kg. Determine *a*) la energía adicional que se requiere para poner el satélite en una órbita geosíncrona a una altura de 35 770 km sobre la superficie terrestre, *b*) la energía requerida para poner el satélite en la misma órbita lanzándolo desde la superficie de la Tierra, sin incluir la energía necesaria para superar la resistencia del aire. (Una *órbita geosíncrona* es una órbita circular en la cual el satélite parece estacionario con respecto al suelo.)

13.86 Un satélite se coloca en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Si se sabe que el cociente v_A/v_P de la velocidad en el apogeo A y la velocidad en el perigeo P es igual al cociente r_P/r_A de la distancia al centro de la Tierra en P a la distancia correspondiente en A, y que la distancia entre A y P es de 80 000 km, determine la energía por unidad de masa que se requiere para poner el satélite en su órbita lanzándolo desde la superficie terrestre. Excluya la energía adicional necesaria para superar el peso del cohete impulsor, la resistencia del aire y las maniobras.

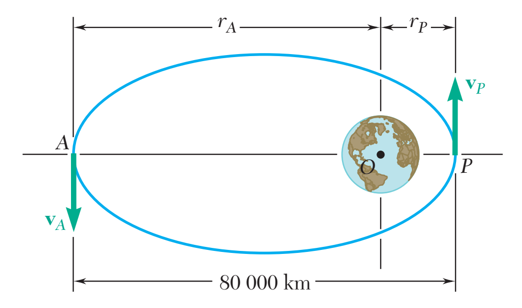


Figura P13.86

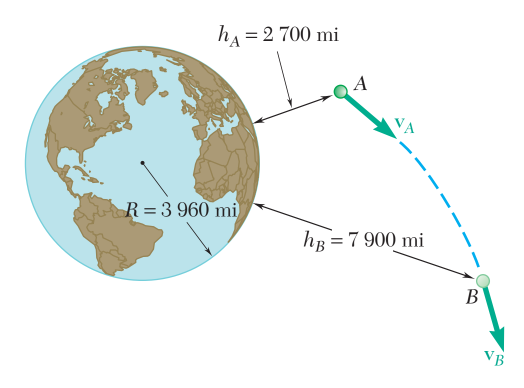


Figura P13.87

13.87 Si se sabe que la velocidad de una sonda espacial experimental lanzada desde la Tierra tiene una magnitud $v_A = 20.2 \times 10^3$ mi/h en el punto A, determine la velocidad de la sonda cuando pase por el punto B.

13.88 Un módulo de excursión lunar (LEM) se utilizó en las misiones de alunizaje Apolo para ahorrar combustible al hacer innecesario el relanzamiento de toda la nave espacial Apolo desde la superficie de la Luna en su viaje de retorno a la Tierra. Verifique la eficacia de este planteamiento calculando la energía por libra que requiere una nave espacial para escapar del campo gravitacional lunar si la nave parte desde *a*) la superficie de la Luna, *b*) una órbita circular a 50 mi sobre la superficie lunar. No tome en cuenta el efecto del campo gravitatorio terrestre. (El radio de la Luna es de 1 081 mi y su masa es 0.0123 veces la masa de la Tierra.)

13.89 Un satélite de masa m describe una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra. Exprese como una función de r *a*) la energía potencial del satélite, *b*) su energía cinética, *c*) su energía total como función de r. Denote el radio de la Tierra mediante R y la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre mediante g, y suponga que la energía potencial del satélite es cero en su plataforma de lanzamiento.

13.90 ¿Cuánta energía por kilogramo debe proporcionarse a un satélite para ponerlo en una órbita circular a una altura de *a*) 600 km, *b*) 6 000 km?

13.91 *a*) Demuestre que, si se establece $r = R + y$ en el miembro del lado derecho de la ecuación (13.17′) y se desarrolla ese miembro en una serie de potencias en y/R, la expresión en la ecuación (13.16) para la energía potencial V_g debida a la gravedad es una aproximación de primer orden para la expresión dada en la ecuación (13.17′). *b*) Utilizando el mismo desarrollo, deduzca una aproximación de segundo orden para V_g.

13.92 Las observaciones muestran que un cuerpo celeste que viaja a 1.2×10^6 mi/h parece describir un círculo de radio igual a 60 años luz alrededor del punto B. Se sospecha que el punto B es una concentración de masa muy densa conocida como un hoyo negro. Determine el cociente M_B/M_S de la masa en B y la masa del Sol. (La masa del Sol es 330 000 veces la masa de la Tierra y un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año a la velocidad de 186 300 mi/s.)

13.93 Una bola de 200 g se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción que está unida a un punto fijo O por medio de una cuerda elástica de constante $k = 150$ N/m y longitud no deformada de 600 mm. La bola se coloca en el punto A, a 900 mm de O, y se le da una velocidad inicial $\mathbf{v}_A$ perpendicular a OA. Si se sabe que la bola pasa a una distancia $d =$ 100 m de O, determine *a*) la rapidez inicial v_A de la bola, *b*) su rapidez v después de que la cuerda se pone flácida.

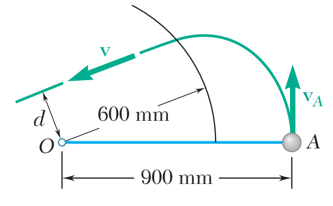


Figura P13.93

13.94 Para la bola del problema 13.93, determine *a*) la magnitud mínima de la velocidad inicial $\mathbf{v}_A$ de la bola, para la cual la cuerda elástica permanece tensa en cualquier momento, *b*) la rapidez máxima correspondiente que alcanza la bola.

13.95 El collarín A pesa 10 lb y está unido a un resorte de constante 50 lb/ft y una longitud sin deformar de 18 in. El sistema se pone en movimiento con $r = 12$ in., $v_\theta = 16$ ft/s y $v_r = 0$. Si se desprecia la masa de la varilla y el efecto de la fricción, determine las componentes radial y transversal de la velocidad del collarín cuando $r = 21$ in.

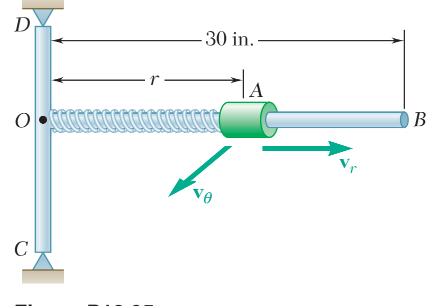


Figura P13.95

13.96 Para el movimiento descrito en el problema 13.95, determine *a*) la distancia máxima entre el origen y el collarín, *b*) la rapidez correspondiente. (*Sugerencia*: Resuelva por prueba y error la ecuación obtenida para r.)

13.97 Retome el problema 13.8, y ahora suponga que la cuerda elástica se sustituye por una fuerza central $\mathbf{F}$ de magnitud $(80/r^2)$ N dirigida hacia O.

13.98 Un collarín A de 1.8 kg y un collarín B de 0.7 kg pueden deslizarse sin fricción sobre un armazón, compuesto por una varilla horizontal OE y una varilla vertical CD, la cual gira libremente alrededor de CD. Los dos collarines se conectan mediante una cuerda que corre sobre una polea unida al armazón en O. En el instante que se muestra, la velocidad $\mathbf{v}_A$ del collarín A tiene una magnitud de 2.1 m/s y un tope evita el movimiento del collarín B. Si repentinamente se quita el tope, determine *a*) la velocidad del collarín A cuando está a 0.2 m de O, *b*) la velocidad del collarín A cuando el collarín B queda en reposo. (Suponga que el collarín B no golpea a O, que el collarín A no sale de la varilla OE y que la masa del armazón puede ignorarse.)

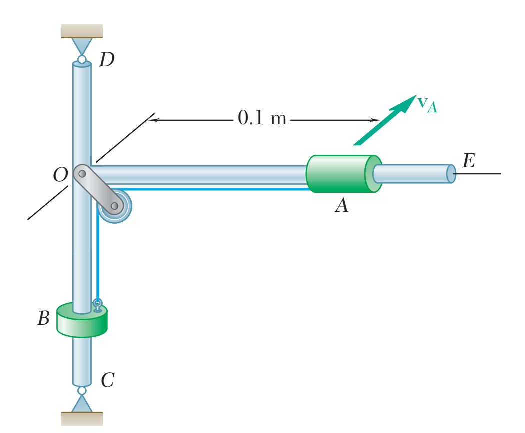


Figura *P13.98*

13.99 Utilice el principio de la conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular, para resolver el inciso *a*) del problema resuelto 12.9.

13.100 Se espera que una nave espacial, que viaja a lo largo de una trayectoria parabólica hacia el planeta Júpiter, alcance el punto A con una velocidad $\mathbf{v}_A$ de 26.9 km/s de magnitud. Sus motores se activarán entonces para frenarla, colocándola en una órbita elíptica que la pondrá a 100×10^3 km de Júpiter. Determine la reducción en la velocidad Δv en el punto A que colocará a la nave espacial en la órbita requerida. La masa de Júpiter es 319 veces la masa de la Tierra.

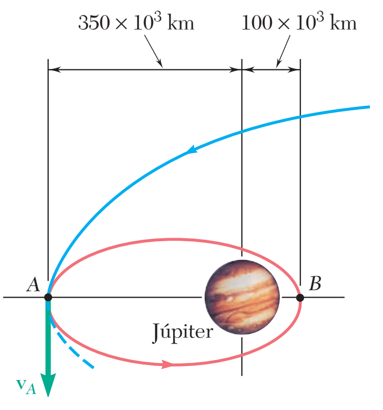


Figura P13.100

13.101 Después de completar su misión exploratoria a la Luna, los dos astronautas que formaban la tripulación del módulo de excursión lunar (LEM) Apollo se preparaban para reunirse con el módulo de mando que se encontraba orbitando la Luna a una altura de 140 km. La tripulación encendió el motor del LEM, llevándolo a lo largo de una trayectoria curva hasta el punto A, 8 km sobre la superficie de la Luna, para después apagar el motor. Si se sabe que el LEM se movía en ese momento en una dirección paralela a la superficie de la Luna y que después se desplazó a lo largo de una trayectoria elíptica hacia un punto de encuentro en B con el módulo de mando, determine *a*) la rapidez del LEM al apagar el motor, *b*) la velocidad relativa con la que el módulo de mando se aproximó al LEM en B. (El radio de la Luna es de 1 740 km y su masa es 0.01230 veces la masa de la Tierra.)

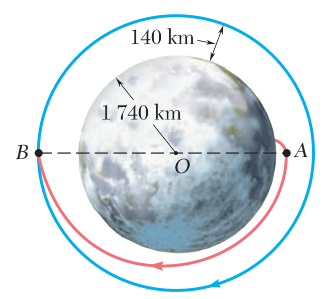


Figura P13.101

13.102 La manera óptima de transferir un vehículo espacial de una órbita circular a una órbita coplanar exterior es activar sus motores cuando pasa a través de A para aumentar su rapidez y ponerla en una órbita de transferencia elíptica. Otro incremento en la rapidez cuando pasa por B la colocará en la órbita circular deseada. Para un vehículo en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura $h_1 = 200$ mi, el cual se va a transferir a una órbita circular a una altura $h_2 = 500$ mi, determine *a*) el incremento de rapidez requerido en A y B, *b*) la energía total por unidad de masa requerida para ejecutar la transferencia.

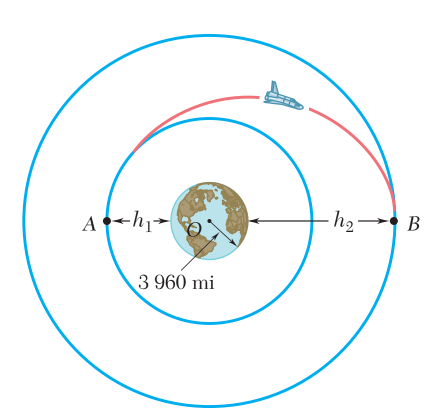


Figura P13.102

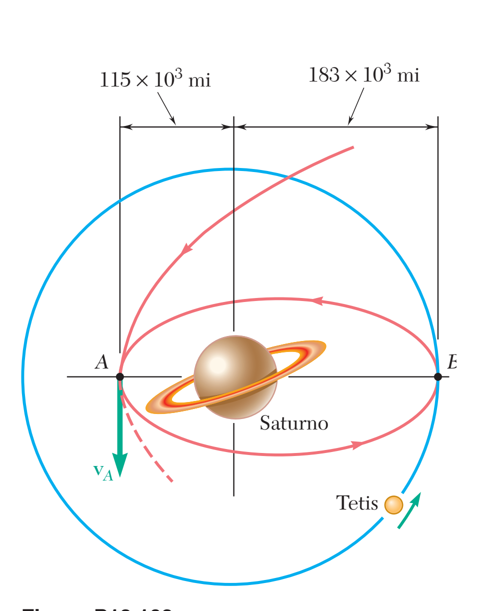


Figura P13.103

13.103 Una nave espacial que se aproxima al planeta Saturno alcanza el punto A con una velocidad $\mathbf{v}_A$ de 68.8×10^3 ft/s de magnitud. Se pone en una órbita elíptica alrededor de Saturno de manera que será capaz de examinar periódicamente a Tetis, una de las lunas de Saturno. Tetis se ubica en una órbita circular de 183×10^3 mi de radio alrededor del centro de Saturno y viaja a una rapidez de 37.2×10^3 ft/s. Determine *a*) la reducción en la rapidez requerida por la nave espacial en A para que alcance la órbita deseada, *b*) la rapidez de la nave espacial cuando alcance la órbita de Tetis en B.

13.104 Una nave espacial describe una órbita elíptica de altura mínima $h_A = 2\,400$ km y altura máxima $h_B = 9\,600$ km sobre la superficie de la Tierra. Determine la rapidez de la nave espacial en A.

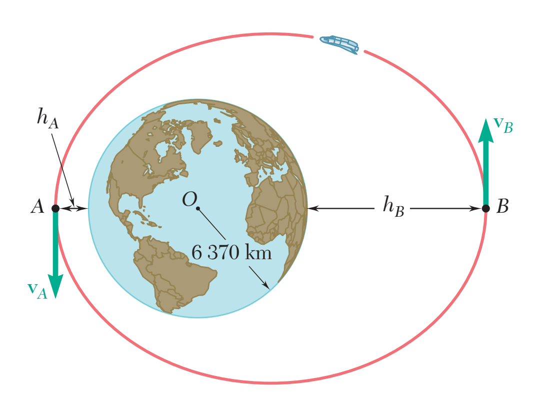


Figura P13.104

13.105 Una nave espacial que describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra tiene una rapidez máxima $v_A = 26.3 \times 10^3$ km/h en A y una rapidez mínima $v_B = 18.5 \times 10^3$ km/h en B. Determine la altitud de la nave espacial en B.

13.106 Cuando el LEM regresó al módulo de mando, la nave espacial Apollo del problema 13.101 se giró de modo que el LEM viera la parte trasera de la nave. Después el LEM se impulsó con una velocidad de 200 m/s con respecto al módulo de mando. Determine la magnitud y la dirección (ángulo ϕ formado con la vertical OC) de la velocidad $\mathbf{v}_C$ del LEM justo antes de estrellarse en C sobre la superficie de la Luna.

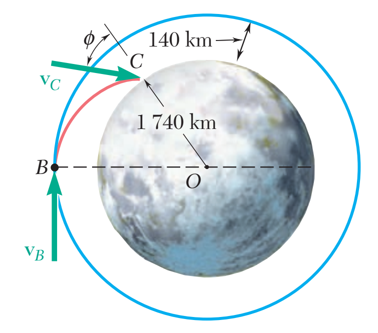


Figura P13.106

13.107 Se lanza un satélite al espacio con una velocidad $\mathbf{v}_0$ a una distancia r_0 del centro de la Tierra mediante la última etapa de su cohete de lanzamiento. La velocidad $\mathbf{v}_0$ se diseñó para enviar el satélite a una órbita circular de radio r_0. Sin embargo, debido a un mal funcionamiento del control, el satélite no se lanzó de manera horizontal sino a un ángulo α con la horizontal y, como consecuencia, se impulsó hacia una órbita elíptica. Determine los valores máximo y mínimo de la distancia del centro de la Tierra al satélite.

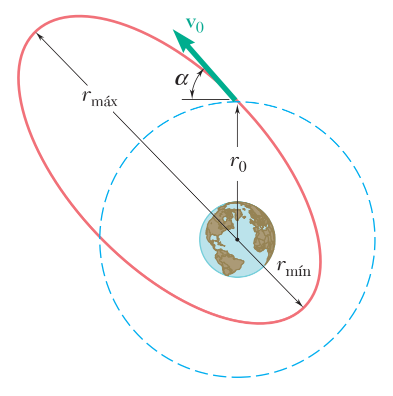


Figura P13.107

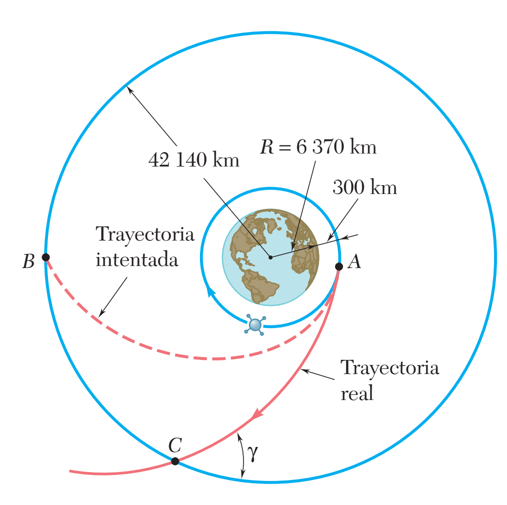


Figura P13.108

13.108 Una plataforma espacial se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 300 km. Cuando la plataforma pasa por A, un cohete que lleva un satélite de comunicación se lanza desde la plataforma con una velocidad relativa de 3.44 km/s de magnitud en una dirección tangente a la órbita de la plataforma. Esto se hizo para poner al cohete en una órbita de transferencia elíptica al colocarlo en el punto B, donde el cohete sería encendido de nuevo para situar al satélite en una órbita geosíncrona de 42 140 km de radio. Después del lanzamiento se descubrió que la velocidad relativa que se impartió al cohete era demasiado grande. Determine el ángulo γ y al cual el cohete cruzará la órbita intentada en el punto C.

13.109 Un vehículo espacial se encuentra en una órbita circular a una altura de 225 mi sobre la Tierra. Para aterrizar disminuye su rapidez cuando pasa por A encendiendo su motor durante un breve intervalo en una dirección opuesta a la dirección de su movimiento. Si se sabe que la velocidad del vehículo espacial debe formar un ángulo $\phi_B = 60°$ con la vertical cuando llegue al punto B a una altura de 40 mi, determine *a*) la rapidez requerida del vehículo cuando abandona su órbita circular en A, *b*) su rapidez en el punto B.

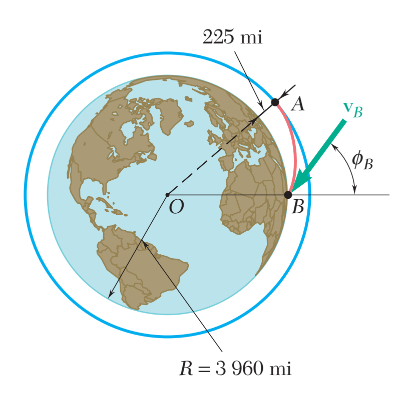


Figura P13.109

***13.110** En el problema 13.109 la rapidez del vehículo espacial se redujo cuando pasó por A y activó su motor en una dirección opuesta a la dirección de movimiento. Una estrategia alterna para sacar el vehículo espacial de su órbita circular sería girarlo de manera que su motor apuntara alejándose de la Tierra y darle después una velocidad incremental $\Delta\mathbf{v}_A$ hacia el centro O de la Tierra. Esto requeriría probablemente un gasto más pequeño de energía cuando se encendiera el motor en A, pero podría provocar un descenso demasiado rápido en B. Suponiendo que se recurre a esta estrategia con sólo 50 por ciento del gasto de energía correspondiente al problema 13.109, determine los valores resultantes de ϕ_B y v_B.

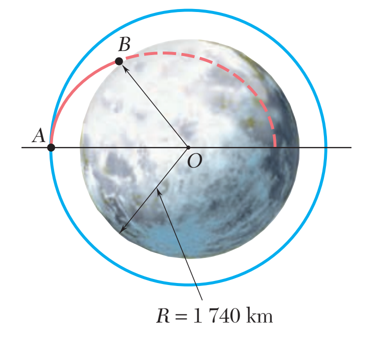


Figura P13.111

13.111 Cuando el módulo de excursión lunar (LEM) se puso a la deriva después del regreso de dos de los astronautas al módulo de comando de la nave Apolo, el cual orbitaba la Luna a una altura de 140 km, su rapidez se redujo para dejar que se estrellara con la superficie lunar. Determine *a*) la cantidad mínima a la cual la rapidez del LEM tendría que haberse reducido para asegurar que se estrellaría sobre la superficie de la Luna, *b*) la cantidad en la que la rapidez tendría que haberse reducido para provocar que golpeara la superficie lunar en un ángulo de 45°. (*Sugerencia*: El punto A está en el apogeo de la trayectoria de impacto elíptica. Recuerde también que la masa de la Luna es 0.0123 veces la masa de la Tierra.)

13.112 Una sonda espacial describe una órbita circular de radio nR con una velocidad $\mathbf{v}_0$ alrededor de un planeta con radio R y centro O. Demuestre que *a*) para que la sonda deje su órbita y golpee el planeta a un ángulo θ con la vertical, su velocidad puede reducirse a $\alpha\mathbf{v}_0$, donde

$$\alpha = \operatorname{sen}\theta\sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2 - \operatorname{sen}^2\theta}}$$

b) la sonda no golpeará al planeta si α es mayor que $\sqrt{2/(1+n)}$.

13.113 Muestre que los valores v_A y v_P de la rapidez de un satélite terrestre en el apogeo A y en el perigeo P de una órbita elíptica se definen mediante las relaciones

$$v_A^2 = \frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_P}{r_A} \qquad v_P^2 = \frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_A}{r_P}$$

donde M es la masa de la Tierra y r_A y r_P representan, respectivamente, las distancias máxima y mínima de la órbita al centro de la Tierra.

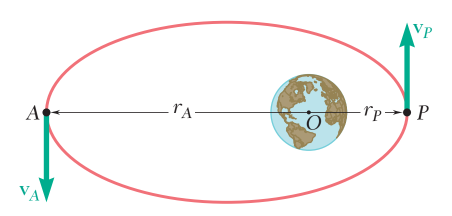


Figura *P13.113* y P13.114

13.114 Muestre que la energía total E de un satélite terrestre de masa m que describe una órbita elíptica es $E = -GMm/(r_A + r_P)$, donde M es la masa de la Tierra, y r_A y r_P representan, respectivamente, las distancias máxima y mínima de la órbita al centro de la Tierra. (Recuerde que la energía potencial gravitacional del satélite se definió igual a cero a una distancia infinita de la Tierra.)

13.115 Una nave espacial de masa m describe una órbita circular de radio r_1 alrededor de la Tierra. *a*) Muestre que la energía adicional ΔE que debe impartirse a la nave espacial para transferirla a una órbita circular de radio r_2 mayor es

$$\Delta E = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1r_2}$$

donde M es la masa de la Tierra. *b*) Demuestre además que si la transferencia de una órbita circular a otra órbita circular se ejecuta al colocar la nave espacial sobre una trayectoria semielíptica de transición AB, las cantidades de energía ΔE_A y ΔE_B que deben impartirse en A y B son, respectivamente, proporcionales a r_2 y r_1:

$$\Delta E_A = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\Delta E \qquad \Delta E_B = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\Delta E$$

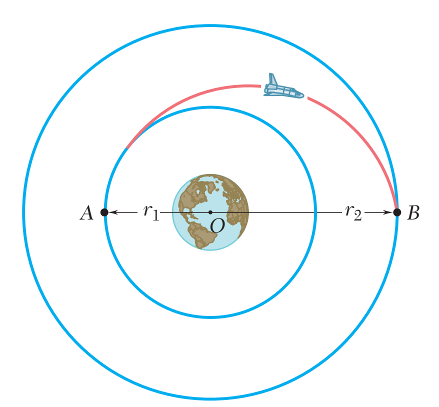


Figura P13.115

13.116 Se lanza un misil desde el suelo con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ formando un ángulo ϕ_0 con la vertical. Si el misil va a alcanzar una altura máxima igual a αR, donde R es el radio de la Tierra, *a*) muestre que el ángulo requerido ϕ_0 se define mediante la relación

$$\operatorname{sen}\phi_0 = (1+\alpha)\sqrt{1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{v_{\text{esc}}}{v_0}\right)^2}$$

donde v_{esc} es la velocidad de escape, *b*) determine el intervalo de valores permisibles de v_0.

***13.117** Utilice las respuestas obtenidas en el problema 13.107 para mostrar que la órbita circular intentada y que la órbita elíptica resultante se intersecan en los extremos del eje menor de la órbita elíptica.

***13.118** *a*) Exprese en términos de $r_{\text{mín}}$ y $v_{\text{máx}}$ la cantidad de movimiento angular por unidad de masa, h, y la energía total por unidad de masa, E/m, de un vehículo espacial que se mueve bajo la atracción gravitatoria de un planeta de masa M (figura 13.15). *b*) Eliminando $v_{\text{máx}}$ entre las ecuaciones obtenidas, deduzca la fórmula

$$\frac{1}{r_{\text{mín}}} = \frac{GM}{h^2}\left[1+\sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2}\right]$$

c) Demuestre que la excentricidad £ de la trayectoria del vehículo puede expresarse como

$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2}$$

d) Además muestre que la trayectoria del vehículo es una hipérbola, una elipse o una parábola, dependiendo de si E es positivo, negativo o cero.



Fotografía 13.1



Fotografía 13.2 Con esta prueba de impacto entre un F-4 Phantom y un objetivo rígido reforzado se determinó la fuerza del impacto en función del tiempo.

13.10. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

A continuación se considerará un tercer método básico útil para la solución de problemas que involucran movimiento de partículas. Este método se basa en el principio del impulso y la cantidad de movimiento, y se usa para resolver problemas que implican fuerza, masa, velocidad y tiempo. Es de particular interés en la resolución de problemas que implican movimiento impulsivo e impacto (secciones 13.11 y 13.12).

Considere una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}$. Como se vio en la sección 12.3, la segunda ley de Newton puede expresarse en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \tag{13.27}$$

donde $m\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento lineal de la partícula. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (13.27) por dt e integrar a partir del tiempo t_1 hasta el tiempo t_2, se escribe

$$\mathbf{F}\,dt = d(m\mathbf{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

o, al trasponer el último término,

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 \tag{13.28}$$

La integral en la ecuación (13.28) es un vector conocido como *impulso lineal,* o simplemente *impulso*, de la fuerza **F** durante el intervalo considerado. Al descomponer **F** en componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt \\ &= \mathbf{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt + \mathbf{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt + \mathbf{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt \qquad (13.29)\end{aligned}$$

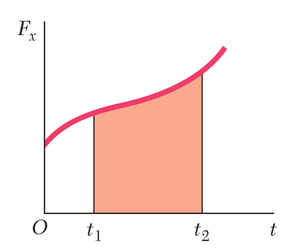
y se advierte que las componentes del impulso de la fuerza **F** son, respectivamente, iguales a las áreas bajo las curvas que se obtienen al graficar las componentes F_x, F_y y F_z en función de t (figura 13.16). En el caso de una fuerza **F** de magnitud y dirección constantes, el impulso se representa mediante el vector $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$, que tiene la misma dirección que **F**.

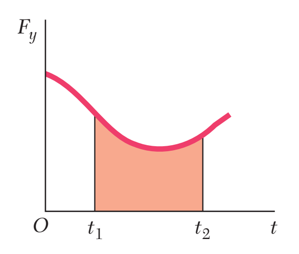
Si se usan unidades del SI, la magnitud del impulso de una fuerza se expresa en N · s. Sin embargo, al recordar la definición del newton, se tiene

$$\text{N} \cdot \text{s} = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

que es la unidad que se obtuvo en la sección 12.4 para la cantidad de movimiento lineal de una partícula. De tal modo, se verifica que la ecuación (13.28) es dimensionalmente correcta. Si se usan unidades de uso común en Estados Unidos, el impulso de una fuerza se expresa en lb · s, la cual es también la unidad que se obtuvo en la sección 12.4 para la cantidad de movimiento lineal de una partícula.

La ecuación (13.28) expresa que cuando sobre una partícula actúa una fuerza **F** durante un intervalo dado, *la cantidad de movimiento final* $m\mathbf{v}_2$ *de la partícula puede obtenerse al sumar vectorialmente su cantidad de movimiento inicial* $m\mathbf{v}_1$ *y el impulso de la fuerza* **F** *durante el intervalo considerado* (figura 13.17). Se escribe





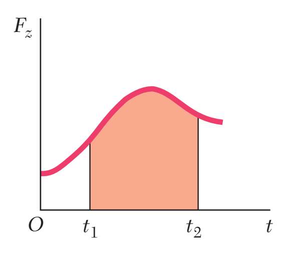


Figura 13.16

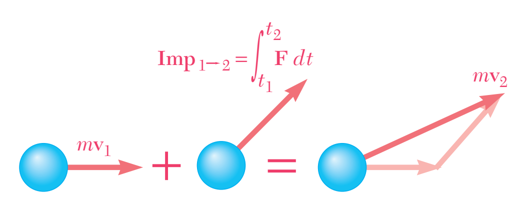


Figura 13.17

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \qquad (13.30)$$

Adviértase que si bien la energía cinética y el trabajo son cantidades escalares, la cantidad de movimiento y el impulso son cantidades vectoriales. Para obtener una solución analítica, es necesario entonces sustituir la ecuación (13.30) por las correspondientes ecuaciones de componentes

$$\begin{aligned}(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt &= (mv_x)_2 \\ (mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt &= (mv_y)_2 \qquad (13.31) \\ (mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt &= (mv_z)_2\end{aligned}$$

Cuando varias fuerzas actúan sobre una partícula, debe considerarse el impulso de cada una de las fuerzas. Se tiene

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \qquad (13.32)$$

De nuevo, la ecuación que se obtuvo representa una relación entre cantidades vectoriales; en la solución real de un problema, ésta debe sustituirse por las correspondientes ecuaciones de las componentes.

Cuando un problema incluye dos o más partículas, cada partícula puede considerarse por separado y la ecuación (13.32) se escribe para cada partícula. También es posible sumar vectorialmente las cantidades de movimiento de todas las partículas y los impulsos de todas las fuerzas implicadas. Se escribe entonces

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \qquad (13.33)$$

Puesto que las fuerzas de acción y reacción ejercidas por las partículas entre sí forman pares de fuerzas iguales y opuestas, y puesto que el intervalo de t_1 a t_2 es común para todas las fuerzas implicadas, los impulsos de las fuerzas de acción y reacción se cancelan y sólo necesitan ser considerados los impulsos de las fuerzas externas.[†]

Si no se ejerce fuerza externa sobre las partículas o, de manera más general, si la suma de las fuerzas externas es cero, el segundo término en la ecuación (13.33) se anula y la ecuación (13.33) se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \qquad (13.34)$$

que expresa que *la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva.* Considere, por ejemplo, dos botes, de masa m_A y m_B, inicialmente en reposo, que están siendo jalados uno por el otro (figura 13.18).

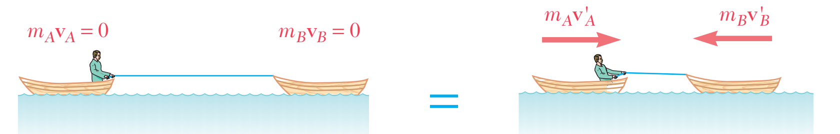


Figura 13.18

Si se ignora la resistencia del agua, las únicas fuerzas externas que actúan sobre los botes son sus pesos y las fuerzas de flotación ejercidas sobre ellos. Puesto que estas fuerzas están equilibradas, se escribe

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$$
$$0 = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$

donde $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ representan las velocidades de los botes después de un intervalo finito. La ecuación obtenida indica que los botes se mueven en direcciones opuestas (uno hacia el otro) con velocidades inversamente proporcionales a sus masas.[‡]

[†]Se debe advertir la diferencia entre este enunciado y el correspondiente que se hizo en la sección 13.4 respecto al trabajo de las fuerzas de acción y reacción entre varias partículas. Si bien la suma de los impulsos de estas fuerzas siempre es cero, la suma de su trabajo es cero sólo bajo circunstancias especiales, por ejemplo, cuando los diversos cuerpos implicados se conectan por medio de cuerdas o eslabones inextensibles y están, en consecuencia, restringidos a moverse a lo largo de distancias iguales.

[‡]Los signos de igualdad azules usados en la figura 13.18 y en el resto de este capítulo se usan para expresar que dos sistemas de vectores son *equipolentes,* es decir, que tienen la misma resultante y momento resultante (véase la sección 3.19). Los signos de igualdad rojos se seguirán usando para indicar que los dos sistemas de vectores son *equivalentes,* esto es, que tienen el mismo efecto. Esto y el concepto de conservación de cantidad de movimiento para un sistema de partículas se estudiarán con gran detalle en el capítulo 14.

13.11. MOVIMIENTO IMPULSIVO

Una fuerza que actúa sobre una partícula durante un breve intervalo que es lo suficientemente grande para producir un cambio definido en la cantidad de movimiento se conoce como *fuerza impulsiva* y el movimiento resultante se denomina *movimiento impulsivo*. Por ejemplo, cuando se golpea una pelota de béisbol, el contacto entre el bate y la pelota se realiza durante un intervalo Δt muy corto. Sin embargo, el valor promedio de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el bate sobre la pelota es muy grande, y el impulso resultante $\mathbf{F}\,\Delta t$ es lo suficientemente grande para cambiar el sentido de movimiento de la pelota (figura 13.19).

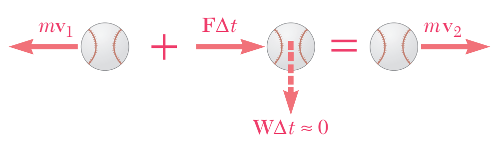


Figura 13.19

Cuando actúan fuerzas impulsivas sobre una partícula, la ecuación (13.32) se convierte en

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_2 \tag{13.35}$$

Es posible ignorar cualquier fuerza que no sea una fuerza impulsiva, puesto que el impulso correspondiente $\mathbf{F}\,\Delta t$ es muy pequeño. Las *fuerzas no impulsivas* incluyen el peso de un cuerpo, la fuerza ejercida por un resorte o cualquier otra fuerza que se *sabe* que es pequeña comparada con una fuerza impulsiva. Las reacciones desconocidas quizá sean o no impulsivas; sus impulsos deben consecuentemente incluirse en la ecuación (13.35) siempre que no se haya demostrado que se pueden ignorar. El impulso del peso de la pelota de béisbol considerada antes, por ejemplo, puede ignorarse. Si se analiza el movimiento del bate, también es factible ignorar el impulso del peso del bate. Los impulsos de las reacciones de las manos del jugador sobre el bate, sin embargo, deberán incluirse; estos impulsos no serán despreciables si la pelota se golpea de manera incorrecta.

Adviértase que el método del impulso y la cantidad de movimiento es en particular efectivo en el análisis del movimiento impulsivo de una partícula, ya que implica sólo las velocidades inicial y final de la partícula y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre la misma. Por otro lado, la aplicación directa de la segunda ley de Newton requeriría la determinación de las fuerzas como funciones del tiempo y la integración de las ecuaciones de movimiento sobre el intervalo Δt.

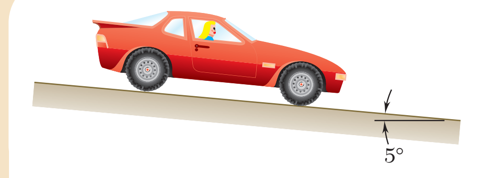
En el caso del movimiento impulsivo de varias partículas, es posible usar la ecuación (13.33), la cual se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.36}$$

donde el segundo término implica sólo fuerzas impulsivas externas. Si todas las fuerzas externas que actúan sobre las diversas partículas son no impulsivas, se anula el segundo término en la ecuación (13.36) y esta ecuación se reduce a la ecuación (13.34). Se escribe

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.34}$$

que expresa que la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando dos partículas que se mueven libremente chocan entre sí. Sin embargo, se debe advertir que mientras se conserva la cantidad de movimiento total de las partículas, su energía total *no* se conserva en general. Los problemas que implican el choque o *impacto* de dos partículas se estudiarán en detalle en las secciones 13.12 a 13.14.

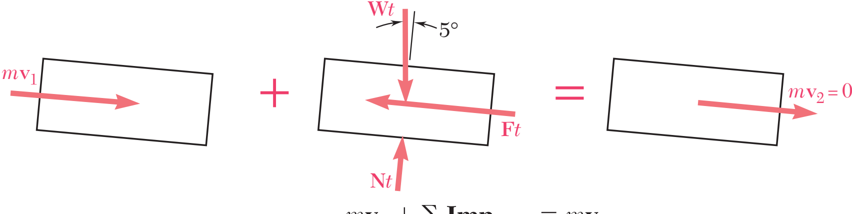


PROBLEMA RESUELTO 13.10

Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una pendiente de 5° a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre los neumáticos) de 1 500 lb. Determine el tiempo que se requiere para que el automóvil se detenga.

SOLUCIÓN

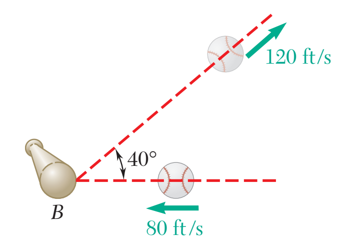
Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que cada una de las fuerzas es constante en magnitud y dirección, cada impulso correspondiente es igual al producto de la fuerza y al intervalo t.



$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$$

$+\searrow$ componentes: $\quad mv_1 + (W \text{ sen } 5°)t - Ft = 0$

$(4\,000/32.2)(88 \text{ ft/s}) + (4\,000 \text{ sen } 5°)t - 1\,500t = 0$ $\qquad t = 9.49 \text{ s}$ ◀



PROBLEMA RESUELTO 13.11

Una pelota de béisbol de 4 oz se lanza con una velocidad de 80 ft/s hacia un bateador. Después de que la bola es golpeada por el bate B, adquiere una velocidad de 120 ft/s en la dirección que se indica. Si el bate y la bola están en contacto 0.015 s, determine la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la pelota durante el impacto.

SOLUCIÓN

Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a la pelota. Puesto que el peso de esta misma es una fuerza no impulsiva, puede ignorarse.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$$

$\xrightarrow{+}$ componentes x: $\quad -mv_1 + F_x\,\Delta t = mv_2 \cos 40°$

$$-\frac{\frac{4}{16}}{32.2}(80 \text{ ft/s}) + F_x(0.015 \text{ s}) = \frac{\frac{4}{16}}{32.2}(120 \text{ ft/s}) \cos 40°$$

$$F_x = +89.0 \text{ lb}$$

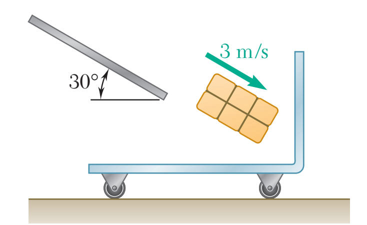
$+\uparrow$ componentes y: $\quad 0 + F_y\,\Delta t = mv_2 \text{ sen } 40°$

$$F_y(0.015 \text{ s}) = \frac{\frac{4}{16}}{32.2}(120 \text{ ft/s}) \text{ sen } 40°$$

$$F_y = +39.9 \text{ lb}$$

A partir de sus componentes F_x y F_y se determina la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F}$:

$\mathbf{F} = 97.5 \text{ lb} \measuredangle 24.2°$ ◀



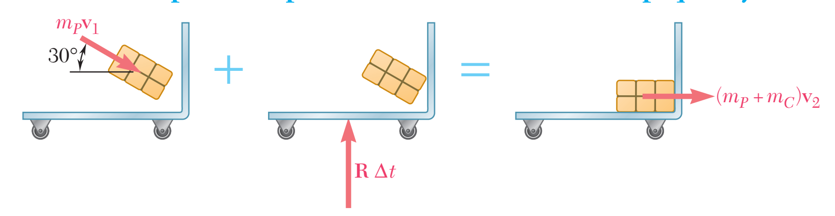
PROBLEMA RESUELTO 13.12

Un paquete de 10 kg cae desde una rampa a una velocidad de 3 m/s en un carro de 25 kg. Si el carro está al inicio en reposo y puede rodar libremente, determine *a*) la velocidad final del carro, *b*) el impulso ejercido por el carro sobre el paquete, *c*) la fracción de la energía inicial perdida en el impacto.

SOLUCIÓN

Se aplica primero el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema paquete-carro para determinar la velocidad $\mathbf{v}_2$ del carro y el paquete. Después se aplica el mismo principio al paquete sólo para determinar el impulso $\mathbf{F}\,\Delta t$ ejercido sobre éste.

***a*) Principio del impulso-cantidad de movimiento: paquete y carro**



$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to2} = (m_P + m_C)\mathbf{v}_2$$

$\overset{+}{\rightarrow}$ componentes x:

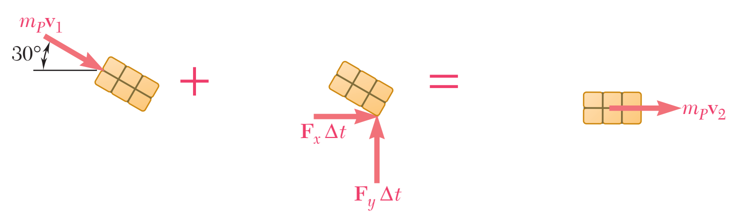
$$m_P v_1 \cos 30° + 0 = (m_P + m_C)v_2$$

$$(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\cos 30° = (10\text{ kg} + 25\text{ kg})v_2$$

$$\mathbf{v}_2 = 0.742\text{ m/s}\rightarrow \quad ◀$$

Se advierte que la ecuación utilizada expresa la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x.

***b*) Principio del impulso-cantidad de movimiento: paquete**



$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to2} = m_P\mathbf{v}_2$$

$\overset{+}{\rightarrow}$ componentes x:

$$(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\cos 30° + F_x\,\Delta t = (10\text{ kg})(0.742\text{ m/s})$$

$$F_x\,\Delta t = -18.56\text{ N}\cdot\text{s}$$

$+\uparrow$ componentes y:

$$-m_P v_1 \operatorname{sen} 30° + F_y\,\Delta t = 0$$

$$-(10\text{ kg})(3\text{ m/s})\operatorname{sen} 30° + F_y\,\Delta t = 0$$

$$F_y\,\Delta t = +15\text{ N}\cdot\text{s}$$

El impulso ejercido sobre el paquete es $\quad \mathbf{F}\,\Delta t = 23.9\text{ N}\cdot\text{s} ⦪ 38.9° \quad ◀$

***c*) Fracción de la energía perdida.** Las energías inicial y final son

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m_P v_1^2 = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(3\text{ m/s})^2 = 45\text{ J}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(m_P + m_C)v_2^2 = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg} + 25\text{ kg})(0.742\text{ m/s})^2 = 9.63\text{ J}$$

La fracción de energía perdida es $\quad \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{45\text{ J} - 9.63\text{ J}}{45\text{ J}} = 0.786 \quad ◀$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se integró la segunda ley de Newton para deducir el *principio del impulso y la cantidad de movimiento* para una partícula. Si se recuerda que la cantidad de *movimiento lineal* de una partícula se definió como el producto de su masa m y su velocidad $\mathbf{v}$ [sección 12.3], se escribe

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\ \mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \qquad (13.32)$$

Esta ecuación expresa que la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_2$ de una partícula en el tiempo t_2 puede obtenerse sumando a su cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_1$ en el tiempo t_1 los *impulsos* de las fuerzas ejercidas sobre la partícula durante el intervalo t_1 a t_2. Con fines de cálculo, las cantidades de movimiento y los impulsos pueden expresarse en términos de sus componentes rectangulares, y es posible sustituir la ecuación (13.32) por las ecuaciones escalares equivalentes. Las unidades de la cantidad de movimiento y del impulso son N · s en el SI y lb · s en las unidades de uso común en Estados Unidos. Para resolver problemas utilizando esta ecuación se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama que muestre la partícula, su cantidad de movimiento en t_1 y en t_2, y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre la partícula durante el intervalo t_1 a t_2.

2. Calcular el impulso de cada fuerza, expresándolo en términos de sus componentes rectangulares si está implicada más de una dirección. Es posible que encuentre los siguientes casos:

a) El intervalo es finito y la fuerza es constante.

$$\mathbf{Imp}_{1\to 2} = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$$

b) El inetervalo es finito y la fuerza es una función de t.

$$\mathbf{Imp}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\, dt$$

c) El intervalo es muy pequeño y la fuerza es muy grande. La fuerza se denomina *una fuerza impulsiva* y su impulso sobre el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$ es

$$\mathbf{Imp}_{1\to 2} = \mathbf{F}\ \Delta t$$

Hay que observar que este impulso es *cero para una fuerza no impulsiva* tal como el *peso* de un cuerpo, la fuerza ejercida por un *resorte*, o cualquier otra fuerza que se sepa que es pequeña en comparación con las fuerzas impulsivas. Sin embargo, las reacciones desconocidas *no pueden suponerse* no impulsivas y sus impulsos deben tomarse en cuenta.

3. Sustituir los valores obtenidos para los impulsos en la ecuación (13.32) o en las ecuaciones escalares equivalentes. Encontrará que las fuerzas y las velocidades en los problemas de esta lección están contenidas en un plano. Por lo tanto, escribirá dos ecuaciones escalares y las resolverá para *dos incógnitas*. Estas incógnitas pueden ser un

tiempo [problema resuelto 13.10], una *velocidad* y un *impulso* [problema resuelto 13.12] o una *fuerza impulsiva promedio* [problema resuelto 13.11].

4. Cuando están implicadas varias partículas, debe dibujarse un diagrama independiente para cada una de ellas, en el que se muestren la cantidad de movimiento inicial y final de la partícula, así como los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre ésta.

a) Sin embargo, suele ser conveniente considerar primero un diagrama que incluya a todas las partículas. Este diagrama conduce a la ecuación

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\ \mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.33}$$

donde los impulsos de *únicamente las fuerzas externas al sistema* necesitan ser consideradas. Por lo tanto, las dos ecuaciones escalares equivalentes no contendrán ninguno de los impulsos de las fuerzas internas desconocidas.

b) Si la suma de los impulsos de las fuerzas externas es cero, la ecuación (13.33) se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.34}$$

que expresa que *se conserva la cantidad de movimiento total de las partículas.* Esto ocurre si la resultante de las fuerzas externas es cero o, cuando el intervalo Δt es muy corto (movimiento impulsivo), si todas las fuerzas externas son no impulsivas. No obstante, hay que tener presente que es posible que se conserve la cantidad de movimiento total *en una dirección,* pero no en la otra [problema resuelto 13.12].

Problemas

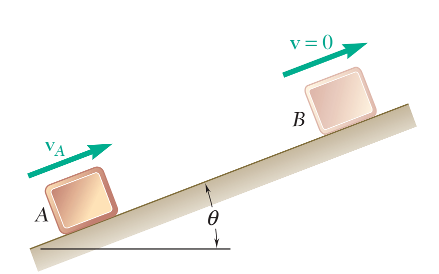


Figura P13.121

13.119 Un automóvil de 1 200 kg se mueve a una rapidez de 90 km/h cuando los frenos se aplican por completo, lo que ocasiona que las cuatro llantas patinen. Determine el tiempo requerido para detener el automóvil *a*) sobre pavimento seco ($\mu_k = 0.75$), *b*) sobre un camino congelado ($\mu_k = 0.10$).

13.120 Un trasatlántico de 40 000 ton tiene una velocidad inicial de 2.5 mi/h. Si se desprecia la resistencia por fricción del agua, determine el tiempo requerido para llevar al trasatlántico al reposo usando un solo remolcador que ejerce una fuerza de 35 kips.

13.121 La velocidad inicial del bloque en la posición *A* es de 30 ft/s. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.30$, determine el tiempo que tarda el bloque en alcanzar *B* con velocidad cero, si *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 20°$.

13.122 Sobre una partícula de 2 kg actúa una fuerza $\mathbf{F} = (8 - 6t)\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + (4 + t)\mathbf{k}$, donde **F** se expresa en newtons. Si se sabe que la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = (150 \text{ m/s})\mathbf{i} + (100 \text{ m/s})\mathbf{j} - (250 \text{ m/s})\mathbf{k}$ en $t = 0$, determine *a*) el tiempo en el cual la velocidad es paralela al plano *yz*, *b*) la velocidad correspondiente de la partícula.

13.123 Las marcas sobre una pista de carreras indican que las ruedas traseras (las de la tracción) de un automóvil patinaron en los primeros 60 ft de la pista de 1 320 ft. *a*) Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética es de 0.60, determine el menor tiempo posible en el que el automóvil puede recorrer los 60 ft iniciales si empieza desde el reposo y las ruedas frontales del automóvil apenas se despegan del suelo. *b*) Determine el tiempo mínimo para que el automóvil corra toda la carrera si, después de patinar durante 60 ft, las ruedas giran sin patinar por el resto de la carrera. Suponga que para la parte de la carrera con rodamiento 60 por ciento del peso del automóvil se apoya sobre las ruedas traseras y que el coeficiente de fricción estática es 0.85. No tome en cuenta la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

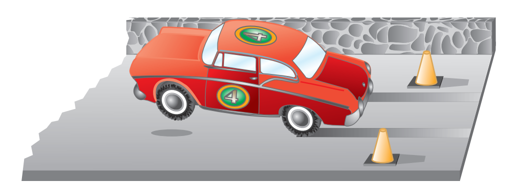


Figura P13.123

13.124 Un camión viaja sobre un camino plano a una rapidez de 90 km/h cuando se aplican los frenos para frenarlo hasta 30 km/h. Un sistema de frenado antiderrapante limita la fuerza de frenado a un valor en el cual los neumáticos del camión están a punto de patinar. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el camino y los neumáticos es igual a 0.65, determine el tiempo más corto necesario para que el camión se frene.

13.125 Un camión desciende sobre un camino con un desnivel del 4 por ciento a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos para frenarlo hasta 20 mi/h. Un sistema de frenado antiderrapante limita la fuerza de frenado a un valor en el cual los neumáticos del camión están a punto de patinar. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el camino y los neumáticos es igual a 0.60, determine el tiempo más corto necesario para que el camión se frene.

13.126 El equipaje sobre el piso de un carro maletero de un tren de alta velocidad no cuenta con ningún medio para evitar su movimiento aparte de la fricción. Determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre un baúl y el piso del carro si el baúl no debe deslizarse cuando el tren reduzca su velocidad a una razón constante de 200 a 90 km/h en un intervalo de 12 s.

13.127 Retome el problema 13.126, y ahora suponga que el tren está descendiendo por una pendiente del 5 por ciento.

13.128 Un velero y sus ocupantes con un peso de 980 lb navegan a favor del viento a 8 mi/h cuando se levanta otra vela para incrementar su rapidez. Determine la fuerza neta proporcionada por la segunda vela durante el intervalo de 10 s que requiere el velero para alcanzar una rapidez de 12 mi/h.

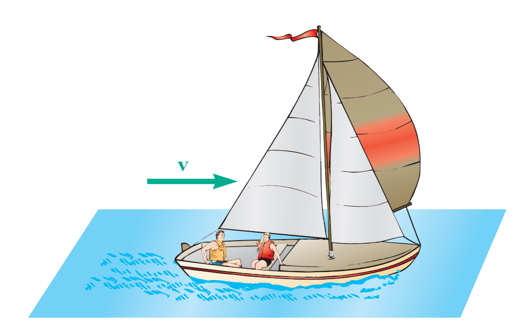


Figura *P13.128*

13.129 Un tren ligero formado por dos vagones viaja a 45 mi/h. El peso del vagón *A* es de 18 tons y el del vagón *B* es de 13 tons. Cuando se aplican repentinamente los frenos, se ejerce una fuerza de frenado constante de 4 300 lb en cada vagón. Determine *a*) el tiempo requerido para que el tren se detenga después de que se aplican los frenos, *b*) la fuerza en el acoplamiento entre los vagones mientras el tren está desacelerando.

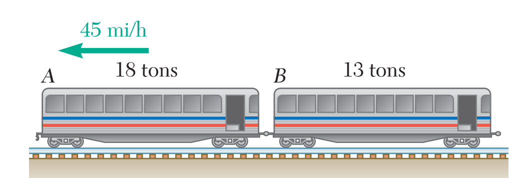


Figura P13.129

13.130 Retome el problema 13.129, y ahora suponga que se aplica una fuerza de frenado constante de 4 300 lb al vagón *B*, pero que no se aplican los frenos en el vagón *A*.

13.131 Un tractocamión con una cabina de 2 000 kg y un remolque de 8 000 kg viaja sobre un camino plano a 90 km/h. Los frenos en el remolque fallan y el sistema antiderrapante de la cabina proporciona la mayor fuerza posible que no provocará que patinen los neumáticos. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.65, determine *a*) el tiempo más corto para que la cabina se detenga, *b*) la fuerza en el acoplamiento durante ese tiempo.

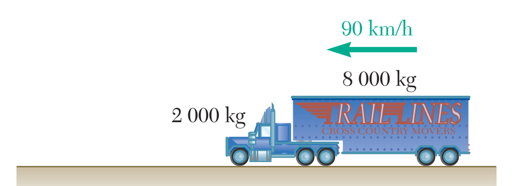


Figura P13.131

13.132 Un cilindro *C* de 8 kg descansa sobre una plataforma *A* de 4 kg sostenida por una cuerda que pasa sobre las poleas *D* y *E* y está unido a un bloque *B* de 4 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine *a*) la velocidad del bloque *B* después de 0.8 s, *b*) la fuerza ejercida por el cilindro sobre la plataforma.

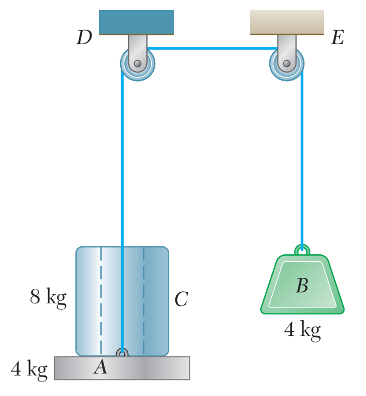


Figura P13.132

13.133 El sistema mostrado en la figura se suelta desde el reposo. Determine el tiempo que se requiere para que la velocidad de *A* llegue a 1 m/s. No tome en cuenta la fricción ni la masa de las poleas.

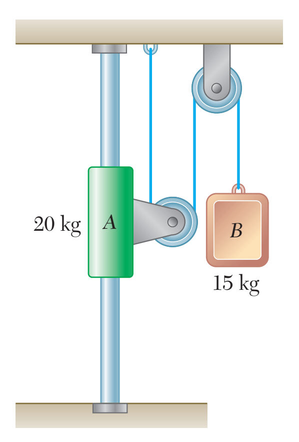


Figura *P13.133*

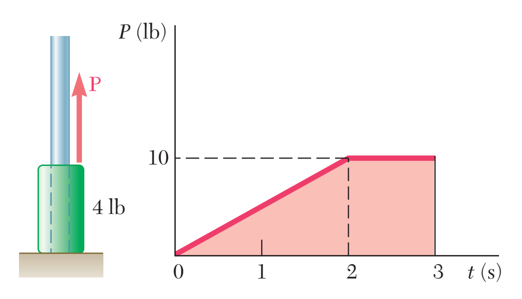


Figura P13.134 y P13.135

13.134 Sobre un collarín de 4 lb que puede deslizarse sobre una varilla vertical sin fricción actúa una fuerza **P** que varía en magnitud de la manera que se indica en la figura. Si el collarín está inicialmente en reposo, determine su velocidad en *a*) $t = 2$ s, *b*) $t = 3$ s.

13.135 Sobre un collarín de 4 lb que puede deslizarse sobre una varilla vertical sin fricción actúa una fuerza **P** que varía en magnitud de la manera que se indica en la figura. Si al principio el collarín está en reposo, determine *a*) la rapidez máxima del collarín, *b*) el tiempo en el que la velocidad es cero.

13.136 Sobre un bloque de 125 lb que inicialmente está en reposo se aplica una fuerza **P** que varía como se muestra en la figura. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre el bloque y la superficie horizontal son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$, determine *a*) el tiempo en el que el bloque comenzará a moverse, *b*) la rapidez máxima que alcanza el bloque, *c*) el tiempo en el que el bloque dejará de moverse.

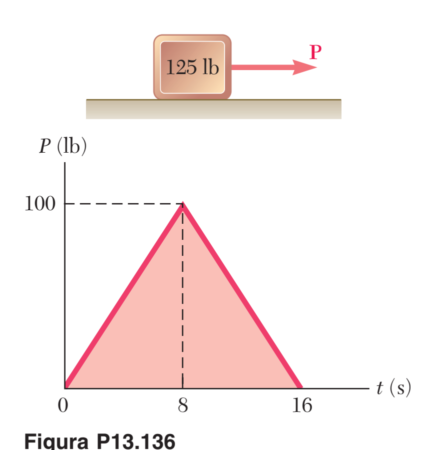


Figura P13.136

13.137 Retome el problema 13.136, y ahora suponga que el peso del bloque es de 175 lb.

13.138 Se va a obtener un modelo simplificado consistente en una línea recta para la variación de la presión dentro del cañón de 10 mm de diámetro de un rifle cuando se lanza una bala de 20 g. Si se sabe que se requiere 1.6 ms para recorrer la longitud del cañón y que la velocidad de la bala al salir es de 700 m/s, determine el valor de p_0.

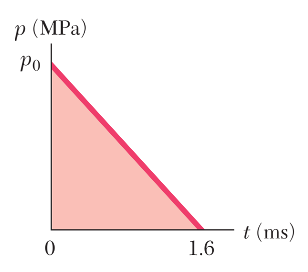


Figura P13.138

13.139 El siguiente modelo matemático se sugirió para la variación en la presión dentro del barril de un rifle con un diámetro de 10 mm, al disparar una bala de 25 g:

$$p(t) = (950 \text{ MPa})e^{-t/(0.16 \text{ ms})}$$

donde t se expresa en ms. Si se sabe que la bala tardó 1.44 ms en recorrer toda la longitud del barril y que la velocidad de la bala después de salir fue medida en 520 m/s, determine el error porcentual introducido si la ecuación anterior se usa para calcular la velocidad en la boca del rifle.

13.140 El salto triple es una prueba de pista y campo en la cual un atleta inicia una carrera y trata de llegar lo más lejos posible, con una zancada, un paso y un salto. En la figura se muestra la zancada inicial del atleta. Si se supone que éste se aproxima a la línea de despegue desde la izquierda con una velocidad horizontal de 10 m/s, permanece en contacto con el suelo durante 0.18 s, y despega a un ángulo de 50° con una velocidad de 12 m/s, determine la componente vertical de la fuerza impulsiva promedio ejercida por el suelo sobre su pie. Dé su respuesta en términos del peso W del atleta.

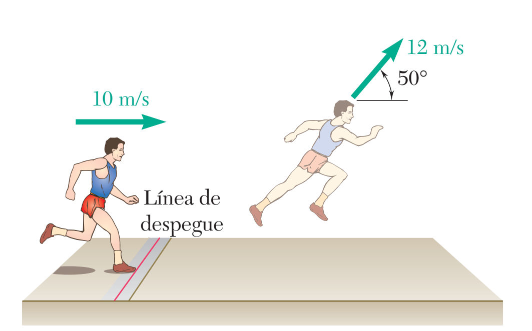


Figura P13.140

13.141 La última parte de la competencia atlética de salto triple es el salto, en el cual el atleta realiza el último de sus tres avances, aterrizando en un foso de arena. Si se supone que la velocidad de un atleta de 185 lb justo antes de aterrizar es de 30 ft/s a un ángulo de 35° con la horizontal y que el atleta se detiene por completo 0.22 s después del aterrizaje, determine la componente horizontal de la fuerza impulsiva promedio que se ejerce sobre sus pies durante el aterrizaje.

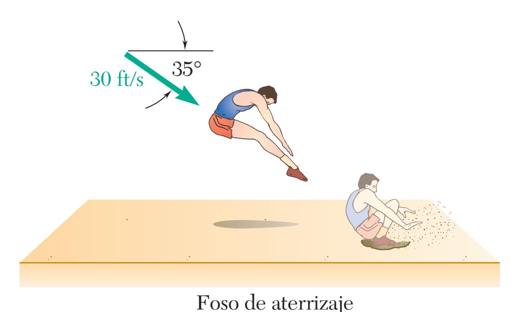


Figura P13.141

13.142 Antes de diseñar un prototipo de cinturón de seguridad que se evaluará en pruebas de choque de automóviles, se realiza una estimación de la carga esperada en el cinturón de seguridad que pasa por el hombro. Si un automóvil que viaja a 45 mi/h se detiene en 110 ms, determine *a*) la fuerza impulsiva promedio ejercida por un hombre de 200 lb sobre el cinturón, *b*) la fuerza máxima F_m que se ejerce sobre el cinturón si el diagrama fuerza-tiempo tiene la forma que se muestra en la figura.

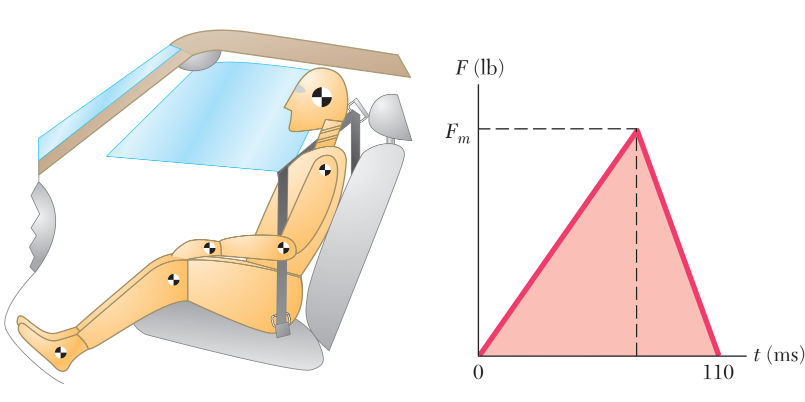
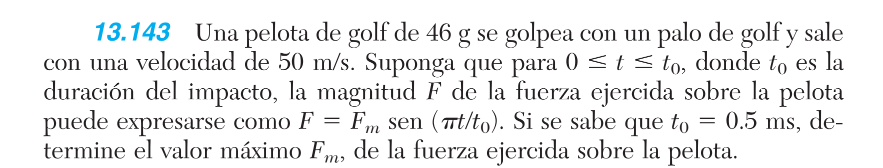


Figura P13.142



13.143 Una pelota de golf de 46 g se golpea con un palo de golf y sale con una velocidad de 50 m/s. Suponga que para $0 \leq t \leq t_0$, donde t_0 es la duración del impacto, la magnitud F de la fuerza ejercida sobre la pelota puede expresarse como $F = F_m \text{ sen } (\pi t/t_0)$. Si se sabe que $t_0 = 0.5$ ms, determine el valor máximo F_m, de la fuerza ejercida sobre la pelota.

13.144 El diseño de un nuevo implante de cadera sin cemento, se estudiará utilizando un implante instrumentado y un fémur simulado fijo. Si se supone que el cincel aplica una fuerza promedio de 2 kN por un tiempo de 2 ms sobre el implante de 200 g, determine *a*) la velocidad del implante inmediatamente después del impacto, *b*) la resistencia promedio del implante a la penetración si éste se mueve 1 mm antes de quedar en reposo.

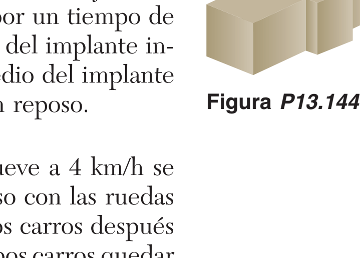


Figura *P13.144*

13.145 Un carro de ferrocarril de 20 Mg que se mueve a 4 km/h se acoplará con un carro de 40 Mg que se encuentra en reposo con las ruedas aseguradas ($\mu_k = 0.30$). Determine *a*) la velocidad de ambos carros después de completar el acoplamiento, *b*) el tiempo que le toma a ambos carros quedar en reposo.

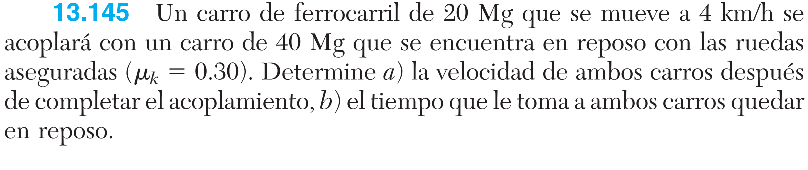


Figura P13.145

13.146 En un crucero el automóvil B viajaba hacia el sur y el automóvil A en dirección 30° al noreste cuando chocaron entre sí. Luego de la investigación se determinó que después del choque los dos automóviles quedaron trabados y patinaron a un ángulo de 10° noreste. Cada conductor afirmó que viajaba al límite de velocidad de 50 km/h y que trató de frenar, pero que no pudo evitar el choque debido a que el otro conductor iba bastante más rápido. Si se sabe que los pesos de los automóviles A y B eran, respectivamente, de 1 500 y 1 200 kg, determine *a*) cuál de los automóviles iba más rápido, *b*) la rapidez del automóvil que iba a mayor velocidad si el vehículo más lento viajaba al límite de velocidad.

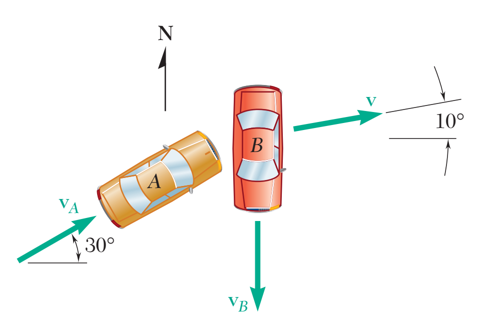


Figura P13.146

13.147 Una madre y su pequeño hijo esquían juntos, mientras la mujer sostiene el extremo de una cuerda atada a la cintura del niño. Se mueven a una rapidez de 7.2 km/h sobre una porción plana de la pista de esquí, cuando la madre observa que se están aproximando a una pendiente descendente. Decide jalar la cuerda para disminuir la velocidad de su hijo. Si se sabe que esta maniobra ocasiona que la rapidez del niño disminuya a la mitad en 3 s y se desprecia la fricción, determine *a*) la rapidez de la madre al final del intervalo de 3 s, *b*) el valor promedio de la tensión en la cuerda durante ese periodo.

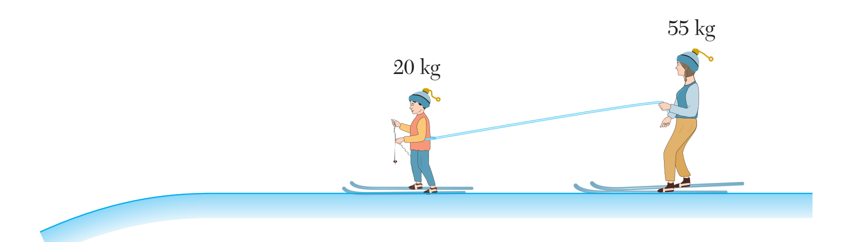


Figura P13.147

13.148 La bala B pesa 0.5 oz y los bloques A y C pesan 3 lb cada uno. El coeficiente de fricción entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.25$. En un inicio, la bala se mueve con una velocidad v_0 y los bloques A y C se encuentran en reposo (figura 1). Después de que la bala pasa a través de A se incrusta en el bloque C y los tres objetos se detienen en las posiciones mostradas (figura 2). Determine la rapidez inicial v_0 de la bala.

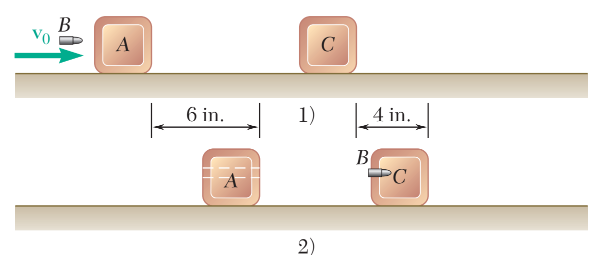


Figura P13.148

13.149 Dos esferas idénticas A y B, cada una con masa m, están unidas a una cuerda inextensible de longitud L, y se encuentran separadas por una distancia a sobre una superficie sin fricción. A la esfera B se le da una velocidad $\mathbf{v}_0$ en una dirección perpendicular a la línea AB y se mueve sin fricción hasta que llega a B' cuando la cuerda se pone tensa. Determine *a*) la magnitud de la velocidad de cada esfera inmediatamente después de que la cuerda se pone tensa, *b*) la energía perdida cuando la cuerda se pone tensa.

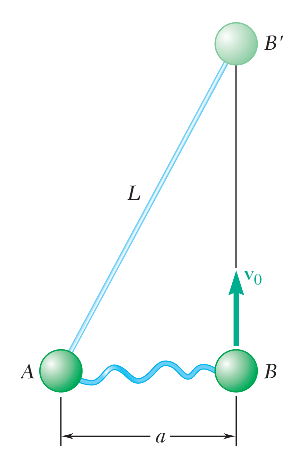


Figura P13.149

13.150 Dos nadadores A y B cuyo peso es, respectivamente, 190 lb y 125 lb, están en las esquinas diagonalmente opuestas de una balsa cuando se dan cuenta de que ésta se ha soltado de su ancla. El nadador A empieza a caminar de inmediato hacia B a una rapidez de 2 ft/s relativa a la balsa. Si se sabe que esta última pesa 300 lb, determine *a*) la rapidez de la balsa si B no se mueve, *b*) la rapidez con la cual B debe caminar hacia A para que la balsa no se mueva.

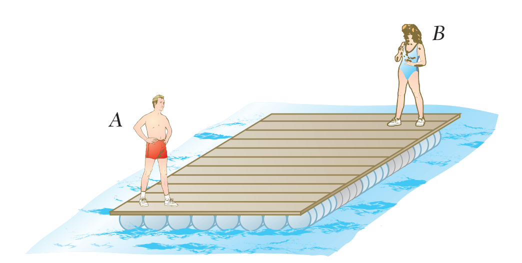


Figura P13.150

13.151 Una bola de 125 g que se mueve a una rapidez de 3 m/s golpea una placa de 250 g sostenida por medio de resortes. Si se supone que no se pierde energía en el impacto, determine *a*) la velocidad de la bola inmediatamente después del impacto, *b*) el impulso de la fuerza ejercida por la placa sobre la bola.

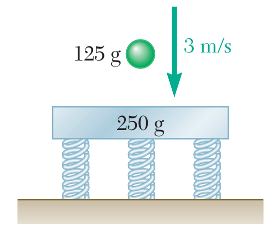


Figura P13.151

13.152 Una bala de masa m se dispara con una velocidad $\mathbf{v}_0$ formando un ángulo θ con la horizontal y se incrusta en un bloque de madera con masa M. El bloque puede rodar sin fricción sobre un piso duro y mediante resortes se evita que golpee la pared. Determine las componentes horizontal y vertical del impulso de la fuerza ejercida por el bloque sobre la bala.

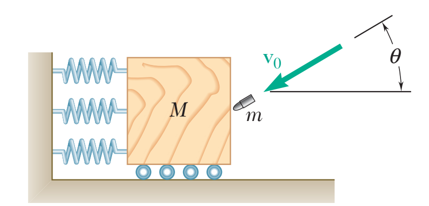


Figura P13.152

13.153 Con el fin de probar la resistencia al impacto de una cadena, ésta se suspende de una viga rígida de 240 lb sostenida mediante dos columnas. Una varilla unida al último eslabón es golpeada con un bloque de 60 lb que se deja caer desde una altura de 5 ft. Determine el impulso inicial ejercido sobre la cadena y la energía que absorbe, suponiendo que el bloque no rebota en la varilla y que las columnas que soportan la viga son *a*) perfectamente rígidas, *b*) equivalentes a dos resortes perfectamente elásticos.

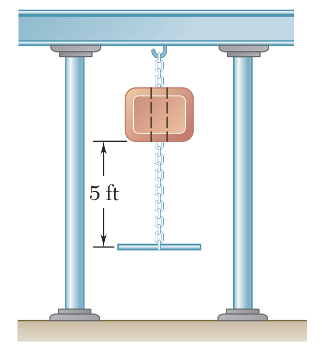


Figura *P13.153*

13.154 Al capturar una pelota, un jugador de béisbol puede suavizar el impacto jalando su mano hacia atrás. Si se supone que una pelota de 5 oz llega a la manopla a 90 mi/h y que el receptor jala hacia atrás su mano durante el impacto a una rapidez promedio de 30 ft/s sobre una distancia de 6 in., y la bola queda en reposo, determine la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la mano del jugador.

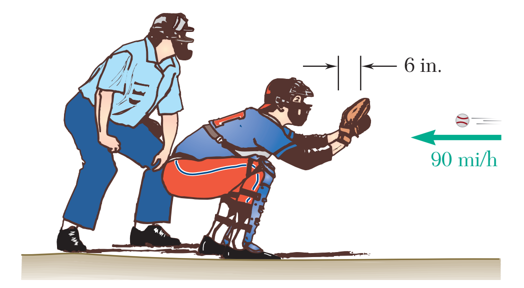
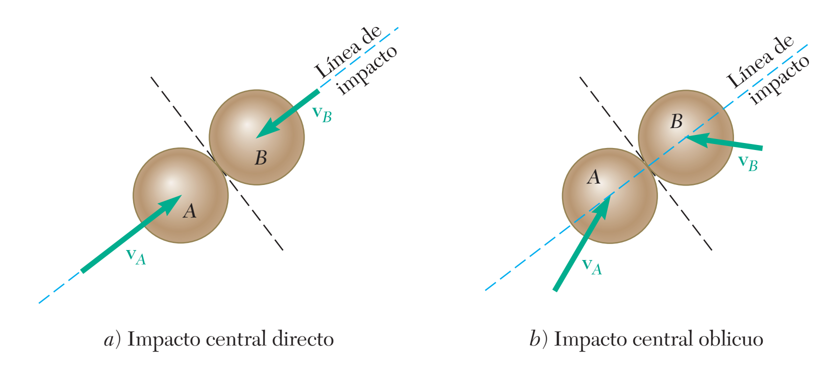


Figura *P13.154*

13.12. IMPACTO

Un choque entre dos cuerpos que ocurre en un intervalo muy pequeño y durante el cual los dos cuerpos ejercen fuerzas relativamente grandes entre sí recibe el nombre de *impacto.* La normal común a las superficies en contacto durante el impacto se conoce como *línea de impacto.* Si los centros de masa en los dos cuerpos que chocan se ubican sobre esta línea, el impacto es un *impacto central.* En otro caso, se dice que el impacto es *excéntrico.* Nuestro estudio se limitará al impacto central de dos partículas. El análisis del impacto excéntrico de dos cuerpos rígidos se considerará después, en la sección 17.12.



a) Impacto central directo   *b*) Impacto central oblicuo

Figura 13.20

Si las velocidades de dos partículas se dirigen a lo largo de la línea de impacto, se dice que el impacto será *directo* (figura 13.20*a*). Si alguna o ambas partículas se mueven a lo largo de una línea que no sea la línea de impacto, se dice que el impacto será *oblicuo* (figura 13.20*b*).

13.13. IMPACTO CENTRAL DIRECTO

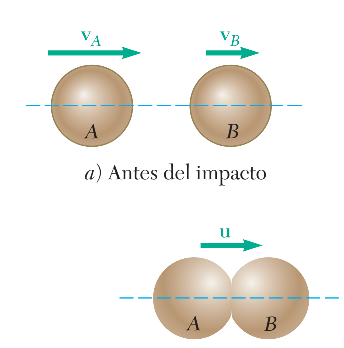
Considere dos partículas A y B, de masas m_A y m_B, las cuales se mueven en la misma línea recta y hacia la derecha con velocidades conocidas $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ (figura 13.21*a*). Si $\mathbf{v}_A$ es mayor que $\mathbf{v}_B$, la partícula A golpeará finalmente a la partícula B. Por el impacto, las dos partículas se *deformarán* y, al final del periodo de deformación, tendrán la misma velocidad $\mathbf{u}$ (figura 13.21*b*). Se presentará un periodo de *restitución,* al final del cual, dependiendo de la magnitud de las fuerzas de impacto y de los materiales implicados, las dos partículas habrán recobrado su forma original o permanecerán deformadas. El propósito aquí es determinar las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ de las partículas al final del periodo de restitución (figura 13.21*c*).

Considerando primero las dos partículas como un solo sistema, se advierte que no hay fuerza impulsiva externa. De tal modo, se conserva la cantidad de movimiento total de las dos partículas y se escribe

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$

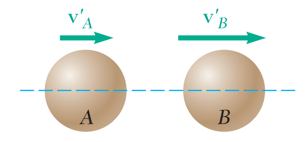
Puesto que todas las velocidades consideradas están dirigidas a lo largo del mismo eje, es posible sustituir la ecuación que se obtuvo por la siguiente relación que incluye sólo componentes escalares

$$m_Av_A + m_Bv_B = m_Av'_A + m_Bv'_B \tag{13.37}$$



a) Antes del impacto

b) En la deformación máxima



c) Después del impacto

Figura 13.21

Un valor positivo para cualquiera de las cantidades escalares v_A, v_B, v'_A o v'_B significa que el vector correspondiente está dirigido hacia la derecha; un valor negativo indica que el vector correspondiente está dirigido hacia la izquierda.

Para obtener las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$, es necesario establecer una segunda relación entre los escalares v'_A y v'_B. Para este propósito, se considera ahora el movimiento de la partícula A durante el periodo de deformación y se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que la única fuerza impulsiva que actúa sobre A durante este periodo es la fuerza $\mathbf{P}$ ejercida por B (figura 13.22*a*), se escribe, utilizando de nuevo componentes escalares,

$$m_A v_A - \int P\,dt = m_A u \qquad (13.38)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de deformación. Al considerar ahora el movimiento de A durante el periodo de restitución, y denotar por $\mathbf{R}$ la fuerza ejercida por B sobre A durante este periodo (figura 13.22*b*), se escribe

$$m_A u - \int R\,dt = m_A v'_A \qquad (13.39)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de restitución.

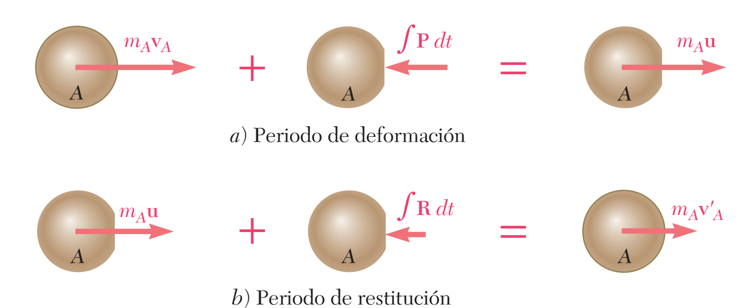


Figura 13.22

En general la fuerza $\mathbf{R}$ ejercida sobre A durante el periodo de restitución difiere de la fuerza $\mathbf{P}$ ejercida durante el periodo de deformación, y la magnitud $\int R\,dt$ de su impulso es menor que la magnitud $\int P\,dt$ del impulso de $\mathbf{P}$. El cociente de las magnitudes de los impulsos correspondientes, respectivamente, al periodo de restitución y al periodo de deformación se denomina *coeficiente de restitución* y se denota por e. Se escribe

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \qquad (13.40)$$

El valor del coeficiente e siempre está entre 0 y 1. Depende en gran medida de los materiales implicados, pero también varía de manera considerable con la velocidad de impacto y la forma y tamaño de los dos cuerpos que chocan.

Al resolver las ecuaciones (13.38) y (13.39) para los dos impulsos y sustituir en (13.40), se escribe

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \qquad (13.41)$$

Un análisis similar de la partícula B conduce a la relación

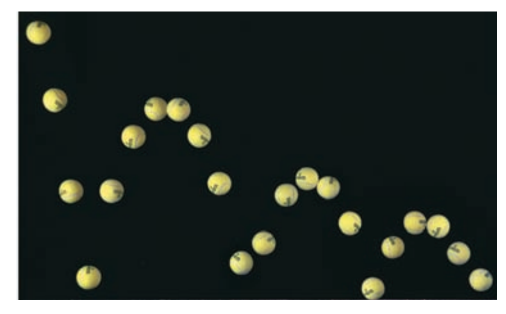
$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \tag{13.42}$$

Puesto que los cocientes en (13.41) y (13.42) son iguales, también lo son al cociente obtenido al sumar, respectivamente, sus numeradores y sus denominadores. Se tiene, por lo tanto

$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

y

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \tag{13.43}$$



Fotografía 13.3 La altura de los rebotes de esta pelota de tenis disminuye después de cada impacto, debido a que tiene un coeficiente de restitución menor que uno y en cada rebote se pierde energía.

En virtud de que $v'_B - v'_A$ representa la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto y $v_A - v_B$ representa su velocidad relativa antes del impacto, la fórmula (13.43) expresa que *la velocidad relativa de dos partículas después del impacto puede obtenerse al multiplicar su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución.* Esta propiedad se utiliza para determinar experimentalmente el valor del coeficiente de restitución de dos materiales dados.

Las velocidades de las dos partículas después del impacto pueden obtenerse ahora al resolver simultáneamente las ecuaciones (13.37) y (13.43) para v'_A y v'_B. Hay que recordar que la deducción de las ecuaciones (13.37) y (13.43) se basa en la suposición de que la partícula B se localiza a la derecha de A, y que ambas partículas se están moviendo al principio hacia la derecha. Si la partícula B se mueve inicialmente hacia la izquierda, el escalar v_B debe considerarse negativo. La misma convención de signo se cumple para las velocidades después del impacto: un signo positivo para v'_A indicará que la partícula A se mueve hacia la derecha después del impacto, y un signo negativo señalará que se mueve hacia la izquierda.

Dos casos de impacto particulares son de especial interés:

1. $e = 0$, *impacto perfectamente plástico*. Cuando $e = 0$, la ecuación (13.43) produce $v'_B = v'_A$. No hay periodo de restitución y ambas partículas permanecen juntas después del impacto. Al sustituir $v'_B = v'_A = v'$ en la ecuación (13.37), la cual expresa que la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva, se escribe

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v' \tag{13.44}$$

Esta ecuación puede resolverse para la velocidad común v' de las dos partículas después del impacto.

2. $e = 1$, *impacto perfectamente elástico*. Cuando $e = 1$ la ecuación (13.43) se reduce a

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B \tag{13.45}$$

que expresa que las velocidades relativas antes y después del impacto son iguales. Los impulsos recibidos por cada partícula durante el periodo de deformación y durante el periodo de restitución son los mismos. Las partículas se alejan una de la otra después del impacto con la misma velocidad con la cual

se aproximaban antes de él. Las velocidades v'_A y v'_B pueden obtenerse al resolver simultáneamente las ecuaciones (13.37) y (13.45).

Vale la pena notar que *en el caso de un impacto perfectamente elástico, se conserva la energía total de las dos partículas,* así como su cantidad de movimiento total. Las ecuaciones (13.37) y (13.45) pueden escribirse como sigue:

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \qquad (13.37')$$

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B \qquad (13.45')$$

Al multiplicar (13.37′) y (13.45′) miembro por miembro, se tiene

$$m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B(v'_B - v_B)(v'_B + v_B)$$

$$m_A v_A^2 - m_A(v'_A)^2 = m_B(v'_B)^2 - m_B v_B^2$$

Al reagrupar los términos en la ecuación que se obtuvo y multiplicar por $\frac{1}{2}$, se escribe

$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A(v'_A)^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v'_B)^2 \qquad (13.46)$$

lo cual expresa que la energía cinética de las partículas se conserva. Sin embargo, hay que observar que *en el caso general de un impacto,* esto es, cuando e no es igual a 1, *no se conserva la energía total de las partículas.* Lo anterior puede demostrarse para cualquier caso dado al comparar las energías cinéticas antes y después del impacto. La energía cinética perdida en parte se transforma en calor y en parte se gasta en generar ondas elásticas dentro de los dos cuerpos que chocan.

13.14. IMPACTO CENTRAL OBLICUO

En seguida se estudiará el caso en el que las velocidades de las dos partículas que chocan *no* están dirigidas a lo largo de la línea de impacto

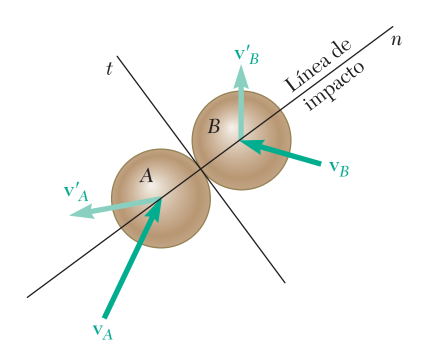


Figura 13.23

(figura 13.23). Como se indica en la sección 13.12, se afirma que el impacto será *oblicuo*. Puesto que no se conocen ni la dirección ni la magnitud de las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ de las partículas después del impacto, su determinación requerirá el uso de cuatro ecuaciones independientes.

Se eligieron como ejes coordenados al eje n a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo de la normal común a las superficies en contacto, y el eje t a lo largo de su tangente común. Suponiendo que las partículas son perfectamente *lisas y sin ficción,* se observa que los

Fotografía 13.4 Cuando una bola de billar golpea a otra, existe una transferencia de cantidad de movimiento.

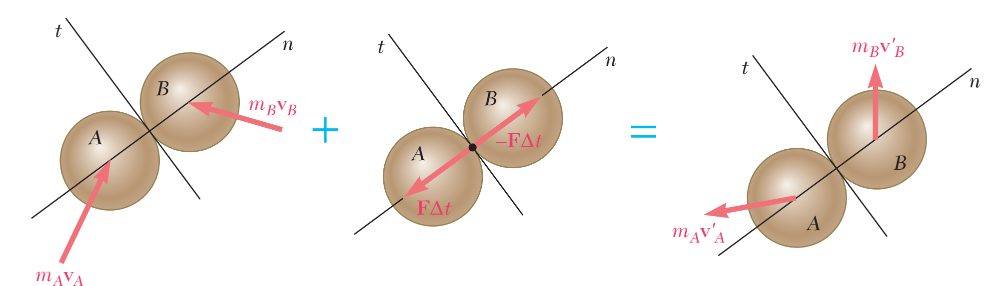


Figura 13.24

únicos impulsos que se ejercen sobre las partículas durante el impacto se deben a las fuerzas internas dirigidas a la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n (figura 13.24). Se concluye que

1. La componente de la cantidad de movimiento de cada partícula a lo largo del eje t, considerada por separado, se conserva; en consecuencia, la componente t de la velocidad de cada partícula permanece invariable. Se escribe

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \qquad (v_B)_t = (v'_B)_t \tag{13.47}$$

2. La componente a lo largo del eje n de la cantidad de movimiento total de las dos partículas se conserva. Se escribe

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \tag{13.48}$$

3. La componente a lo largo del eje n de la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto se obtiene multiplicando la componente n de su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. De hecho, una deducción similar a la que se dio en la sección 13.13 para el impacto central directo produce

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{13.49}$$

De esta manera se han obtenido cuatro ecuaciones independientes que pueden resolverse para las componentes de las velocidades de A y B después del impacto. Este método de solución se ilustra en el problema resuelto 13.15.

El análisis del impacto central oblicuo de dos partículas se ha basado hasta ahora en la suposición de que ambas partículas se mueven libremente antes y después del impacto. A continuación se examinará el caso en el que una o ambas de las partículas que chocan tiene restricciones en su movimiento. Considere, por ejemplo, el choque entre el bloque A, que está restringido a moverse sobre una superficie horizontal y la bola B, que tiene libertad para moverse en el plano de la figura (figura 13.25). Si se supone que no hay fricción entre el bloque y la bola, o entre el bloque y la superficie horizontal, note que los impulsos ejercidos sobre el sistema consisten en los impulsos de las fuerzas internas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ dirigidos a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n, y del impulso de la fuerza externa $\mathbf{F}_{ext}$ ejercido por la superficie horizontal sobre el bloque A y dirigido a lo largo de la vertical (figura 13.26).

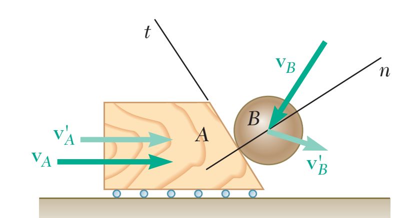


Figura 13.25

Las velocidades del bloque A y de la bola B inmediatamente después del impacto se representan mediante tres incógnitas: la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}'_A$ del bloque A, la cual se sabe que es horizontal, y la

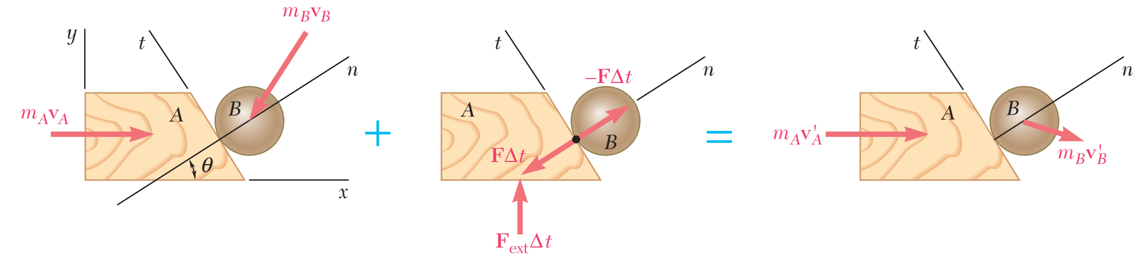


Figura 13.26

magnitud y dirección de la velocidad $\mathbf{v}'_B$ de la bola B. Por lo tanto, se deben escribir tres ecuaciones en las que se exprese que

1. La componente a lo largo del eje t de la cantidad de movimiento de la bola B se conserva; en consecuencia, la componente t de la velocidad de la bola B permanece invariable. Se escribe

$$(v_B)_t = (v'_B)_t \tag{13.50}$$

2. La componente a lo largo del eje x horizontal de la cantidad de movimiento total del bloque A y de la bola B se conserva. Se escribe

$$m_A v_A + m_B(v_B)_x = m_A v'_A + m_B(v'_B)_x \tag{13.51}$$

3. La componente a lo largo del eje n de la velocidad relativa del bloque A y de la bola B después del impacto se obtiene al multiplicar la componente n de su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. Se escribe de nuevo

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{13.49}$$

Sin embargo, se debe advertir que en el caso considerado aquí la validez de la ecuación (13.49) no puede establecerse a través de una mera extensión de la deducción que se dio en la sección 13.13 para el impacto central directo de dos partículas que se mueven en una línea recta. De hecho, estas partículas no estaban sujetas a ningún impulso externo, en tanto que el bloque A en el análisis presente está sujeto al impulso ejercido por la superficie horizontal. Para demostrar que la ecuación (13.49) sigue siendo válida, se aplica primero el principio del impulso y la cantidad de movimiento al bloque A sobre el periodo de deformación (figura 13.27). Al considerar sólo las componentes horizontales, se escribe

$$m_A v_A - (\textstyle\int P\,dt)\cos\theta = m_A u \tag{13.52}$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de deformación y donde $\mathbf{u}$ representa la velocidad del bloque A al final de ese periodo. Al considerar ahora el periodo de restitución, se escribe de manera similar

$$m_A u - (\textstyle\int R\,dt)\cos\theta = m_A v'_A \tag{13.53}$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de restitución.

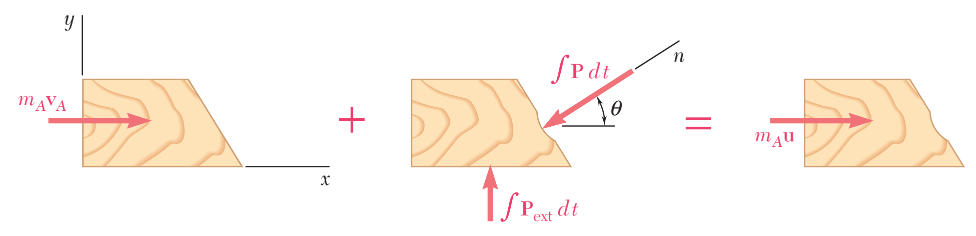


Figura 13.27

Al recordar de la sección 13.13 la definición del coeficiente de restitución, se escribe

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \qquad (13.40)$$

Al resolver las ecuaciones (13.52) y (13.53) para las integrales $\int P\,dt$ y $\int R\,dt$, y sustituir en la ecuación (13.40), se tiene, después de simplificaciones,

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

o multiplicar todas las velocidades por cos θ para obtener sus proyecciones sobre la línea de impacto,

$$e = \frac{u_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - u_n} \qquad (13.54)$$

Note que la ecuación (13.54) es idéntica a la ecuación (13.41) de la sección 13.13, excepto por los subíndices n que se usan aquí para indicar que se están considerando componentes de velocidad a lo largo de la línea de impacto. Puesto que el movimiento de la bola B no está restringido, la demostración de la ecuación (13.49) puede completarse de la misma manera que la deducción de la ecuación (13.43) de la sección 13.13. Así, se concluye que la relación (13.49) entre las componentes a lo largo de la línea de impacto de las velocidades relativas de las dos partículas que chocan permanece válida cuando se restringe el movimiento de una de las partículas. La validez de esta relación se extiende sin dificultad al caso en el que ambas partículas se restringen en su movimiento.

13.15. PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Ahora ya se tienen tres métodos diferentes para la solución de problemas de cinética: la aplicación directa de la segunda ley de Newton, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; el método del trabajo y la energía, y el método del impulso y la cantidad de movimiento. Para obtener el mayor beneficio de estos tres métodos, se debe ser capaz de elegir el método más adecuado para la solución de un problema determinado. También se debe estar preparado para utilizar diferentes métodos para resolver las diversas partes de un problema cuando uno de los procedimientos resulte aconsejable.

Ya se vio que el método del trabajo y la energía en muchos casos es más expedito que la aplicación directa de la segunda ley de Newton. Sin embargo, como se indicó en la sección 13.4, el método del trabajo y la energía tiene limitaciones y, en ocasiones, debe complementarse con el uso de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Éste es el caso, por ejemplo, cuando se desea determinar una aceleración o una fuerza normal.

Para la solución de problemas en los que intervienen fuerzas no impulsivas, suele encontrarse que la ecuación $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ produce una solución igual de rápida que el método del impulso y cantidad de movimiento y que el método del trabajo y la energía, si se aplica, es más rápido y conveniente. Sin embargo, en problemas de impacto, el método del impulso y la cantidad de movimiento es el único que resulta

práctico. Una solución basada en la aplicación directa de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sería tediosa, y el método del trabajo y la energía no puede utilizarse, puesto que el impacto (a menos que sea perfectamente elástico) implica una pérdida de energía mecánica.

Muchos problemas implican sólo fuerzas conservativas, salvo para una fase de impacto corta durante la cual actúan fuerzas impulsivas. La solución de problemas de este tipo se divide en varias partes. La parte correspondiente a la fase de impacto requiere el uso del método del impulso y la cantidad de movimiento y de la relación entre las velocidades relativas, en tanto que las otras partes suelen resolverse por el método del trabajo y la energía. Sin embargo, si el problema implica la determinación de una fuerza normal, es necesario el uso de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Considere, por ejemplo, un péndulo A, de masa m_A y longitud l, que se suelta sin velocidad desde una posición A_1 (figura 13.28*a*). El péndulo oscila con libertad en un plano vertical y golpea a un segundo péndulo B, de masa m_B e igual longitud l, que está inicialmente en reposo. Luego del impacto (con coeficiente de restitución e), el péndulo B oscila un ángulo θ que se desea determinar.

La solución del problema puede dividirse en tres partes:

1. *El péndulo A oscila de* A_1 *a* A_2. Es posible utilizar el principio de la conservación de la energía para determinar la velocidad $(\mathbf{v}_A)_2$ del péndulo en A_2 (figura 13.28*b*).
2. *El péndulo A golpea al péndulo B.* Utilizando el hecho de que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos péndulos y la relación entre sus velocidades relativas, se determinan las velocidades $(\mathbf{v}_A)_3$ y $(\mathbf{v}_B)_3$ de los dos péndulos después del impacto (figura 13.28*c*).
3. *El péndulo B oscila de* B_3 *a* B_4. Aplicando el principio de la conservación de la energía al péndulo B, se determina la elevación máxima y_4 que alcanza este mismo (figura 13.28*d*). El ángulo θ puede determinarse entonces por trigonometría.

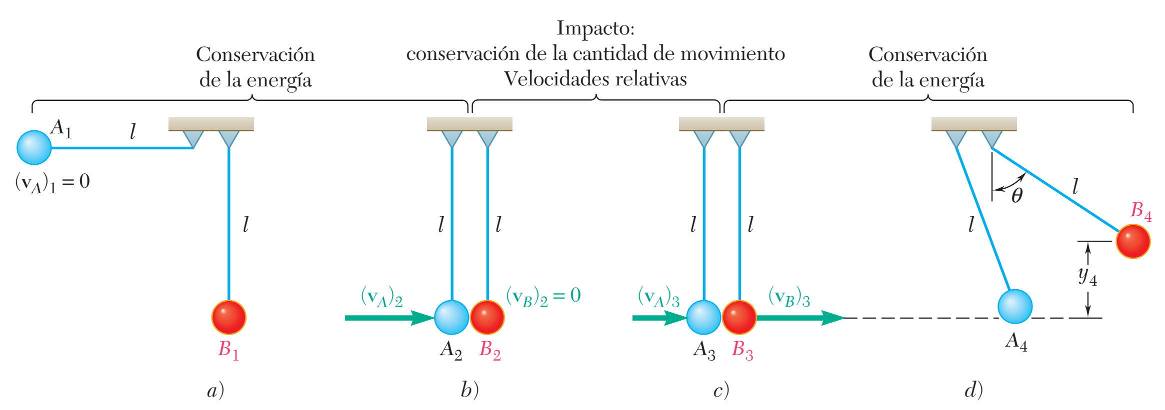


Figura 13.28

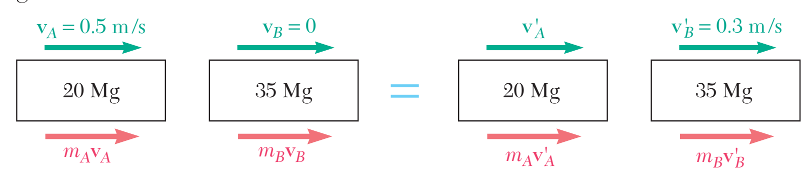
Advierta que si se van a determinar las tensiones en las cuerdas que sostienen a los péndulos, el método de solución que acaba de describirse debe complementarse con el uso de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

PROBLEMA RESUELTO 13.13

Un vagón de ferrocarril de 20 Mg que se mueve a una rapidez de 0.5 m/s hacia la derecha choca con un vagón de 35 Mg que se encuentra en reposo. Si después del choque se observa que el vagón de 35 Mg se mueve hacia la derecha a una rapidez de 0.3 m/s, determine el coeficiente de restitución entre los dos vagones.

SOLUCIÓN

Se expresa la conservación de la cantidad de movimiento total de los dos vagones.



$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$
$$(20 \text{ Mg})(+0.5 \text{ m/s}) + (35 \text{ Mg})(0) = (20 \text{ Mg})v'_A + (35 \text{ Mg})(+0.3 \text{ m/s})$$
$$v'_A = -0.025 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}'_A = 0.025 \text{ m/s} \leftarrow$$

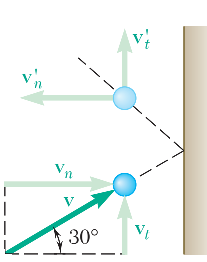
El coeficiente de restitución se obtiene al escribir

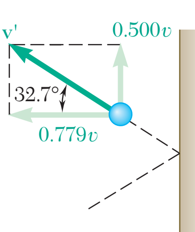
$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{+0.3 - (-0.025)}{+0.5 - 0} = \frac{0.325}{0.5} \qquad e = 0.65 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 13.14

Se lanza una pelota contra una pared vertical sin fricción. Inmediatamente antes de que la pelota golpee la pared, su velocidad tiene una magnitud v y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si se sabe que $e = 0.90$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de la pelota cuando ésta rebota en la pared.

SOLUCIÓN





La velocidad inicial de la pelota se descompone en las componentes perpendicular y paralela a la pared

$$v_n = v \cos 30° = 0.866v \qquad v_t = v \text{ sen } 30° = 0.500v$$

Movimiento paralelo hacia la pared. Puesto que no hay fricción en la pared, el impulso que ejerce sobre la pelota es perpendicular a aquélla. De tal modo, la componente paralela hacia la pared de la cantidad de movimiento de la pelota se conserva y se tiene

$$\mathbf{v}'_t = \mathbf{v}_t = 0.500v \uparrow$$

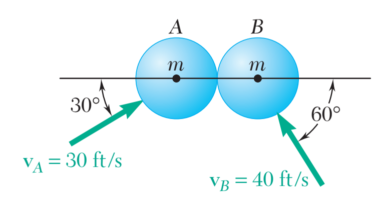
Movimiento perpendicular hacia la pared. Puesto que la masa de la pared (y la tierra) es esencialmente infinita, expresar que la cantidad de movimiento total de la pelota y la pared se conserva, no produciría información útil. Al utilizar la relación (13.49) entre las velocidades relativas, se escribe

$$0 - v'_n = e(v_n - 0)$$
$$v'_n = -0.90(0.866v) = -0.779v \qquad \mathbf{v}'_n = 0.779v \leftarrow$$

Movimiento resultante. Al sumar vectorialmente las componentes $\mathbf{v}'_n$ y $\mathbf{v}'_t$,

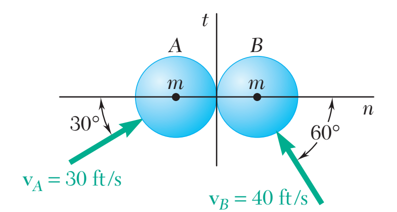
$$\mathbf{v}' = 0.926v \measuredangle 32.7° \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 13.15



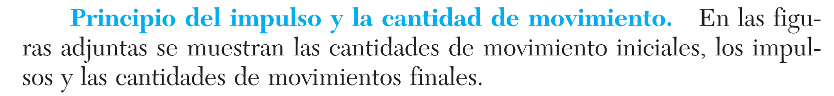
La magnitud y dirección de las velocidades de dos pelotas idénticas sin fricción antes de que choquen entre sí son como se indica en la figura. Suponiendo que $e = 0.90$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de cada pelota después del impacto.

SOLUCIÓN

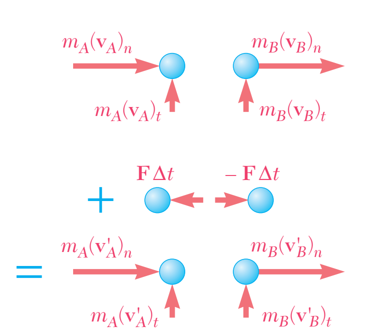


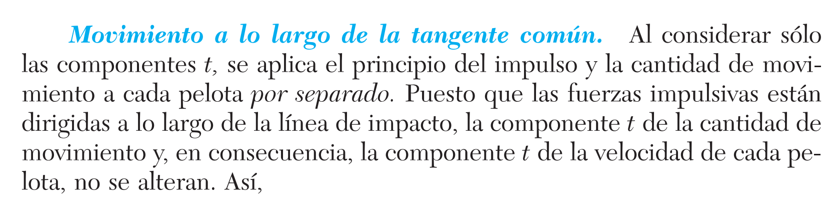
Las fuerzas impulsivas que las pelotas ejercen entre sí durante el impacto están dirigidas a lo largo de la línea que une los centros de las pelotas y que recibe el nombre de *línea de impacto.* Al descomponer las velocidades en las componentes dirigidas, respectivamente, a lo largo de la línea de impacto y a lo largo de la tangente común a las superficies en contacto, se escribe

$$(v_A)_n = v_A \cos 30° = +26.0 \text{ ft/s}$$
$$(v_A)_t = v_A \operatorname{sen} 30° = +15.0 \text{ ft/s}$$
$$(v_B)_n = -v_B \cos 60° = -20.0 \text{ ft/s}$$
$$(v_B)_t = v_B \operatorname{sen} 60° = +34.6 \text{ ft/s}$$



Principio del impulso y la cantidad de movimiento. En las figuras adjuntas se muestran las cantidades de movimiento iniciales, los impulsos y las cantidades de movimientos finales.



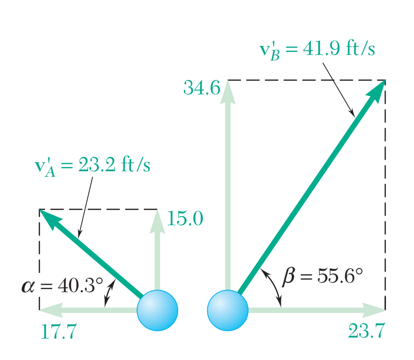


Movimiento a lo largo de la tangente común. Al considerar sólo las componentes t, se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada pelota *por separado.* Puesto que las fuerzas impulsivas están dirigidas a lo largo de la línea de impacto, la componente t de la cantidad de movimiento y, en consecuencia, la componente t de la velocidad de cada pelota, no se alteran. Así,

$$(\mathbf{v}'_A)_t = 15.0 \text{ ft/s} \uparrow \qquad (\mathbf{v}'_B)_t = 34.6 \text{ ft/s} \uparrow$$

Movimiento a lo largo de la línea de impacto. En la dirección n, se considera a las dos pelotas como un solo sistema y se nota que por la tercera ley de Newton, los impulsos internos son, respectivamente, $\mathbf{F}\,\Delta t$ y $-\mathbf{F}\,\Delta t$ y se cancelan. De tal modo, se escribe que la cantidad de movimiento total de las pelotas se conserva

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n$$
$$m(26.0) + m(-20.0) = m(v'_A)_n + m(v'_B)_n$$
$$(v_A)_n + (v'_B)_n = 6.0 \qquad (1)$$



Si se utiliza la relación (13.49) entre velocidades relativas, se escribe

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$
$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = (0.90)[26.0 - (-20.0)]$$
$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = 41.4 \qquad (2)$$

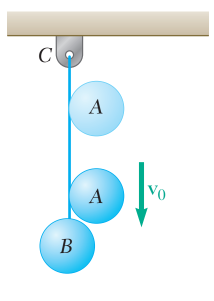
Al resolver las ecuaciones (1) y (2) de manera simultánea, se obtiene

$$(v'_A)_n = -17.7 \qquad (v'_B)_n = +23.7$$
$$(\mathbf{v}'_A)_n = 17.7 \text{ ft/s} \leftarrow \qquad (\mathbf{v}'_B)_n = 23.7 \text{ ft/s} \rightarrow$$

Movimiento resultante. Al sumar vectorialmente las componentes de la velocidad de cada pelota, se obtiene

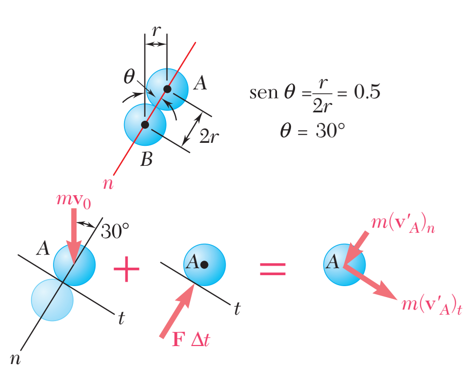
$$\mathbf{v}'_A = 23.2 \text{ ft/s} \nwarrow 40.3° \qquad \mathbf{v}'_B = 41.9 \text{ ft/s} \nearrow 55.6° \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 13.16



La pelota B cuelga de una cuerda inextensible BC. Una pelota idéntica A se suelta desde el reposo cuando apenas toca la cuerda y adquiere una velocidad $\mathbf{v}_0$ antes de chocar con la pelota B. Suponiendo un impacto perfectamente elástico ($e = 1$) y ninguna fricción, determine la velocidad de cada pelota inmediatamente después del impacto.

SOLUCIÓN



Puesto que la pelota B está restringida a moverse en un círculo de centro C, su velocidad $\mathbf{v}_B$ después del impacto debe ser horizontal. En consecuencia, el problema implica tres incógnitas: la magnitud v'_B de la velocidad de B y la magnitud y dirección de la velocidad $\mathbf{v}'_A$ de A después del impacto.

Principio del impulso-cantidad: pelota *A*

$$m\mathbf{v}_A + \mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}'_A$$

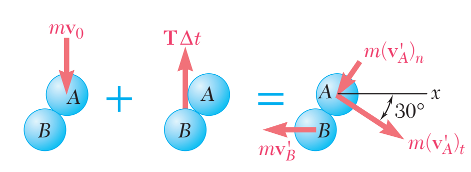
$+\searrow$ componentes t:

$$mv_0 \text{ sen } 30° + 0 = m(v'_A)_t$$

$$(v'_A)_t = 0.5v_0 \qquad (1)$$

Observe que la ecuación utilizada expresa la conservación de la cantidad de movimiento de la pelota A a lo largo de la tangente común a las pelotas A y B.

Principio del impulso-cantidad de movimiento: pelotas *A* y *B*



$$m\mathbf{v}_A + \mathbf{T}\,\Delta t = m\mathbf{v}'_A + m\mathbf{v}'_B$$

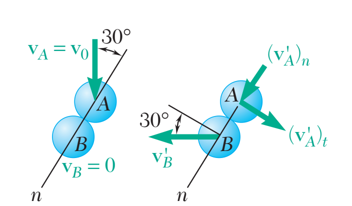
$\xrightarrow{+}$ componentes x:

$$0 = m(v'_A)_t \cos 30° - m(v'_A)_n \text{ sen } 30° - mv'_B$$

Observe que la ecuación obtenida expresa la conservación de la cantidad de movimiento total en la dirección x. Al sustituir $(v'_A)_t$ de la ecuación (1) y reagrupar términos, se escribe

$$0.5(v'_A)_n + v'_B = 0.433v_0 \qquad (2)$$

Velocidades relativas a lo largo de la línea de impacto. Puesto que $e = 1$, la ecuación (13.49) produce

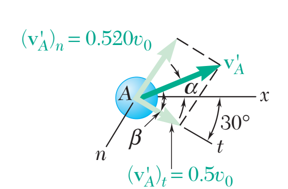


$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = (v_A)_n - (v_B)_n$$
$$v'_B \text{ sen } 30° - (v'_A)_n = v_0 \cos 30° - 0$$
$$0.5v'_B - (v'_A)_n = 0.866v_0 \qquad (3)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (2) y (3), se obtiene

$$(v'_A)_n = -0.520v_0 \qquad v'_B = 0.693v_0$$

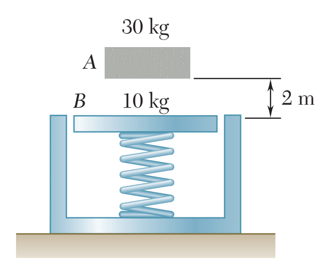
$$\mathbf{v}'_B = 0.693v_0 \leftarrow \blacktriangleleft$$



Al recordar la ecuación (1) se realiza el dibujo adjunto y se obtiene por trigonometría

$$v'_A = 0.721v_0 \qquad \beta = 46.1° \qquad \alpha = 46.1° - 30° = 16.1°$$

$$\mathbf{v}'_A = 0.721v_0 \measuredangle 16.1° \blacktriangleleft$$

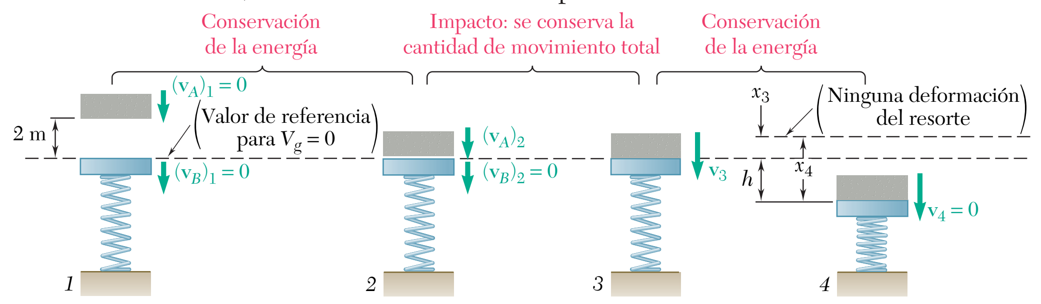


PROBLEMA RESUELTO 13.17

Un bloque de 30 kg se deja caer desde una altura de 2 m sobre el plato de 10 kg de una balanza de resorte. Suponiendo que el impacto es perfectamente plástico, determine el desplazamiento máximo del plato. La constante de resorte es $k = 20$ kN/m.

SOLUCIÓN

El impacto entre el bloque y el plato *debe* tratarse por separado; por lo tanto, se divide la solución en tres partes.



Conservación de la energía. Bloque: $W_A = (30 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 294$ N

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 = 0 \qquad V_1 = W_A y = (294 \text{ N})(2 \text{ m}) = 588 \text{ J}$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 \qquad V_2 = 0$$
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \quad 0 + 588 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 + 0$$
$$(v_A)_2 = +6.26 \text{ m/s} \qquad (\mathbf{v}_A)_2 = 6.26 \text{ m/s}\downarrow$$

Impacto: conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que el impacto es perfectamente plástico, $e = 0$; el bloque y el plato se mueven juntos después del impacto.

$$m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = (m_A + m_B)v_3$$
$$(30 \text{ kg})(6.26 \text{ m/s}) + 0 = (30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})v_3$$
$$v_3 = +4.70 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_3 = 4.70 \text{ m/s}\downarrow$$

Conservación de la energía. Inicialmente el resorte sostiene al peso W_B del plato; en consecuencia, la deformación inicial del resorte es

$$x_3 = \frac{W_B}{k} = \frac{(10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = \frac{98.1 \text{ N}}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = 4.91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Al denotar por x_4 la deformación máxima total del resorte, se escribe

$$T_3 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})(4.70 \text{ m/s})^2 = 442 \text{ J}$$
$$V_3 = V_g + V_e = 0 + \tfrac{1}{2}kx_3^2 = \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)(4.91 \times 10^{-3})^2 = 0.241 \text{ J}$$
$$T_4 = 0$$
$$V_4 = V_g + V_e = (W_A + W_B)(-h) + \tfrac{1}{2}kx_4^2 = -(392)h + \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

Al advertir que el desplazamiento del plato es $h = x_4 - x_3$ se escribe

$$T_3 + V_3 = T_4 + V_4:$$
$$442 + 0.241 = 0 - 392(x_4 - 4.91 \times 10^{-3}) + \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$
$$x_4 = 0.230 \text{ m} \qquad h = x_4 - x_3 = 0.230 \text{ m} - 4.91 \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$h = 0.225 \text{ m} \qquad h = 225 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudia el *impacto de dos cuerpos,* esto es, el choque que ocurre en un intervalo muy pequeño. Se resolverá un gran número de problemas de impacto al expresar que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos y al advertir la relación que existe entre las velocidades relativas de los cuerpos antes y después del impacto.

1. Como primer paso en la solución debe elegir y dibujar los siguientes ejes de coordenadas: el eje t, el cual es tangente a las superficies de contacto de los dos cuerpos que chocan, y el eje n, que es normal a las superficies de contacto y define la *línea de impacto.* En todos los problemas de esta lección la línea de impacto pasa por los centros de masa de los cuerpos que chocan, y el impacto se refiere a un *impacto central.*

2. El siguiente paso es dibujar un diagrama en el que se muestran las cantidades de movimiento de los cuerpos antes del impacto, los impulsos ejercidos sobre los cuerpos durante el impacto y las cantidades de movimiento finales de los cuerpos luego del impacto (figura 13.24). Después se observará si el impacto es un *impacto central directo* o un *impacto central oblicuo.*

3. Impacto central directo. Ocurre cuando las velocidades de los cuerpos A y B antes del impacto *están dirigidas a lo largo de la línea de impacto* (figura 13.20*a*).

a) Conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que las fuerzas impulsivas son internas al sistema, es posible escribir que *la cantidad de movimiento total de* A y B *se conserva,*

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \qquad (13.37)$$

donde v_A y v_B denotan las velocidades de los cuerpos A y B antes del impacto y v'_A y v'_B denotan sus velocidades después del impacto.

b) Coeficiente de restitución. También es posible escribir la siguiente relación entre las *velocidades relativas* de los dos cuerpos antes y después del impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \qquad (13.43)$$

donde e es el coeficiente de restitución entre los dos cuerpos.

Hay que observar que las ecuaciones (13.37) y (13.43) son ecuaciones escalares que pueden resolverse para dos incógnitas. Además, es necesario tener cuidado y adoptar una convención de signos consistente para todas las velocidades.

4. Impacto central oblicuo. Ocurre cuando *una o ambas* de las velocidades iniciales de los cuerpos *no está dirigida* a lo largo de la línea de impacto (figura 13.20*b*). Para resolver problemas de este tipo, es necesario *descomponer primero en componentes* a lo largo del eje t y del eje n las cantidades de movimiento y los impulsos indicados en el diagrama.

(*continúa*)

a) Conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que las fuerzas impulsivas actúan a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n, se conserva la componente a lo largo del eje t de la cantidad de movimiento *de cada cuerpo.* Por lo tanto, es posible escribir para cada cuerpo que las componentes t de su velocidad antes y después del impacto son iguales,

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \qquad (v_B)_t = (v'_B)_t \tag{13.47}$$

Además, la componente a lo largo del eje n de la *cantidad de movimiento total* del sistema se conserva,

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \tag{13.48}$$

b) Coeficiente de restitución. La relación entre las velocidades relativas de los dos cuerpos antes y después del impacto puede escribirse sólo en la dirección n,

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{13.49}$$

Ahora se cuenta con cuatro ecuaciones que es posible resolver para cuatro incógnitas. Observe que después de encontrar todas las velocidades, es factible determinar el impulso ejercido por el cuerpo A sobre el cuerpo B dibujando un diagrama de impulso-cantidad de movimiento sólo para B e igualando las componentes en la dirección n.

c) Cuando está restringido el movimiento de uno de los cuerpos que choca, es necesario incluir los impulsos de las fuerzas externas en el diagrama dibujado. En esas condiciones se observará que algunas de las relaciones anteriores no se cumplen. Sin embargo, en el ejemplo que se muestra en la figura 13.26 la cantidad de movimiento total del sistema se conserva en una dirección perpendicular al impulso externo. Es necesario advertir que cuando el cuerpo A rebota en una superficie fija B la única ecuación de conservación de la cantidad de movimiento que puede utilizarse es la primera de las ecuaciones (13.47) [problema resuelto 13.14].

5. Hay que recordar que se pierde energía durante la mayoría de los impactos. La única excepción corresponde a los *impactos perfectamente elásticos* ($e = 1$), donde se conserva la energía. De tal modo, en el caso general de impacto, donde $e < 1$, la energía no se conserva. Por lo tanto, es necesario tener cuidado y *no aplicar* el principio de conservación de la energía en una situación de impacto. En vez de eso, aplique este principio por separado a los movimientos precedentes y siguientes al impacto [problema resuelto 13.17].

Problemas

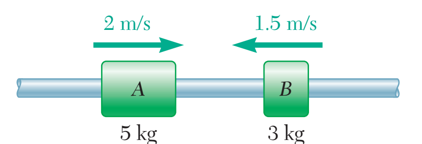


Figura P13.155

13.155 Se sabe que el coeficiente de restitución entre dos collarines es de 0.80. Determine *a*) sus velocidades después del impacto, *b*) la energía perdida durante el impacto.

13.156 Los collarines *A* y *B*, de la misma masa *m*, se mueven uno hacia el otro con las velocidades que se indican. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los collarines es 0 (impacto plástico), demuestre que después del impacto *a*) la velocidad común de los collarines es igual a la mitad de la diferencia de sus velocidades antes del impacto, *b*) la pérdida en la energía cinética es $\frac{1}{4}m(v_A + v_B)^2$.

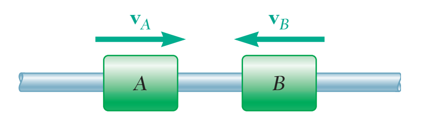


Figura P13.156

13.157 Dos bloques de acero se deslizan sin fricción sobre una superficie horizontal con las velocidades que se muestran en la figura. Si se observa que después del impacto la velocidad del bloque *B* es de 10.5 ft/s hacia la derecha, determine el coeficiente de restitución entre los dos bloques.

13.158 Dos bloques de acero se deslizan sin fricción sobre una superficie horizontal con las velocidades que se muestran en la figura. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos bloques es de 0.75, determine *a*) las velocidades de cada bloque después del impacto, *b*) la pérdida de energía cinética debida el impacto.

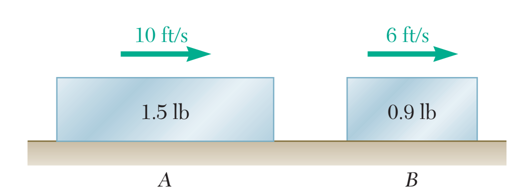


Figura P13.157 y P13.158

13.159 Dos automóviles idénticos *A* y *B* están en reposo sobre un muelle de descarga, sin que actúen los frenos. El automóvil *C*, de estilo un poco diferente pero del mismo peso, ha sido empujado por los trabajadores del muelle y golpea al automóvil *B* con una velocidad de 1.5 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución es de 0.8 entre *B* y *C* y 0.5 entre *A* y *B*, determine la velocidad de cada automóvil después de que han ocurrido los choques.

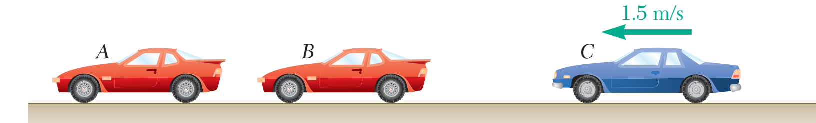


Figura P13.159

13.160 Tres esferas de acero de igual masa se suspenden del techo mediante cuerdas de la misma longitud que están espaciadas a una distancia ligeramente mayor que el diámetro de las esferas. Después de jalarla y soltarla, la esfera *A* golpea a la esfera *B*, la cual luego golpea a la esfera *C*. Si se denota por *e* el coeficiente de restitución entre las esferas y por $\mathbf{v}_0$ la velocidad de *A* justo antes de que golpee a *B*, determine, *a*) las velocidades de *A* y *B* inmediatamente después del primer choque, *b*) las velocidades de *B* y *C* inmediatamente después del segundo choque. *c*) Si ahora se supone que se suspenden *n* esferas del techo y que la primera se jala y suelta como se describió, determine la velocidad de la última esfera después de que recibe el primer golpe. *d*) Utilice el resultado del inciso *c*) para obtener la velocidad de la última esfera cuando $n = 6$ y $e = 0.95$.

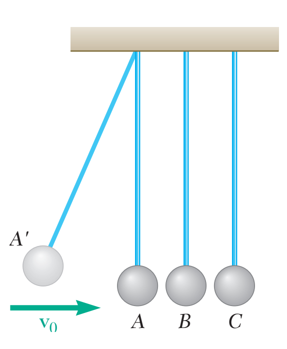


Figura P13.160

13.161 Dos discos que se deslizan sobre un plano horizontal sin fricción con velocidades opuestas de la misma magnitud v_0 chocan entre sí de manera frontal. Se sabe que el disco *A* tiene una masa de 3 kg y se observa que su velocidad es cero después del impacto. Determine *a*) la masa del disco *B* si se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos discos es de 0.5, *b*) el intervalo de posibles valores de la masa del disco *B* si se desconoce el coeficiente de restitución entre los dos discos.

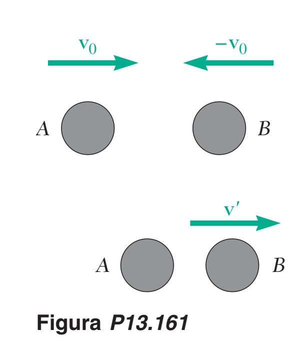


Figura *P13.161*

13.162 Los paquetes de una fábrica de refacciones para automóviles se transportan hacia el muelle de descarga empujándolos a lo largo de una pista de rodillos con muy poca fricción. En el instante que se indica los paquetes *B* y *C* se encuentran en reposo y el paquete *A* tiene una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los paquetes es de 0.3, determine *a*) la velocidad del paquete *C* después de que *A* golpea a *B* y *B* golpea a *C*, *b*) la velocidad de *A* después de que éste golpea a *B* por segunda vez.

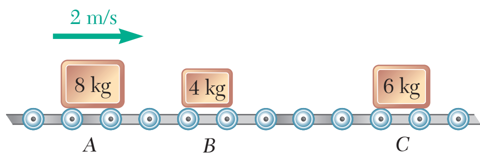


Figura *P13.162*

13.163 Uno de los requerimientos para que se utilicen pelotas de tenis en una competencia oficial es que, cuando se dejen caer sobre una superficie rígida desde una altura de 100 in., la altura del primer rebote de la pelota debe estar en el intervalo 53 in. $\leq h \leq$ 58 in. Determine el intervalo del coeficiente de restitución de las pelotas de tenis que cumpla con este requisito.

13.164 Demuestre que para una pelota que golpea una superficie fija sin fricción, $\alpha > \theta$. También demuestre que el porcentaje perdido en energía cinética debido al impacto es $100(1 - e^2) \cos^2 \theta$.

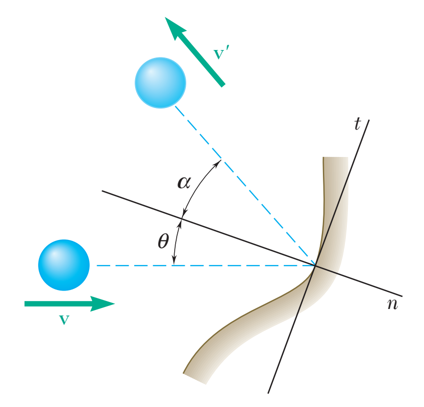


Figura P13.164

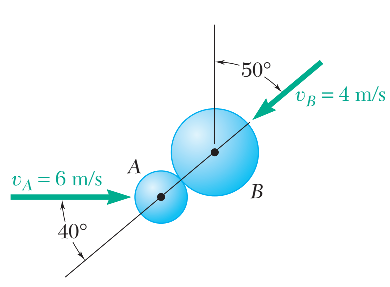


Figura P13.165

13.165 Una pelota *A* de 600 g que se mueve a una velocidad con magnitud de 6 m/s golpea, como se muestra en la figura, a una pelota *B* de 1 kg que tiene una velocidad con magnitud de 4 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución es de 0.8 y se supone que no hay fricción, determine la velocidad de cada pelota después del impacto.

13.166 Dos discos de hockey idénticos se mueven sobre una pista a la misma rapidez de 3 m/s en direcciones paralelas y opuestas cuando chocan entre sí en la forma indicada. Si se supone un coeficiente de restitución $e = 1$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de cada disco después del impacto.

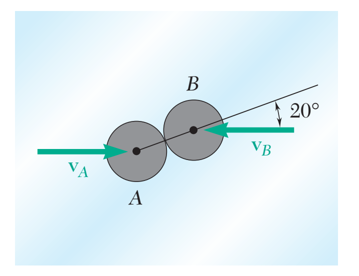


Figura P13.166

13.167 Dos bolas de billar idénticas con un diámetro de 2.37 in., pueden moverse libremente sobre una mesa de billar. La bola B se encuentra en reposo y la bola A tiene una velocidad inicial $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$. *a*) Si se sabe que $b = 2$ in. y $e = 0.7$, determine la velocidad de cada bola después del impacto. *b*) Demuestre que si $e = 1$, las velocidades finales de las bolas forman un ángulo recto para todos los valores de b.

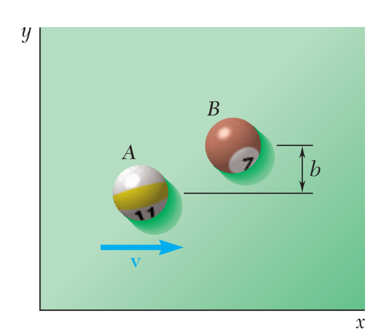


Figura P13.167

13.168 El coeficiente de restitución entre dos bolas de billar A y B de 2.37 in. de diámetro es igual a 0.9. La bola A se mueve en la dirección indicada con una velocidad de 3 ft/s cuando golpea a la bola B, que está en reposo. Si se sabe que después del impacto B se mueve en la dirección x, determine *a*) el ángulo θ, *b*) la velocidad de B después del impacto.

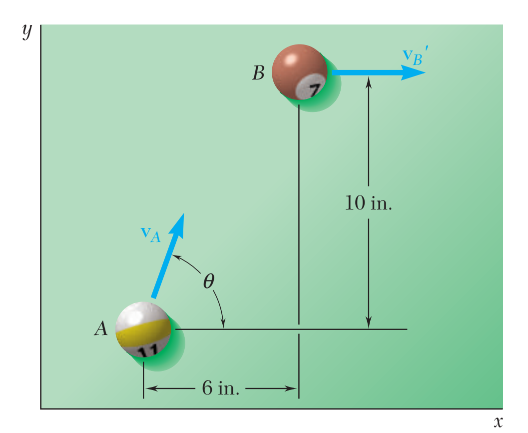


Figura P13.168

13.169 Un muchacho ubicado en A, que es el punto medio entre el centro O de una pared semicircular y la propia pared, lanza una pelota hacia la pared en una dirección que forma un ángulo de 45° con OA. Si se sabe que después de golpear la pared la pelota rebota en una dirección paralela a OA, determine el coeficiente de restitución entre la pelota y la pared.

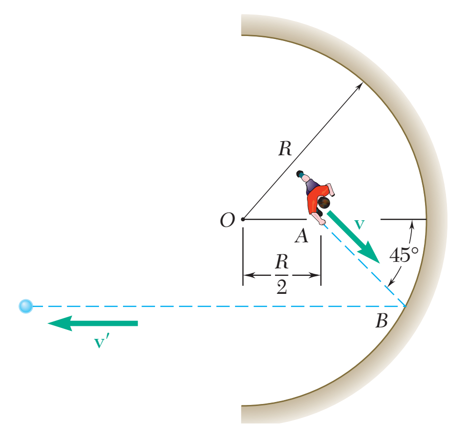


Figura P13.169

13.170 Una niña lanza una pelota en una pared inclinada desde una altura de 1.2 m, golpeando la pared en *A* con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$ de 15 m/s de magnitud. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la pelota y la pared es de 0.9 y se ignora la fricción, determine la distancia *d* desde el pie de la pared hasta el punto *B* donde la pelota golpea el suelo después de rebotar en la pared.

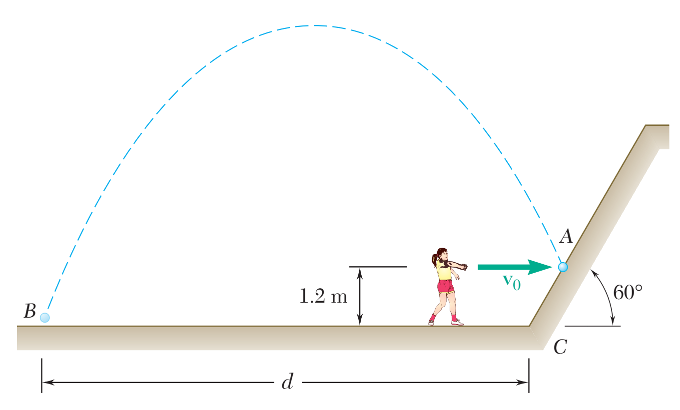


Figura P13.170

13.171 Una pelota golpea el suelo en *A* con una velocidad $\mathbf{v}_0$ de 16 ft/s a un ángulo de 60° con la horizontal. Si se sabe que $e = 0.6$ entre la pelota y el suelo y que después del rebote la pelota llega al punto *B* con una velocidad horizontal, determine *a*) las distancias *h* y *d*, *b*) la velocidad de la pelota cuando llega a *B*.

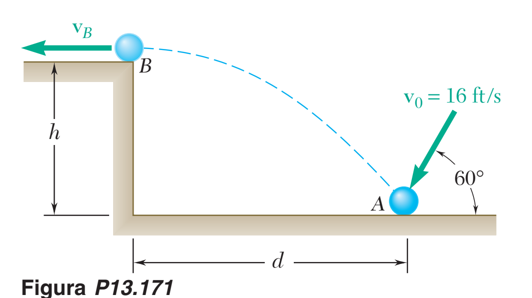


Figura *P13.171*

13.172 Una esfera rebota como se muestra en la figura, después de golpear un plano inclinado con una velocidad vertical $\mathbf{v}_0$ de magnitud $v_0 =$ 15 ft/s. Si se sabe que $\alpha = 30°$ y $e = 0.8$ entre la esfera y el plano, determine la altura *h* que alcanza la esfera.

13.173 Una esfera rebota como se muestra en la figura, después de golpear un plano inclinado con una velocidad vertical $\mathbf{v}_0$ de magnitud $v_0 =$ 20 ft/s. Determine el valor de α que maximizará la distancia horizontal que recorre la pelota antes de alcanzar su máxima altura *h* suponiendo que el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo es *a*) $e = 1$, *b*) $e = 0.8$.

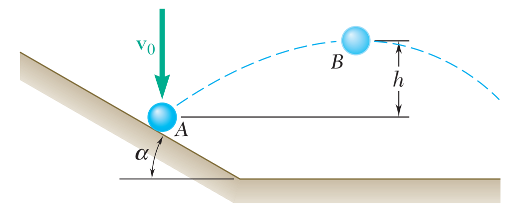


Figura *P13.172* y P13.173

13.174 Un bloque B de 1 kg se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$ de magnitud $v_0 = 2$ m/s cuando golpea una esfera A de 0.5 kg, la cual está en reposo y cuelga de una cuerda amarrada en O. Si se sabe que $\mu_k = 0.6$ entre el bloque y la superficie horizontal y que $e = 0.8$ entre el bloque y la esfera, determine después del impacto, *a*) la altura máxima h alcanzada por la esfera, *b*) la distancia x recorrida por el bloque.

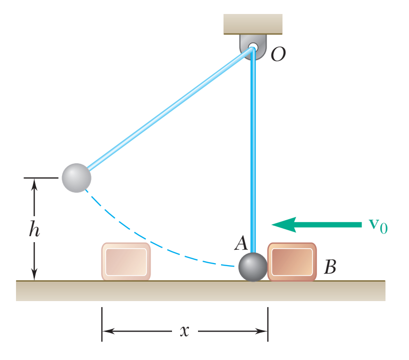


Figura P13.174

13.175 Un bloque B de 1.5 kg está unido a un resorte no deformado de constante $k = 80$ N/m y está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción cuando lo golpea un bloque idéntico A que se mueve a una rapidez de 5 m/s. Considerando de manera sucesiva los casos en los que el coeficiente de restitución entre los dos bloques es 1) $e = 1$, 2) $e = 0$, determine *a*) la deflexión máxima del resorte, *b*) la velocidad final del bloque A.

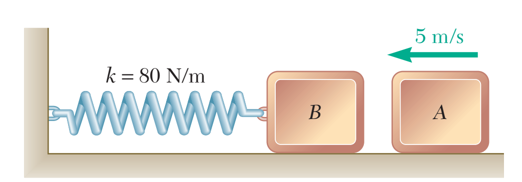


Figura P13.175

13.176 El bloque A se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo sobre la superficie sin fricción de B hasta que golpea un tope en el extremo derecho de B. El bloque A tiene una masa de 10 kg y el objeto B tiene una masa de 30 kg, además B puede rodar libremente sobre el suelo. Determine las velocidades de A y B inmediatamente después del impacto cuando *a*) $e = 0$, *b*) $e = 0.7$.

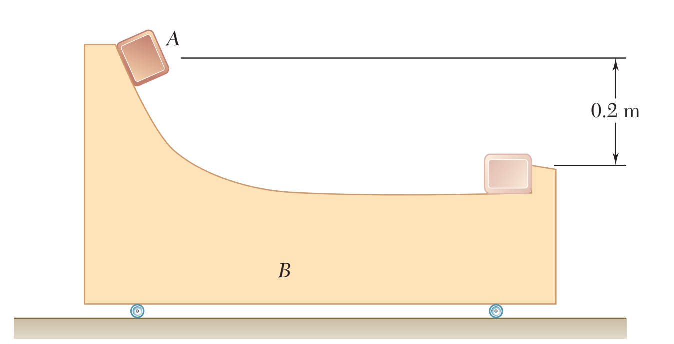


Figura P13.176

13.177 Una pelota de 90 g que se lanza con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$ golpea una placa de 720 g empotrada en una pared vertical a una altura de 900 mm sobre el suelo. Se observa que, después del rebote, la pelota golpea el suelo a una distancia de 480 mm de la pared cuando la placa está unida rígidamente a la pared (figura 1) y a una distancia de 220 mm cuando entre la placa y la pared se coloca un colchón de caucho (figura 2). Determine *a*) el coeficiente de restitución e entre la pelota y la placa, *b*) la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, de la pelota.

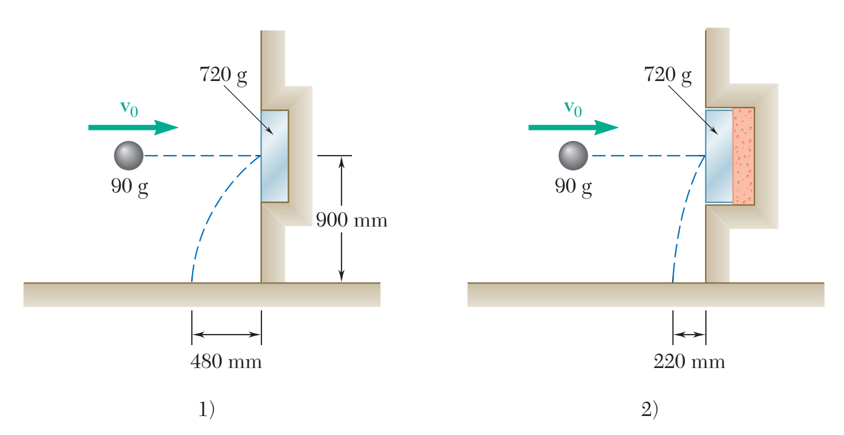


Figura P13.177

13.178 Una esfera A de 1.3 lb se deja caer desde una altura de 1.8 ft sobre una placa B de 2.6 lb, la cual se sostiene mediante un conjunto de resortes entrelazados y está inicialmente en reposo. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la esfera y la placa es $e = 0.8$, determine *a*) la altura h que alcanza la esfera después del rebote, *b*) la constante k de un solo resorte que sea equivalente al conjunto dado si se observó que la máxima deflexión de la placa es igual a $3h$.

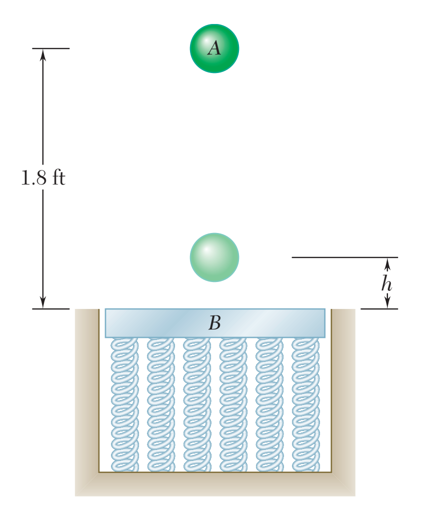


Figura P13.178 y P13.179

13.179 Una esfera A de 1.3 lb se deja caer desde una altura de 1.8 ft sobre una placa B de 2.6 lb, la cual se sostiene mediante un conjunto de resortes entrelazados y está inicialmente en reposo. Si se sabe que el conjunto de resortes es equivalente a un solo resorte de constante $k = 5$ lb/in., determine *a*) el valor del coeficiente de restitución entre la esfera y la placa para el cual la altura h que alcanza la esfera después de rebotar es máxima, *b*) el valor correspondiente de h, *c*) el valor correspondiente de la deflexión máxima de la placa.

13.180 Dos automóviles de la misma masa chocan frontalmente en el punto C. Después del choque, los automóviles patinan con los frenos aplicados y se detienen en la posición que se indica en la parte inferior de la figura. Si se sabe que la rapidez del automóvil A justo antes del impacto era de 5 mi/h y que el coeficiente de fricción cinética entre el pavimento y los neumáticos de ambos automóviles es de 0.30, determine *a*) la rapidez del automóvil B justo antes del impacto, *b*) el coeficiente de restitución efectivo entre los dos automóviles.

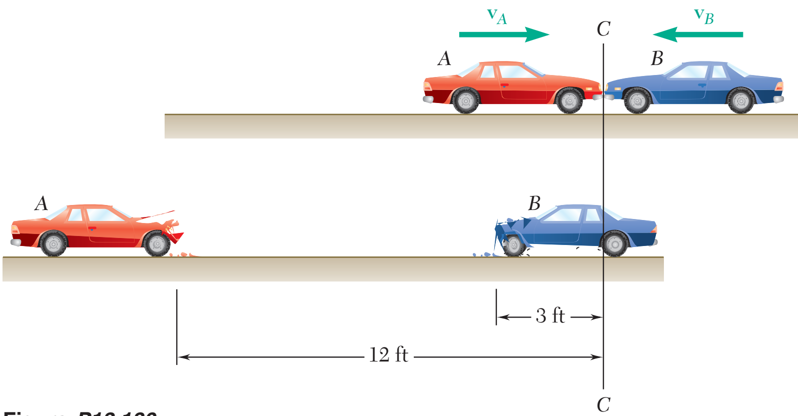


Figura *P13.180*

13.181 Cada uno de los bloques A y B tiene una masa de 0.8 lb y la masa del bloque C es igual a 2.4 lb. El coeficiente de fricción entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.30$. En un principio el bloque A se mueve a una rapidez $v_0 = 15$ ft/s y el bloque B y el C están en reposo (figura 1). Después de que A choca con B y B choca con C, los tres bloques quedan en reposo en la posición indicada (figura 2). Determine *a*) los coeficientes de restitución entre A y B y entre B y C, *b*) el desplazamiento x del bloque C.

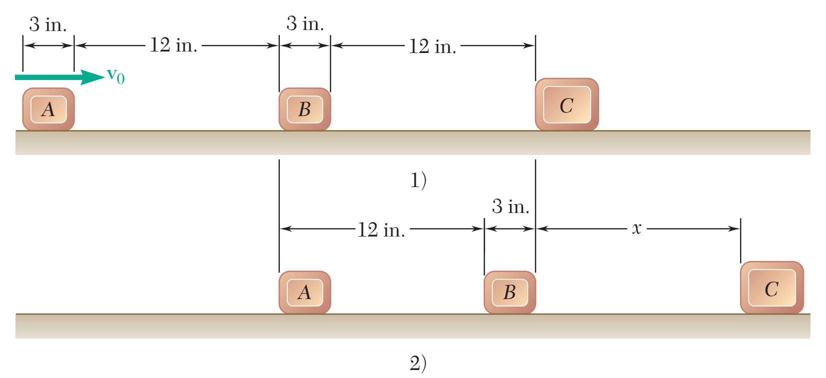


Figura *P13.181*

13.182 Los tres bloques que se muestran son idénticos. Los bloques B y C están en reposo cuando al bloque B golpea el bloque A, el cual se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_A$ de 3 ft/s. Luego del impacto, que se supone perfectamente plástico ($e = 0$), la velocidad de los bloques A y B disminuye debido a la fricción, mientras que el bloque C adquiere rapidez, hasta que los tres bloques se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}$. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es $\mu_k = 0.20$, determine *a*) el tiempo requerido para que los tres bloques alcancen la misma velocidad, *b*) la distancia total recorrida por cada bloque durante ese tiempo.

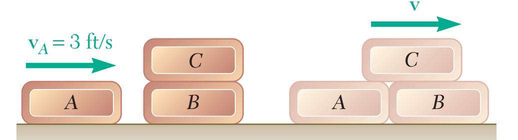


Figura *P13.182*

13.183 Después de haber sido empujado por el empleado de una aerolínea, un carrito de equipaje A vacío de 40 kg golpea un carrito B idéntico con una velocidad de 5 m/s, el cual contiene una maleta de 15 kg equipada con ruedas. El impacto causa que la maleta ruede hacia la pared izquierda del carrito B. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos carritos es de 0.80 y que el coeficiente de restitución entre la maleta y la pared del carrito es de 0.30, determine *a*) la velocidad del carrito B después de que la maleta golpea la pared por primera vez, *b*) la energía total perdida en el impacto.

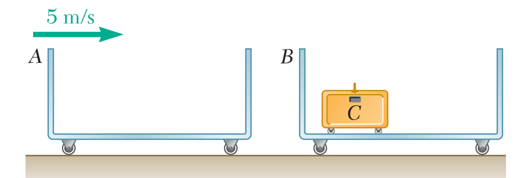


Figura P13.183

13.184 Una bala de 20 g se dispara contra un bloque de madera de 4 kg que está suspendido de las cuerdas AC y BD, penetra el bloque en el punto E, a la mitad entre C y D, sin que golpee a la cuerda BD. Determine *a*) la altura máxima h a la cual el bloque y la bala incrustada oscilarán después del impacto, *b*) el impulso total ejercido sobre el bloque por las dos cuerdas durante el impacto.

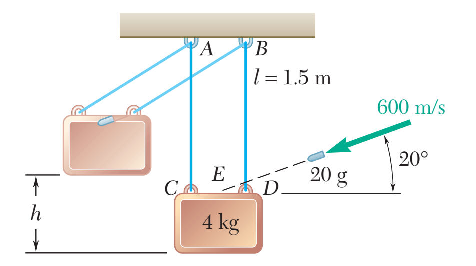


Figura P13.184

13.185 Una pelota B de 70 g que se deja caer desde una altura $h_0 = 1.5$ m alcanza una altura $h_2 = 0.25$ m después de rebotar dos veces en placas idénticas de 210 g. La placa A descansa directamente sobre suelo duro, mientras que la placa C lo hace sobre un colchón de caucho. Determine *a*) el coeficiente de restitución entre la pelota y las placas, *b*) la altura h_1 del primer rebote de la pelota.

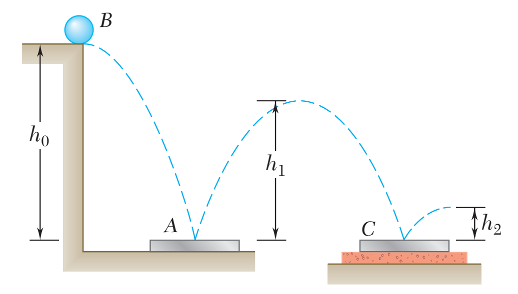


Figura P13.185

13.186 La pelota B cuelga de una cuerda inextensible. Una pelota idéntica A se suelta desde el reposo cuando justo toca la cuerda y cae a través de la distancia vertical $h_A = 8$ in. antes de golpear la pelota B. Si se supone que $e = 0.9$ y se considera que no hay fricción, determine el desplazamiento vertical máximo resultante h_B de la bola B.

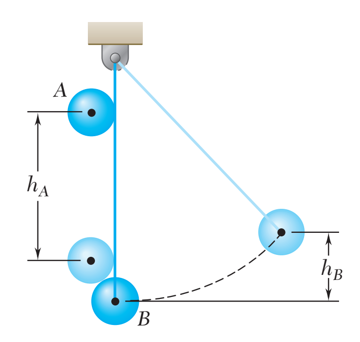


Figura *P13.186*

13.187 Una esfera A de 700 g que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$ paralela al suelo incide sobre la cara inclinada de una cuña B de 2.1 kg, la cual puede rodar libremente sobre el suelo y se encuentra en un principio en reposo. Después del impacto se observa desde el suelo que la esfera se mueve hacia arriba en línea recta. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la esfera y la cuña es $e = 0.6$, determine *a*) el ángulo θ que la cara inclinada de la cuña forma con la horizontal, *b*) la energía que se pierde debido al impacto.

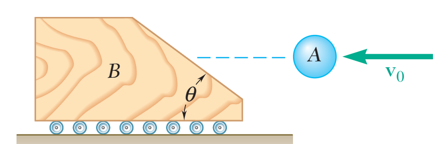


Figura *P13.187*

13.188 Cuando la cuerda que se muestra en la figura está a un ángulo de $\alpha = 30°$ la esfera A de 2 lb tiene una rapidez $v_0 = 2$ ft/s. El coeficiente de restitución entre A y la cuña B de 4 lb es 0.8 y la longitud de la cuerda $l = 3$ ft. La constante del resorte tiene un valor de 100 lb/ft y $\theta = 20°$. Determine la velocidad de A y B inmediatamente después del impacto.

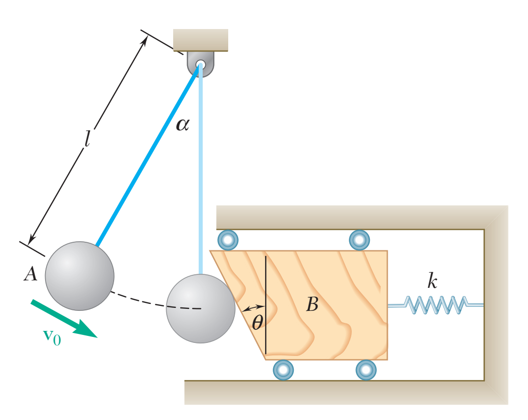


Figura P13.188

13.189 Cuando la cuerda que se muestra en la figura está a un ángulo de $\alpha = 30°$ la esfera A de 0.5 kg tiene una rapidez $v_0 = 1.2$ m/s. El coeficiente de restitución entre A y la cuña B de 0.9 kg es 0.7 y la longitud de la cuerda $l = 0.8$ m. La constante del resorte tiene un valor de 500 N/m y $\theta = 20°$. Determine la velocidad de A y B inmediatamente después del impacto.

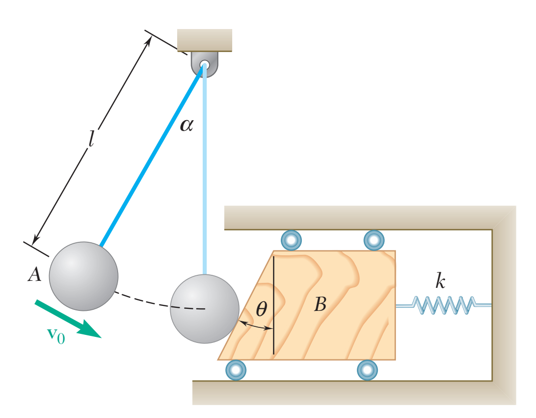


Figura P13.189

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 13

Este capítulo se dedicó al método del trabajo y la energía y al del impulso y la cantidad de movimiento. En la primera mitad del capítulo se estudió el método del trabajo y la energía y su aplicación al análisis del movimiento de las partículas.

Trabajo de una fuerza

Se consideró una fuerza **F** que actuaba sobre una partícula A y se definió *el trabajo de* **F** *correspondiente al pequeño desplazamiento* $d\mathbf{r}$ [sección 13.2] como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.1}$$

o, si se recuerda la definición del producto escalar de dos vectores,

$$dU = F\, ds \cos \alpha \tag{13.1'}$$

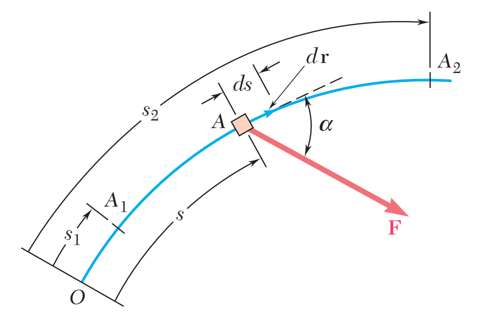


Figura 13.29

donde α es el ángulo entre **F** y $d\mathbf{r}$ (figura 13.29). El trabajo de **F** durante un desplazamiento finito desde A_1 hasta A_2, denotado por $U_{1\rightarrow 2}$, se obtuvo al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula:

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.2}$$

Para una fuerza definida por sus componentes rectangulares, se escribe

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) \tag{13.2''}$$

Trabajo de un peso

El trabajo del peso **W** de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve desde la altura y_1 hasta y_2 (figura 13.30) se obtuvo al sustituir $F_x = F_z = 0$ y $F_y = -W$ en la ecuación (13.2″) e integrar. Se encuentra

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{13.4}$$

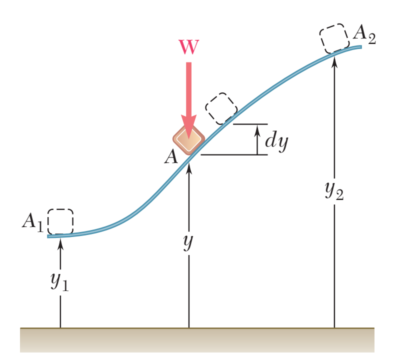


Figura 13.30

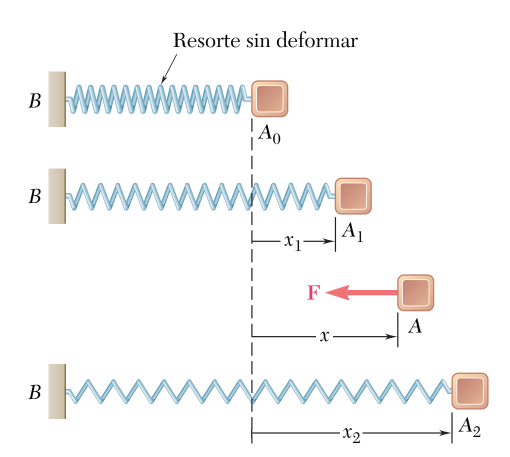


Figura 13.31

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

El trabajo de una fuerza **F** ejercida por un resorte sobre un cuerpo A durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 13.31) desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtuvo al escribir

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (13.6)$$

El trabajo de **F** es por tanto positivo *cuando el resorte regresa a su posición no deformada.*

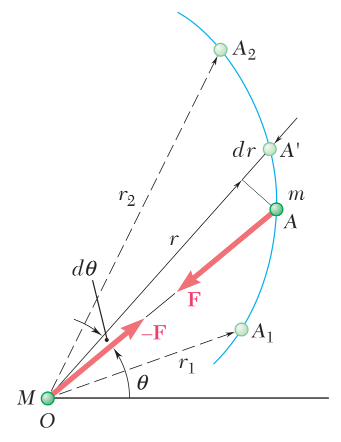


Figura 13.32

Trabajo de la fuerza gravitacional

El *trabajo de la fuerza gravitacional* **F** ejercido por una partícula de masa M localizada en O sobre una partícula de masa m cuando la última se desplaza desde A_1 hasta A_2 (figura 13.32) se obtuvo al recordar de la sección 12.10 la expresión para la magnitud de **F** y al escribir

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \qquad (13.7)$$

Energía cinética de una partícula

La *energía cinética de una partícula* de masa m que se mueve con velocidad **v** [sección 13.3] se definió como la cantidad escalar

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (13.9)$$

De la segunda ley de Newton se dedujo el *principio del trabajo y la energía,* el cual señala que *la cinética de una partícula en* A_2 *puede obtenerse sumando a su energía en* A_1 *el trabajo realizado durante el desplazamiento de* A_1 *a* A_2 *por la fuerza* **F** *ejercida sobre la partícula:*

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad (13.11)$$

El método del trabajo y la energía simplifica la solución de muchos problemas que tienen que ver con fuerzas, desplazamientos y velocidades, ya que no requiere la determinación de aceleraciones [sección 13.4]. Además se advirtió que sólo incluye cantidades escalares y que las fuerzas que no realizan trabajo no necesitan considerarse [problemas resueltos 13.1 y 13.3]. Sin embargo, este método debe complementarse con la aplicación directa de la segunda ley de Newton para determinar una fuerza normal a la trayectoria de la partícula [problema resuelto 13.4].

Método del trabajo y la energía

La potencia desarrollada por una máquina y su eficiencia mecánica se estudiaron en la sección 13.5. La potencia se definió como la tasa en el tiempo a la cual se efectúa el trabajo:

Potencia y eficiencia mecánica

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad (13.12,\ 13.13)$$

donde **F** es la fuerza que se ejerce sobre la partícula y **v** la velocidad de esta misma [problema resuelto 13.5]. La *eficiencia mecánica,* denotada por η, se expresó como

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \qquad (13.15)$$

Cuando el trabajo de una fuerza **F** es independiente de la trayectoria que se sigue [secciones 13.6 y 13.7], se afirma que la fuerza **F** es una *fuerza conservativa,* y que su trabajo es igual al *negativo del cambio en la energía potencial* V asociado con **F**:

Fuerza conservativa. Energía potencial

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \qquad (13.19')$$

Las siguientes expresiones se obtuvieron para la energía potencial asociada con cada una de las fuerzas consideradas antes:

Fuerza de gravedad (peso): $V_g = Wy$ (13.16)

Fuerza gravitacional: $V_g = -\dfrac{GMm}{r}$ (13.17)

Fuerza elástica ejercida por un resorte: $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ (13.18)

Al sustituir $U_{1\rightarrow2}$ de la ecuación (13.19′) en la ecuación (13.11) y reagrupar los términos [sección 13.8], se obtuvo

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{13.24}$$

Principio de la conservación de la energía

Éste es el *principio de la conservación de la energía,* el cual establece que cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de sus energías cinética y potencial permanece constante*. La aplicación de este principio facilita la solución de problemas que incluyen únicamente fuerzas conservativas [problemas resueltos 13.6 y 13.7].

Movimiento bajo una fuerza gravitacional

Al recordar de la sección 12.9 que, cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central **F**, su cantidad de movimiento angular alrededor del centro de fuerza O permanece constante, se señaló [sección 13.9] que, si la fuerza central **F** también es conservativa, es posible utilizar de manera conjunta los principios de la conservación de la cantidad de momento angular y de la conservación de la energía para analizar el movimiento de la partícula [problema resuelto 13.8]. Puesto que la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un vehículo espacial es tanto central como conservativa, se utilizó este enfoque para estudiar el movimiento de tales vehículos [problema resuelto 13.9] y se encontró que era en particular efectivo en el caso de un *lanzamiento oblicuo*. Al considerar la posición inicial P_0 y una posición arbitraria P del vehículo (figura 13.33), se escribió

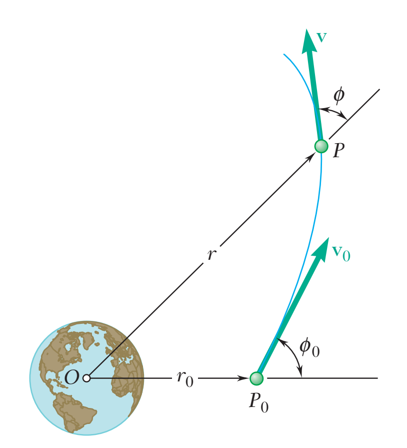


Figura 13.33

$$(H_O)_0 = H_O: \qquad r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r m v \operatorname{sen} \phi \tag{13.25}$$

$$T_0 + V_0 = T + V: \qquad \tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \tag{13.26}$$

donde m fue la masa del vehículo y M la masa de la Tierra.

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula

La segunda mitad del capítulo se dedicó al método del impulso y la cantidad de movimiento y su aplicación a la solución de diversos tipos de problemas que implican el movimiento de partículas.

La *cantidad de movimiento lineal de una partícula* se definió [sección 13.10] como el producto $m\mathbf{v}$ de la masa m de la partícula y su velocidad $\mathbf{v}$. De la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, se dedujo la relación

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 \tag{13.28}$$

donde $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$ representan la cantidad de movimiento de la partícula en un tiempo t_1 y en un tiempo t_2, respectivamente, y donde la integral define el *impulso lineal de la fuerza* **F** durante el intervalo correspondiente. Por lo tanto, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1\rightarrow2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.30}$$

que expresa el principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula.

Cuando la partícula considerada está sujeta a varias fuerzas, es necesario usar la suma de los impulsos de estas fuerzas; se tuvo

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\ \mathbf{Imp}_{1\rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \qquad (13.32)$$

Puesto que las ecuaciones (13.30) y (13.32) implican *cantidades vectoriales,* es necesario considerar por separado sus componentes x y y cuando se aplican a la solución de un problema determinado [problemas resueltos 13.10 y 13.11].

Movimiento por impulso

El método del impulso y de la cantidad de movimiento es en particular efectivo en el estudio del *movimiento impulsivo* de una partícula, cuando fuerzas muy grandes, denominadas *fuerzas impulsivas,* se aplican durante el intervalo Δt, muy corto, ya que este método implica los impulsos $\mathbf{F}\ \Delta t$ de las fuerzas, más que las fuerzas mismas [sección 13.11]. Ignorando el impulso de toda fuerza no impulsiva, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\ \Delta t = m\mathbf{v}_2 \qquad (13.35)$$

En el caso del movimiento impulsivo de varias partículas, se tuvo

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\ \Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \qquad (13.36)$$

donde el segundo término implica sólo fuerzas externas impulsivas [problema resuelto 13.12].

En el caso particular *en el que la suma de los impulsos de las fuerzas externas es cero*, la ecuación (13.36) se reduce a $\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$; esto es, *la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva*.

Impacto central directo

En las secciones 13.12 a 13.14 se consideró el *impacto central* de dos cuerpos que chocan. En el caso de un *impacto central directo* [sección 13.13], los dos cuerpos que chocan A y B se movían a lo largo de la *línea de impacto* con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente (figura 13.34). Podrían usarse dos ecuaciones para determinar sus velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ después del impacto. La primera

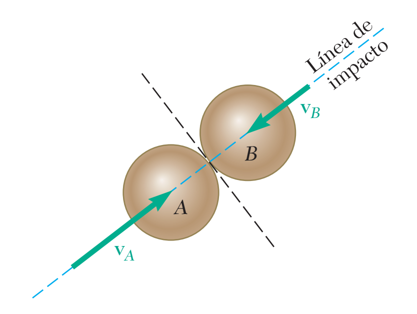


Figura 13.34

expresaba la conservación de la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \qquad (13.37)$$

donde un signo positivo indica que la velocidad correspondiente está dirigida hacia la derecha, en tanto que la segunda relaciona las *velocidades relativas* de los dos cuerpos antes y después del impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \qquad (13.43)$$

La constante e se conoce como el *coeficiente de restitución*; su valor se encuentra entre 0 y 1 y depende en gran medida de los materiales implicados. Cuando $e = 0$, se dice que el impacto es *perfectamente plástico*; cuando $e = 1$, se afirma que es *perfectamente elástico* [problema resuelto 13.13].

Impacto central oblicuo

En el caso de un *impacto central oblicuo* [sección 13.14], las velocidades de los dos cuerpos que chocan antes y después del impacto se descompusieron en las componentes n a lo largo de la línea de impacto y de las componentes t a lo largo de la tangente común a las superficies en contacto (figura 13.35). Se observó que la componente t de la velocidad de cada cuerpo permaneció inalterada, en

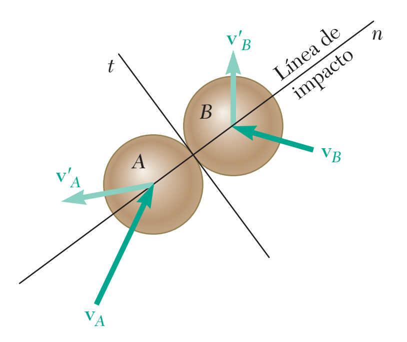


Figura 13.35

tanto que las componentes n satisfacían ecuaciones similares a la (13.37) y a la (13.43) [problemas resueltos 13.14 y 13.15]. Se demostró que aunque este método se desarrolló para cuerpos que se mueven con libertad antes y después del impacto, sería posible extenderlo al caso en el que uno o ambos de los cuerpos que chocan presenta restricciones en su movimiento [problema resuelto 13.16].

Empleo de los tres métodos fundamentales del análisis cinético

En la sección 13.15 se analizaron las ventajas relativas de los tres métodos fundamentales que se presentaron en este capítulo y en el precedente, esto es, la segunda ley de Newton, el trabajo y la energía, y el impulso y la cantidad de movimiento. Se señaló que el método del trabajo y la energía, y el método del impulso y la cantidad de movimiento pueden combinarse para resolver problemas que implican una fase corta de impacto durante la cual las fuerzas impulsivas deben tomarse en cuenta [problema resuelto 13.17].

Problemas de repaso

13.190 Una munición de 2 oz disparada verticalmente con una pistola de resortes en la superficie de la Tierra alcanza una altura de 300 ft. La misma munición disparada con la misma pistola en la superficie de la Luna alcanza una altura de 1 900 ft. Determine la energía disipada por el arrastre aerodinámico cuando la munición se dispara en la superficie de la Tierra. (La aceleración de la gravedad en la Luna es 0.165 veces la de la Tierra.)

13.191 Se desea diseñar un cable elástico para salto de *bungee* desde una torre de 130 ft. Las especificaciones exigen que el cable tenga una longitud de 85 ft cuando está sin deformar y que se estire hasta una longitud total de 100 ft cuando se le amarra un peso de 600 lb y se deja caer desde la torre. Determine *a*) la constante k requerida para el cable, *b*) qué tan cerca del suelo llegará un hombre de 185 lb si utiliza este cable para saltar de la torre.

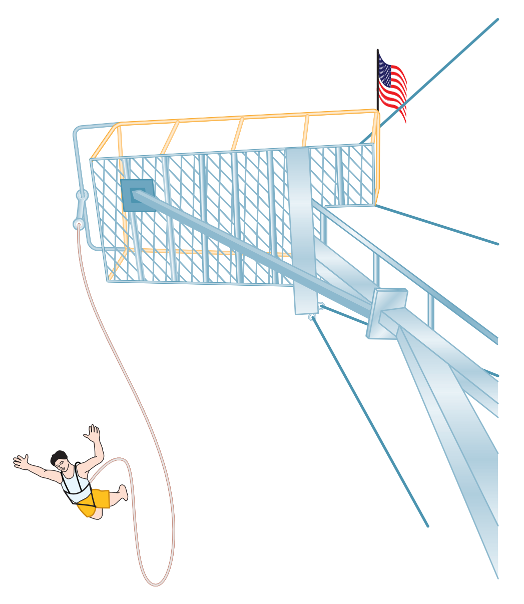


Figura P13.191

13.192 Una esfera hueca de 2 oz hecha de acero está unida a una cuerda de 8 in., puede oscilar alrededor del punto O en un plano vertical. La esfera está sometida a su propio peso y a la fuerza **F** ejercida por un pequeño imán empotrado en el suelo. La magnitud de esa fuerza expresada en libras es $F = 0.1/r^2$, donde r es la distancia expresada en pulgadas desde el imán hasta la esfera. Si la esfera se suelta desde el reposo en A, determine su rapidez cuando pasa por el punto B.

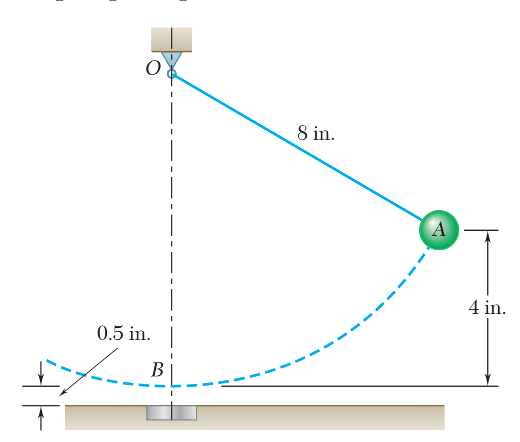


Figura *P13.192*

13.193 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M. Los valores mínimo y máximo de la distancia r desde el satélite hasta el centro del planeta son, respectivamente, r_0 y r_1. Utilice los principios de la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento angular para obtener la relación

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

donde h es la cantidad de movimiento angular por unidad de masa del satélite y G es la constante de gravitación.

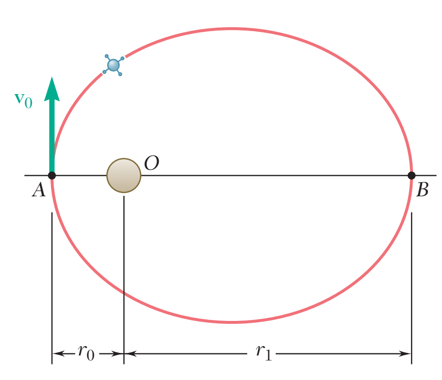


Figura P13.193

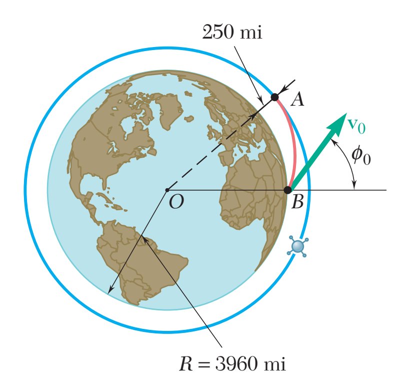


Figura P13.194

13.194 Un transbordador espacial se encontrará con una estación espacial que está en órbita a una altura de 250 mi sobre la superficie de la Tierra. El transbordador ha alcanzado una altura de 40 mi cuando su motor es desactivado en el punto B. Si se sabe que en ese momento la velocidad $\mathbf{v}_0$ del transbordador forma un ángulo $\phi_0 = 55°$ con la vertical, determine la magnitud requerida de $\mathbf{v}_0$ si la trayectoria del transbordador debe ser tangente en A a la órbita de la estación espacial.

13.195 Una bala de 25 g, recubierta con acero, se dispara horizontalmente con una velocidad de 600 m/s hacia una placa de acero y rebota a lo largo de una trayectoria CD con una velocidad de 400 m/s. Si se sabe que la bala deja una marca de 10 mm sobre la superficie de la placa y se supone que tiene una rapidez promedio de 500 m/s mientras está en contacto con la placa, determine la magnitud y dirección de la fuerza impulsiva promedio ejercida por la bala sobre la placa.

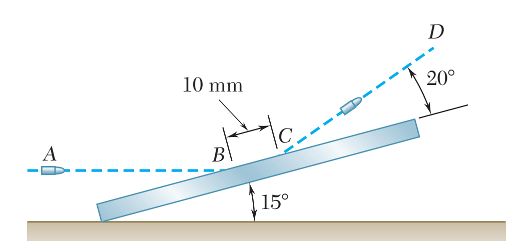


Figura *P13.195*

13.196 La maza de 650 kg de un martinete usado para clavar pilotes cae desde una altura de 1.2 m sobre la parte superior de un pilote de 140 kg, incrustándolo 110 mm en el suelo. Si se supone un impacto perfectamente plástico ($e = 0$), determine la resistencia promedio del suelo a la penetración.

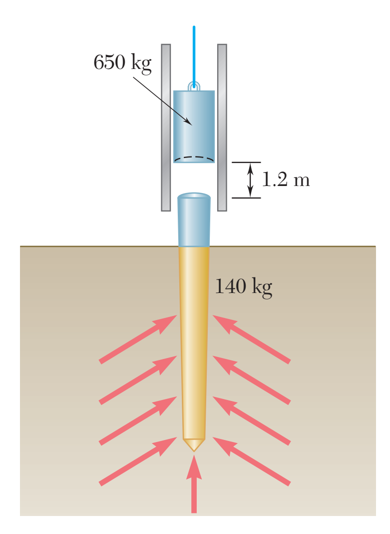


Figura P13.196

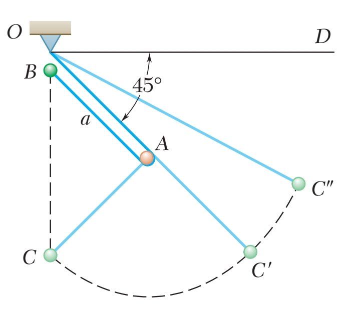


Figura P13.197

13.197 Una pequeña esfera B de masa m está unida a una cuerda inextensible con longitud $2a$, la cual pasa alrededor de la clavija fija A y está unida a un soporte fijo en O. La esfera se mantiene cerca del soporte en O y se libera sin velocidad inicial. Cae libremente hasta el punto C, donde la cuerda se pone tensa y oscila en un plano vertical, primero alrededor de A y después alrededor de O. Determine la distancia vertical desde la línea OD hasta el punto C'' más alto que alcanzará la esfera.

13.198 Los discos A y B cuyas masas son m_A y m_B, respectivamente, pueden deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. El disco B está en reposo cuando es golpeado por un disco A que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_0$ en una dirección que forma un ángulo θ con la línea de impacto. Si se denota con e el coeficiente de restitución entre los dos discos, demuestre que la componente n de la velocidad de A después del impacto es a) positiva si $m_A < em_B$, b) negativa si $m_A < em_B$, c) cero si $m_A = em_B$.

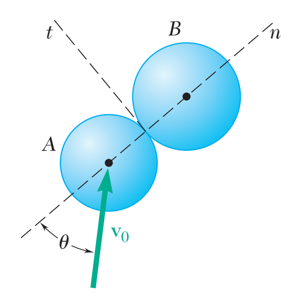


Figura *P13.198*

13.199 Los bloques A y B están conectados mediante una cuerda que pasa sobre poleas y a través de un collarín C. El sistema se suelta desde el reposo cuando $x = 1.7$ m. Mientras el bloque A sube, golpea al collarín C con un impacto perfectamente plástico ($e = 0$). Después del impacto los dos bloques y el collarín siguen moviéndose hasta que se detienen e invierten su movimiento. Cuando A y C se mueven hacia abajo, C golpea la repisa y los bloques A y B siguen moviéndose hasta que llegan a otro tope. Determine a) la velocidad de los bloques y el collarín, inmediatamente después de que A golpea a C, b) la distancia que recorren los bloques y el collarín después del impacto y antes de detenerse, c) el valor de x al final de un ciclo completo.

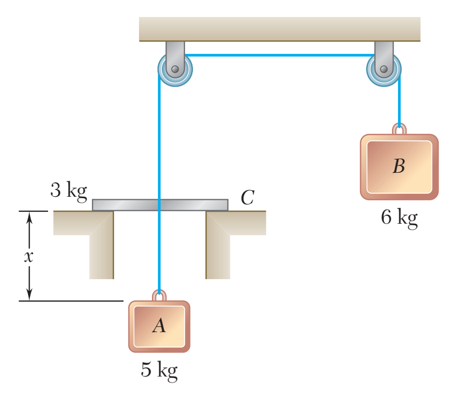


Figura P13.199

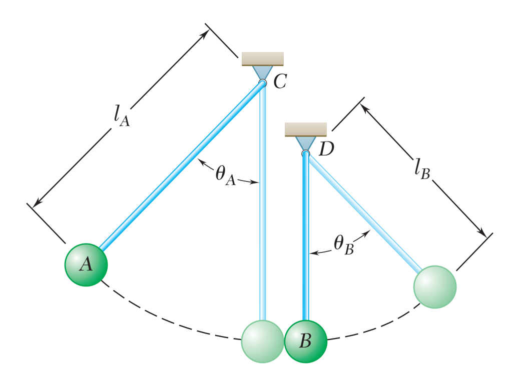


Figura P13.200

13.200 Una pequeña esfera A unida a una cuerda AC se suelta desde el reposo en la posición mostrada y golpea una esfera idéntica B que cuelga de una cuerda vertical BD. Si el ángulo máximo θ_B que forma la cuerda BD con la vertical en el movimiento subsecuente de la esfera B debe ser igual al ángulo θ_A, determine el valor requerido de la razón l_B/l_A de las longitudes de las dos cuerdas en términos del coeficiente de restitución e entre las dos esferas.

13.201 Un bloque A de 2 kg se empuja hacia arriba contra un resorte, comprimiéndolo una distancia $x = 0.1$ m. Después el bloque se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo sobre el plano inclinado de 20° hasta que golpea una esfera B de 1 kg que se encuentra suspendida de una cuerda inextensible de 1 m. La constante del resorte es $k = 800$ N/m, el coeficiente de fricción entre A y el suelo es 0.2, la distancia que se desliza A desde la longitud sin estirar del resorte es $d = 1.5$ m y el coeficiente de restitución entre A y B es 0.8. Cuando $\alpha = 40°$, determine a) la rapidez de B, b) la tensión en la cuerda.

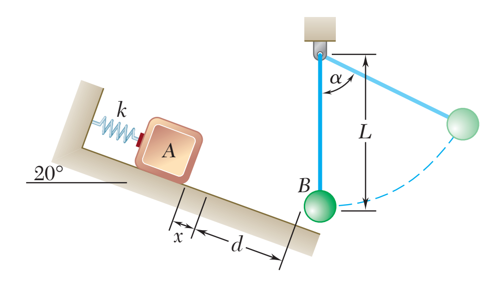


Figura P13.201

Problemas de computadora

13.C1 Un collarín de 12 lb está unido a un resorte anclado en el punto C y puede deslizarse sobre una varilla sin fricción que forma un ángulo de 30° con la vertical. El resorte tiene una constante k y no está estirado cuando el collarín se encuentra en A. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en A, utilice software para determinar la velocidad del collarín en el punto B para valores de k desde 0.1 hasta 2.0 lb/in.

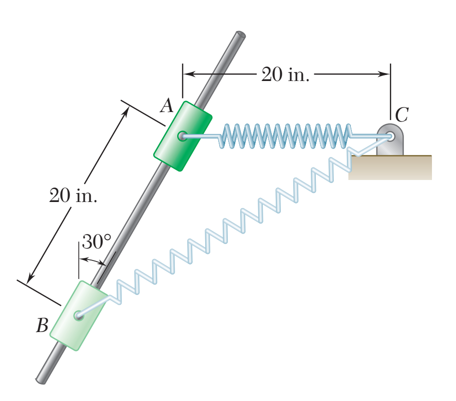


Figura P13.C1

13.C2 Las marcas que se dejaron sobre una pista de carreras indican que las ruedas traseras (las de la tracción) de un automóvil de 2 000 lb patinaron, con las llantas delanteras apenas despegadas del suelo, en los primeros 60 ft de la pista de 1 320 ft. El automóvil se condujo a punto de patinar, con 60 por ciento de su peso sobre las ruedas traseras durante los restantes 1 260 ft de la pista. Si se sabe que los coeficientes de fricción cinética y estática son de 0.60 y 0.85, respectivamente, y que la fuerza debida al arrastre aerodinámico es $F_d = 0.0098v^2$, donde la velocidad v se expresa en ft/s y la fuerza F_d en lb, use software para determinar el tiempo transcurrido y la rapidez del automóvil en diferentes puntos a lo largo de la pista, *a*) tomando en cuenta la fuerza F_d, *b*) despreciando la fuerza F_d. Para sus cálculos utilice incrementos de distancia $\Delta x = 0.1$ ft, y tabule sus resultados cada 5 ft para los primeros 60 ft y cada 90 ft para los restantes 1 260 ft. [(*Sugerencia*: El tiempo Δt_i requerido para que el automóvil recorra el incremento de distancia Δx_i puede obtenerse al dividir Δx_i entre la velocidad promedio $\frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$ del automóvil a través de Δx_i si se supone que la aceleración del automóvil permanece constante a lo largo de Δx.]

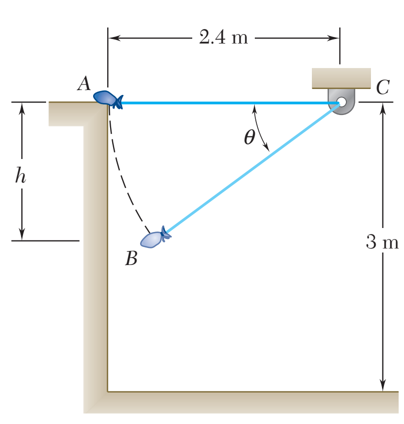


Figura P13.C3

13.C3 Un saco de 5 kg se empuja suavemente desde el borde de una pared y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda de 2.4 m que puede soportar una tensión máxima F_m. Para valores de F_m desde 40 hasta 140 N, use software para determinar *a*) la diferencia en elevación h entre el punto A y el punto B donde la cuerda se romperá, *b*) la distancia d desde la pared vertical hasta el punto donde el saco golpeará el suelo.

13.C4 Use software para determinar *a*) el tiempo requerido para que el sistema del problema 13.199 complete 10 ciclos sucesivos del movimiento descrito en ese problema, comenzando con $x = 1.7$ m, *b*) el valor de x al final del décimo ciclo.

13.C5 Una pelota B de 700 g cuelga de una cuerda inextensible que está unida a un soporte en C. Una pelota A de 350 g golpea a B con una velocidad $\mathbf{v}_0$ y forma un ángulo θ_0 con la vertical. Si se supone que no hay fricción y se denota con e el coeficiente de restitución, use software para determinar las magnitudes v'_A y v'_B de las velocidades de las pelotas inmediatamente después del impacto y el porcentaje de energía perdida en la colisión para $v_0 = 6$ m/s y valores de θ_0 desde 20° hasta 150°. Suponga que *a*) $e = 1$, *b*) $e = 0.75$, *c*) $e = 0$.

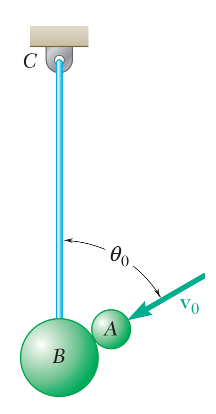


Figura P13.C5

13.C6 En el problema 13.109, un vehículo espacial se encontraba en una órbita circular a una altura de 225 mi sobre la superficie de la Tierra. Para regresar a esta última, disminuyó su rapidez cuando pasó por A encendiendo su motor durante un breve intervalo en una dirección opuesta a la dirección de su movimiento. Su velocidad resultante al llegar al punto B, a una altura de 40 mi, formó un ángulo $\phi_B = 60°$ con la vertical. Una estrategia alterna para sacar al vehículo espacial de su órbita circular sería girarlo de manera que su motor apuntara en dirección contraria a la Tierra y después aplicar una velocidad incremental $\Delta\mathbf{v}_A$ hacia el centro O de la Tierra. Es probable que esto requiriera un menor gasto de energía al encender el motor en A, pero podría ocasionar un descenso demasiado rápido en B. Suponiendo que se usa esta estrategia, use software para determinar los valores de ϕ_B y v_B para un gasto de energía que va desde 5 hasta 100 por ciento de la necesaria en el problema 13.109.

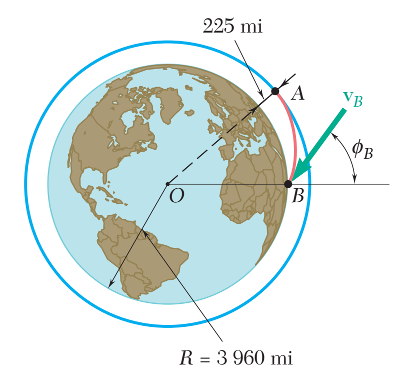


Figura P13.C6



El empuje para este prototipo de motor XR-5M15 se produce por medio de partículas de gas expulsadas a gran velocidad. La determinación de las fuerzas en el puesto de pruebas se basa en el análisis del movimiento de un ***sistema de partículas variable***, es decir, se considera el movimiento conjunto de un gran número de partículas de aire en vez de hacerlo por separado.

CAPÍTULO 14

Sistemas de partículas

CAPÍTULO 14 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

14.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia el movimiento de *sistemas de partículas*, esto es, el movimiento de un gran número de partículas consideradas en conjunto. La primera parte del capítulo se dedica a sistemas consistentes en partículas bien definidas; la segunda considera el movimiento de sistemas variables, esto es, sistemas en los cuales se ganan o pierden partículas de manera continua, o en los que ocurren ambas situaciones de manera simultánea.

En la sección 14.2, la segunda ley de Newton se aplicará primero a cada partícula del sistema. Al definir la *fuerza efectiva* de una partícula como el producto $m_i\mathbf{a}_i$ de su masa m_i y su aceleración $\mathbf{a}_i$, se demostrará que las *fuerzas externas* que actúan sobre diversas partículas forman un sistema equipolente al sistema de las fuerzas efectivas, esto es, ambos sistemas tienen la misma resultante y el mismo momento resultante alrededor de cualquier punto dado. En la sección 14.3 se mostrará que la resultante y el momento resultante de las fuerzas externas son iguales, respectivamente, a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal total y a la cantidad de movimiento angular total de las partículas del sistema.

En la sección 14.4 se define el *centro de masa* del sistema de partículas y se describe su movimiento. En tanto que en la sección 14.5 se analiza el movimiento de las partículas alrededor de su centro de masa. Las condiciones bajo las cuales se conserva la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas se estudian en la sección 14.6, y los resultados obtenidos en esa sección se aplican a la solución de diversos problemas.

Las secciones 14.7 y 14.8 abordan la aplicación del principio del trabajo y la energía en un sistema de partículas, y en la sección 14.9 se estudia la aplicación del principio del impulso y la cantidad de movimiento. Estas secciones contienen también varios problemas de interés práctico.

Hay que observar que si bien las deducciones dadas en la primera parte de este capítulo se refieren a un sistema de partículas independientes, éstas siguen siendo válidas cuando las partículas del sistema están conectadas rígidamente, esto es, cuando forman un cuerpo rígido. De hecho, los resultados obtenidos aquí contienen los fundamentos del estudio de la cinética de cuerpos rígidos presente en los capítulos 16 a 18.

La segunda parte de este capítulo se dedica al estudio de sistemas variables de partículas. En la sección 14.11 se considerarán corrientes estacionarias de partículas, como un chorro de agua desviado por una paleta o el flujo de aire que pasa por un motor de reacción, y se aprenderá a determinar la fuerza que ejerce la corriente sobre la paleta y el empuje desarrollado por el motor. Por último, en la sección 14.12 se aprenderá cómo analizar los sistemas que ganan masa de manera continua al absorber partículas, o que pierden masa al desechar partículas de manera continua. Entre las diversas aplicaciones prácticas de este análisis se encuentra la determinación del empuje desarrollado por un motor de cohete.

14.2. APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON AL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS. FUERZAS EFECTIVAS

Para deducir las ecuaciones de movimiento de un sistema de n partículas se empieza escribiendo la segunda ley de Newton para cada partícula individual del sistema. Considere la partícula P_i, donde $1 \leq i \leq n$. Sea m_i la masa de P_i y $\mathbf{a}_i$ su aceleración con respecto al sistema de refe-

rencia newtoniano *Oxyz*. La fuerza ejercida sobre P_i por otra partícula P_j del sistema (figura 14.1), denominada *fuerza interna,* se denotará por $\mathbf{f}_{ij}$. La resultante de las fuerzas internas ejercidas sobre P_i por todas las demás partículas del sistema es entonces $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}$ (donde $\mathbf{f}_{ij}$ no tiene significado y se supone que será igual a cero). Al denotar, por otro lado, mediante $\mathbf{F}_i$ la resultante de todas las *fuerzas externas* que actúan sobre P_i, se escribe la segunda ley de Newton para la partícula P_i en la forma siguiente

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = m_i\mathbf{a}_i \tag{14.1}$$

Al denotar por $\mathbf{r}_i$ el vector de posición de P_i y tomar los momentos alrededor de *O* de los diversos términos en la ecuación (14.1), también se escribe

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i \tag{14.2}$$

Si se repite este procedimiento para cada partícula P_i del sistema, se obtienen *n* ecuaciones del tipo (14.1) y *n* ecuaciones del tipo (14.2), donde *i* toma sucesivamente los valores 1, 2, . . . , *n*. Los vectores $m_i\mathbf{a}_i$ se denominan las *fuerzas efectivas* de las partículas.† En consecuencia, las ecuaciones que se obtienen expresan el hecho de que las fuerzas externas $\mathbf{F}_i$ y las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ que actúan sobre las diversas partículas forman un sistema equivalente al sistema de las fuerzas efectivas $m_i\mathbf{a}_i$ (esto es, un sistema puede sustituirse por el otro) (figura 14.2).

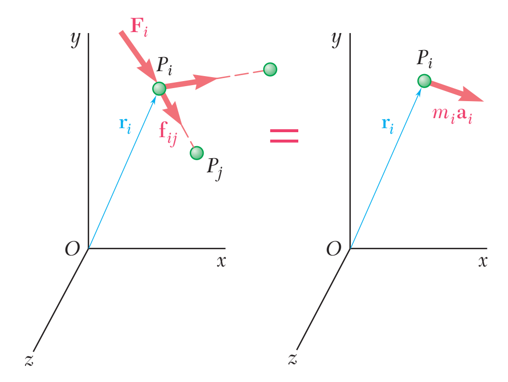


Figura 14.1

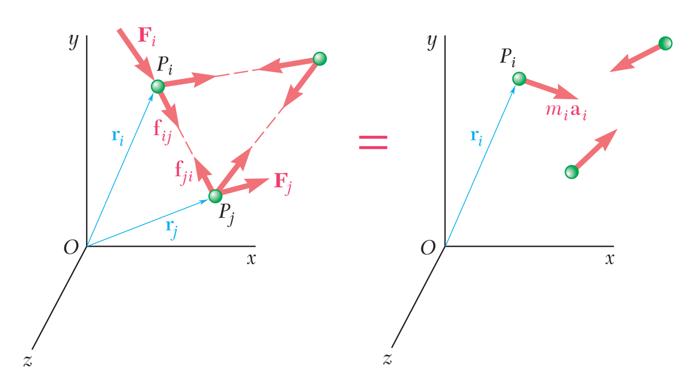


Figura 14.2

Antes de continuar con la deducción, hay que examinar las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$. Advierta que estas fuerzas ocurren en pares $\mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{f}_{ji}$, donde $\mathbf{f}_{ij}$ representa la fuerza ejercida por la partícula P_j sobre la partícula P_i y $\mathbf{f}_{ji}$ representa la fuerza ejercida por P_i sobre P_j (figura 14.2). Ahora bien, de acuerdo con la tercera ley de Newton (sección 6.1), ampliada por la ley de la gravitación de Newton a partículas que actúan a distancia (sección 12.10), las fuerzas $\mathbf{f}_{ij}$ y $\mathbf{f}_{ji}$ son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción. Por lo tanto, su suma es $\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0$, y la suma de sus momentos alrededor de *O* es

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ji} = 0$$

ya que los vectores $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ y $\mathbf{f}_{ji}$ en el último término son colineales. Al

†Puesto que estos vectores representan las resultantes de fuerzas que actúan sobre las diferentes partículas del sistema, pueden realmente considerarse como fuerzas.

agregar todas las fuerzas internas del sistema y sumar sus momentos alrededor de O, se obtienen las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = 0 \tag{14.3}$$

que expresa el hecho de que la resultante y el momento resultante de las fuerzas internas del sistema son cero.

Al volver ahora a las n ecuaciones (14.1), donde $i = 1, 2, \ldots, n$, se suman sus miembros del lazo izquierdo y los del lado derecho. Tomando en cuenta la primera de las ecuaciones (14.3), se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \tag{14.4}$$

Al proceder de manera similar con las ecuaciones (14.2) y tomar en cuenta la segunda de las ecuaciones (14.3), se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \tag{14.5}$$

Las ecuaciones (14.4) y (14.5) expresan el hecho de que el sistema de las fuerzas externas $\mathbf{F}_i$ y el sistema de las fuerzas efectivas $m_i\mathbf{a}_i$ tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Al recordar la definición dada en la sección 3.19 para dos sistemas equipolentes de vectores, se puede consecuentemente enunciar que *el sistema de fuerzas externas que actúan sobre las partículas y el sistema de las fuerzas efectivas de las partículas son equipolentes*† (figura 14.3).

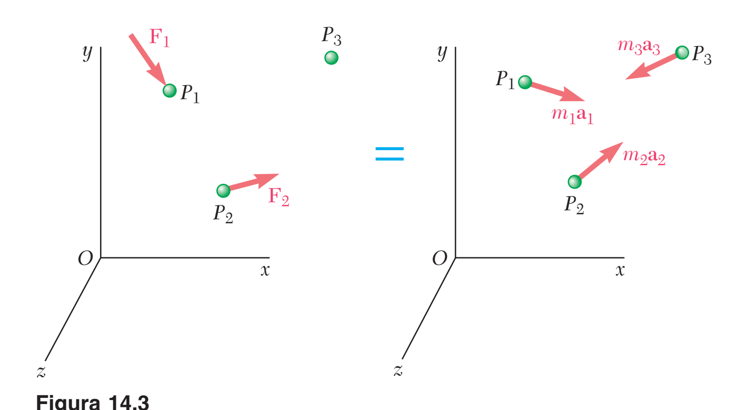


Figura 14.3

†El resultado que acaba de obtenerse con frecuencia recibe el nombre de *principio d'Alembert*, en honor al matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Sin embargo, el enunciado original de d'Alembert se refiere a un sistema de cuerpos conectados, con $\mathbf{f}_{ij}$ representando las fuerzas restrictivas, las cuales si las aplican a ellos mismos no provocarán el movimiento del sistema. Puesto que, como se demostrará a continuación, éste no es en general el caso para las fuerzas internas que actúan sobre un sistema de partículas libres, la consideración del principio de d'Alembert se postergará hasta que se considere el movimiento de cuerpos rígidos (capítulo 16).

Las ecuaciones (14.3) expresan el hecho de que el sistema de las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ es equipolente a cero. Sin embargo, observe que *no* se afirma que las fuerzas internas no tengan efecto sobre las partículas que se están considerando. De hecho, las fuerzas gravitacionales que el Sol y los planetas ejercen entre sí son internas al sistema solar y equipolentes a cero. A pesar de eso, estas fuerzas son únicamente responsables del movimiento de los planetas alrededor del Sol.

De manera similar, no se indica a partir de las ecuaciones (14.4) y (14.5) que los dos sistemas de fuerzas externas que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante tendrán el mismo efecto sobre un sistema determinado de partículas. Es claro que los sistemas que se muestran en las figuras 14.4*a* y 14.4*b* tienen la misma resultante y el mismo momento resultante; sin embargo, el primer sistema acelera la partícula *A* y deja inalterada a la partícula *B*, en tanto que el segundo acelera a *B* y no afecta a *A*. Es importante recordar que cuando se señaló en la sección 3.19 que dos sistemas de fuerzas equipolentes que actúan sobre un cuerpo rígido también son equivalentes, se advirtió de manera específica que esta propiedad *no* podría extenderse a un sistema de fuerzas que actuaba sobre un conjunto de partículas independientes como las consideradas en este capítulo.

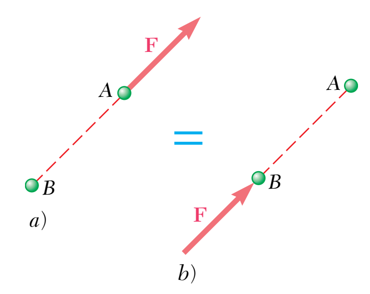


Figura 14.4

Para evitar cualquier confusión, se utilizarán signos de igualdad de tono claro para conectar sistemas de vectores equipolentes, como los que se indican en las figuras 14.3 y 14.4. Estos signos indican que los dos sistemas de vectores tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Los signos de igualdad se continuarán utilizando para indicar que dos sistemas de vectores son equivalentes, esto es, que un sistema puede realmente sustituirse por el otro (figura 14.2).

14.3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL Y ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Las ecuaciones (14.4) y (14.5), que se obtuvieron en la sección anterior para el movimiento de un sistema de partículas, pueden expresarse en una forma más condensada si se introduce la cantidad de movimiento lineal y angular del sistema de partículas. Al definir la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{L}$ del sistema de partículas como la suma de las cantidades de movimiento lineal de las diversas partículas del sistema (sección 12.3), se escribe

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i \qquad (14.6)$$

Si se define la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ alrededor de O del sistema de partículas de una manera similar (sección 12.7), se tiene

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) \tag{14.7}$$

Al diferenciar ambos miembros de las ecuaciones (14.6) y (14.7) con respecto a t, se escribe

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \tag{14.8}$$

y

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_O &= \sum_{i=1}^{n} (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i\mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\dot{\mathbf{v}}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i \times m_i\mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i)\end{aligned}$$

que se reduce a

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \tag{14.9}$$

ya que los vectores $\mathbf{v}_i$ y $m_i\mathbf{v}_i$ son colineales.

Observe que los miembros del lado derecho de las ecuaciones (14.8) y (14.9) son respectivamente idénticos a los miembros del lado derecho de las ecuaciones (14.4) y (14.5). Se concluye que los miembros del lado izquierdo de estas ecuaciones son respectivamente iguales. Al recordar que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (14.5) representa la suma de los momentos $\mathbf{M}_O$ alrededor de O de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema, y al omitir el subíndice i de las sumatorias, se escribe

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \tag{14.10}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{14.11}$$

Estas ecuaciones expresan que *la resultante y el momento resultante alrededor del punto fijo O de las fuerzas externas son, respectivamente, iguales a las razones de cambio de la cantidad de movimiento lineal y de la cantidad de movimiento angular alrededor de O del sistema de partículas.*

14.4. MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La ecuación (14.10) puede escribirse en una forma alternativa si se considera el *centro de masa* del sistema de partículas. El centro de masa

del sistema es el punto G definido por el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$, el cual satisface la relación

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \tag{14.12}$$

donde m representa la masa total $\sum_{i=1}^{n} m_i$ de las partículas. Al descomponer los vectores de posición $\bar{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{r}_i$ en componentes rectangulares, se obtienen las siguientes tres ecuaciones escalares, las cuales se utilizan para determinar las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ del centro de masa:

$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad m\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad m\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{14.12$'$}$$

Puesto que $m_i g$ representa el peso de la partícula P_i y mg el peso total de las partículas, G es también el centro de gravedad del sistema de partículas. Sin embargo, para evitar cualquier confusión, a G se le referirá como el *centro de masa* del sistema de partículas cuando se estudien propiedades asociadas con la *masa* de las partículas, y como el *centro de gravedad* del sistema cuando se consideren propiedades asociadas con el *peso* de las partículas. Las partículas localizadas fuera del campo gravitacional de la Tierra, por ejemplo, tienen masa pero no peso. En ese caso es posible referirse de manera apropiada a su centro de masa, pero, evidentemente, no a su centro de gravedad.[†]

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (14.12) con respecto a t, se escribe

$$m\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

o

$$m\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \tag{14.13}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ representa la velocidad del centro de masa G del sistema de partículas. Pero el miembro del lado derecho de la ecuación (14.13) es, por definición, la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{L}$ del sistema (sección 14.3). Por lo tanto, se tiene

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \tag{14.14}$$

y, al diferenciar ambos miembros con respecto a t,

$$\dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{14.15}$$

[†]También es posible señalar que el centro de masa y el centro de gravedad de un sistema de partículas no coinciden exactamente, ya que los pesos de las partículas están dirigidos hacia el centro de la Tierra y, por ello, no forman realmente un sistema de fuerzas paralelas.

donde $\bar{\mathbf{a}}$ representa la aceleración del centro de masa G. Sustituyendo $\dot{\mathbf{L}}$ de (14.15) en (14.10), se escribe la ecuación

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{14.16}$$

que define el movimiento del centro de masa G del sistema de partículas.

La ecuación (14.16) es idéntica a la ecuación obtenida para una partícula de masa m igual a la masa total de las partículas del sistema, sobre la cual actúan todas las fuerzas externas. Por lo tanto, *el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total del sistema y todas las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto.*

Este principio se ilustra mejor mediante el movimiento de una bomba que explota. Si se ignora la resistencia del aire, es posible suponer que una bomba describirá una trayectoria parabólica. Luego de la explosión, el centro de masa G de los fragmentos de la bomba continuará moviéndose a lo largo de la misma trayectoria. En realidad, el punto G se mueve como si la masa y el peso de todos los fragmentos estuvieran concentrados en G; en consecuencia, se mueve como si no hubiera explotado la bomba.

Es necesario señalar que la conclusión anterior no incluye los momentos de las fuerzas externas. Por consiguiente, *sería erróneo suponer* que las fuerzas externas son equipolentes a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido al centro de masa G. Éste no es el caso en general, ya que, como se verá en la siguiente sección, la suma de los momentos alrededor de G de las fuerzas externas no es en general igual a cero.

14.5. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS ALREDEDOR DE SU CENTRO DE MASA

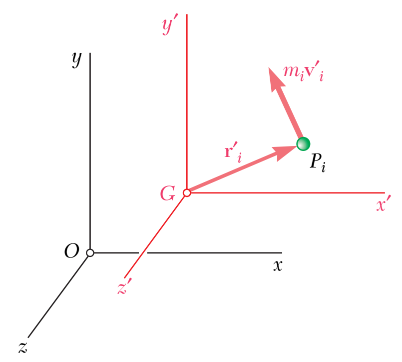


Figura 14.5

En algunas aplicaciones (por ejemplo, en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido) es conveniente considerar el movimiento de las partículas del sistema con respecto a un sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ que se traslada con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (figura 14.5). Si bien el sistema de referencia centroidal no es, en general, un sistema de referencia newtoniano, se observará que la relación fundamental (14. 11) se cumple cuando el sistema de referencia $Oxyz$ se sustituye por $Gx'y'z'$.

Al denotar, respectivamente, mediante $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}'_i$ el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i relativos al sistema de referencia en movimiento $Gx'y'z'$, se define la *cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}'_G$ del sistema de partículas *alrededor del centro de masa* G de la manera siguiente

$$\mathbf{H}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i) \tag{14.17}$$

Después de esto se diferencian ambos miembros de la ecuación (14.17) con respecto a t. Esta operación es similar a la que se efectuó en la sección 14.3 en la ecuación (14.7), y por ello se escribe de inmediato

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{a}'_i) \tag{14.18}$$

donde $\mathbf{a}'_i$ denota la aceleración de P_i relativa al sistema de referencia en movimiento. Con referencia a la sección 11.12, se escribe

$$\mathbf{a}_i = \overline{\mathbf{a}} + \mathbf{a}'_i$$

donde $\mathbf{a}_i$ y $\overline{\mathbf{a}}$ denotan, respectivamente, las aceleraciones de P_i y G relativas al sistema de referencia $Oxyz$. Al resolver para $\mathbf{a}'_i$ y sustituir entre (14.18), se tiene

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{a}_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i\right) \times \overline{\mathbf{a}} \tag{14.19}$$

Sin embargo, por (14.12), la segunda sumatoria en la ecuación (14.19) es igual a $m\overline{\mathbf{r}}'$ y, por consiguiente, a cero, ya que el vector de posición $\overline{\mathbf{r}}'$ de G relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$ es claramente cero. Por otro lado, puesto que $\mathbf{a}_i$ representa la aceleración de P_i relativa a un sistema de referencia newtoniano, se puede usar la ecuación (14.1) y sustituir $m_i\mathbf{a}_i$ por la suma de las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ y de la resultante $\mathbf{F}_i$ de las fuerzas externas que actúan sobre P_i. Pero un razonamiento similar al que se usó en la sección 14.2 demuestra que el momento resultante alrededor de G de las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ del sistema completo es cero. La primera sumatoria en la ecuación (14.19) se reduce consecuentemente al momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema, y se escribe

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}'_G \tag{14.20}$$

que expresa que *el momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas es igual a la razón de cambio, de la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas.*

Debe observarse que en la ecuación (14.17) se define la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}'_G$ como la suma de los momentos alrededor de G de los momentos de las partículas $m_i\mathbf{v}'_i$ *en su movimiento relativo al sistema de referencia centroidal* $Gx'y'z'$. Es posible que algunas veces necesitemos calcular la suma $\mathbf{H}_G$ de los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento de las partículas $m_i\mathbf{v}_i$ *en su movimiento absoluto*, esto es, en su movimiento según se observa desde el sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (figura 14.6):

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i) \tag{14.21}$$

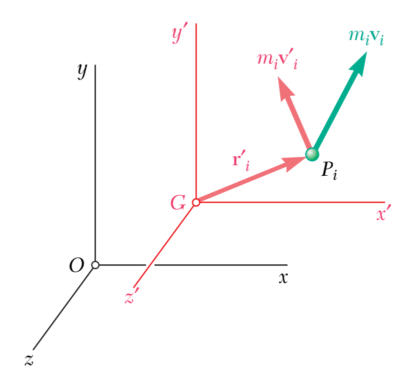


Figura 14.6

Resulta notable que las cantidades de movimiento angular $\mathbf{H}'_G$ y $\mathbf{H}_G$ sean idénticamente iguales. Esto puede verificarse al referirse a la sección 11.2 y escribir

$$\mathbf{v}_i = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \tag{14.22}$$

Al sustituir $\mathbf{v}_i$ de (14.22) en la ecuación (14.21), se encuentra

$$\mathbf{H}_G = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i\right) \times \overline{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i)$$

Sin embargo, como se señaló antes, la primera sumatoria es igual a cero. De tal modo $\mathbf{H}_G$ se reduce a la segunda sumatoria, la cual por definición es igual a $\mathbf{H}'_G$.†

†Advierta que esta propiedad es particular del sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ y, en general, no se cumple para otro sistema de referencia (véase el problema 14.29).

Si se aprovecha la propiedad acabada de establecer, se simplifica la notación al eliminar la prima (′) de la ecuación (14.20) y se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{14.23}$$

donde se entiende que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ puede calcularse al evaluar los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento de las partículas en su movimiento con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ o al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i) \tag{14.24}$$

14.6. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Si no actúa una fuerza externa sobre las partículas de un sistema, los miembros del lado izquierdo de las ecuaciones (14.10) y (14.11) son iguales a cero y estas ecuaciones se reducen a $\dot{\mathbf{L}} = 0$ y $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$. Se concluye que

$$\mathbf{L} = \text{constante} \qquad \mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{14.25}$$

Las ecuaciones que se obtienen expresan que la cantidad de movimiento lineal del sistema de partículas y su cantidad de movimiento angular alrededor del punto fijo O se conservan.

En algunas aplicaciones, como los problemas en los que intervienen fuerzas centrales, el momento alrededor del punto fijo O de cada una de las fuerzas externas puede ser cero sin que ninguna de las fuerzas sea cero. En tales casos, se sigue cumpliendo la segunda de las ecuaciones (14.25); la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas alrededor de O se conserva.



Fotografía 14.1 Si no existen fuerzas externas que actúen sobre las dos etapas de este cohete, se conservarán las cantidades de movimiento lineal y angular del sistema.

También es posible aplicar el concepto de conservación de la cantidad de movimiento al análisis del movimiento del centro de masa G de un sistema de partículas y al análisis del movimiento del sistema alrededor de G. Por ejemplo, si la suma de las fuerzas externas es cero, se aplica la primera de las ecuaciones (14.25). Al recordar la ecuación (14.14), se escribe

$$\overline{\mathbf{v}} = \text{constante} \tag{14.26}$$

que expresa que el centro de masa G del sistema se mueve en línea recta y a una velocidad constante. Por otro lado, si la suma de los momentos alrededor de G de las fuerzas externas es cero, se concluye de la ecuación (14.23) que se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de su centro de masa:

$$\mathbf{H}_G = \text{constante} \tag{14.27}$$

PROBLEMA RESUELTO 14.1

Se observa que en $t = 0$ un vehículo espacial de 200 kg pasa por el origen de un sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ con velocidad $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$ relativa al sistema de referencia. Luego de la detonación de cargas explosivas, el vehículo se separa en tres partes A, B y C, de masas respectivas iguales a 100 kg, 60 kg y 40 kg. Si en $t = 2.5$ s se observa que las posiciones de las partes A y B son A(555, −180, 240) y B(255, 0, −120), donde las coordenadas se expresan en metros, determine la posición de la parte C en ese tiempo.

SOLUCIÓN

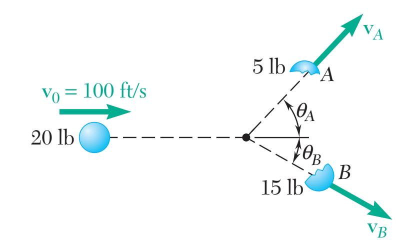
Puesto que no hay fuerza externa, el centro de masa G del sistema se mueve con la velocidad constante $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$. En $t = 2.5$ s, su posición es

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 t = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}(2.5 \text{ s}) = (375 \text{ m})\mathbf{i}$$

Al recordar la ecuación (14.12), se escribe

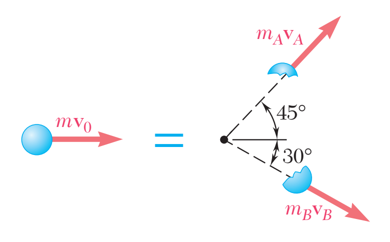
$$m\bar{\mathbf{r}} = m_A\mathbf{r}_A + m_B\mathbf{r}_B + m_C\mathbf{r}_C$$
$$(200 \text{ kg})(375 \text{ m})\mathbf{i} = (100 \text{ kg})[(555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}] + (60 \text{ kg})[(255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}] + (40 \text{ kg})\mathbf{r}_C$$

$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 14.2

Un proyectil de 20 lb se mueve con una velocidad de 100 ft/s cuando explota en dos fragmentos A y B, que pesan, respectivamente, 5 y 15 lb. Si se sabe que inmediatamente después de la explosión, los fragmentos A y B viajan en direcciones definidas respectivamente por $\theta_A = 45°$ y $\theta_B = 30°$, determine la velocidad de cada fragmento.



SOLUCIÓN

Puesto que no hay fuerza externa, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema, y se escribe

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m\mathbf{v}_0$$
$$(5/g)\mathbf{v}_A + (15/g)\mathbf{v}_B = (20/g)\mathbf{v}_0$$

$\xrightarrow{+}$ componentes x: $\quad 5v_A \cos 45° + 15v_B \cos 30° = 20(100)$

$+\uparrow$ componentes y: $\quad 5v_A \text{ sen } 45° - 15v_B \text{ sen } 30° = 0$

Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones para v_A y v_B, se encuentra

$$v_A = 207 \text{ ft/s} \qquad v_B = 97.6 \text{ ft/s}$$

$$\mathbf{v}_A = 207 \text{ ft/s} \measuredangle 45° \qquad \mathbf{v}_B = 97.6 \text{ ft/s} \searrow 30° \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En este capítulo se estudia el movimiento de *sistemas de partículas,* esto es, el movimiento de un gran número de partículas consideradas en conjunto, y no en forma separada. En esta primera lección se aprendió a calcular la *cantidad de movimiento lineal* y la *cantidad de movimiento angular* de un sistema de partículas. Se definió la cantidad de movimiento lineal **L** de un sistema de partículas como la suma de las cantidades de movimientos lineales de las partículas y la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema como la suma de las cantidades de movimiento angular de las partículas alrededor de O:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i \qquad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) \qquad (14.6, 14.7)$$

En esta lección se resolverán varios problemas de interés práctico, al observar que se conserva la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas o al considerar el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas.

1. Conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas. Esto ocurre *cuando la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema es cero.* Es posible encontrar esta situación en los siguientes tipos de problemas.

a) Problemas que implican el movimiento rectilíneo de objetos como automóviles y vagones de ferrocarril sujetos a choques. Después de verificar que la resultante de las fuerzas externas es cero, es necesario igualar las sumas algebraicas de las cantidades de movimiento iniciales y de las cantidades de movimiento finales para obtener una ecuación que sea posible resolver para una de las incógnitas.

b) Problemas que implican el movimiento bi o tridimensional de objetos como bombas que explotan o aeronaves, automóviles o bolas de billar sujetos a choques. Después de verificar que la resultante de las fuerzas externas es cero, se suman vectorialmente las cantidades de movimiento iniciales de los objetos, así como sus cantidades de movimiento finales, y se igualan las dos sumas para obtener una ecuación vectorial que expresa que la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva.

En el caso de un movimiento bidimensional, esta ecuación puede sustituirse por dos ecuaciones escalares que se resuelven para dos incógnitas, en tanto que en el caso del movimiento tridimensional se sustituyen por tres ecuaciones escalares que se resuelven para tres incógnitas.

2. Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas. En la sección 14.4 se señaló que *el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa completa del sistema y la totalidad de las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto.*

a) En el caso de un cuerpo que explota mientras está en movimiento, el centro de masa de los fragmentos resultantes se mueve como el mismo cuerpo se habría movido si la explosión no hubiera ocurrido. Los problemas de este tipo pueden resolverse escribiendo la ecuación de movimiento del centro de masa del sistema en forma vectorial y expresando el vector de posición del centro de masa en términos de los vectores de posición de los diversos fragmentos [ecuación (14.12)]. Es posible en ese caso reescribir la ecuación vectorial como dos o tres ecuaciones escalares y resolverlas para un número equivalente de incógnitas.

b) En el caso del choque de varios cuerpos en movimiento, el movimiento del centro de masa de diversos cuerpos no resulta alterado por el choque. Los problemas de este tipo pueden resolverse escribiendo la ecuación de movimiento del centro de masa del sistema en forma vectorial y expresando su vector de posición antes y después del choque en términos de los vectores de posición de los cuerpos importantes [ecuación (14.12)]. Luego se puede reescribir la ecuación vectorial como dos o tres ecuaciones escalares y resolver estas ecuaciones para un número equivalente de incógnitas.

Problemas

14.1 El empleado de una línea aérea lanza dos maletas, una de 15 kg y otra de 20 kg de masa, sobre un carrito para equipaje de 25 kg. Si se sabe que el carrito está al principio en reposo y que el empleado imparte una velocidad horizontal de 3 m/s a la maleta de 15 kg y una velocidad horizontal de 2 m/s a la maleta de 20 kg, determine la velocidad final del carrito si la primera maleta que se lanza sobre él es *a*) la de 15 kg, *b*) la de 20 kg.

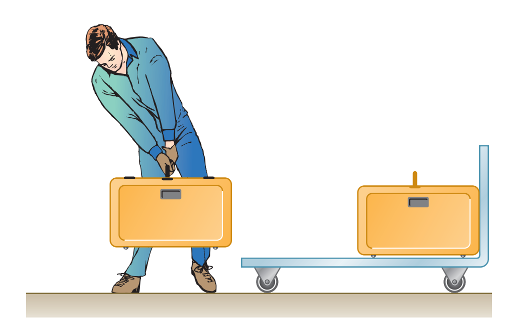


Figura P14.1 y P14.2

14.2 El empleado de una línea aérea lanza dos maletas con una velocidad horizontal de 2.4 m/s, sobre un carrito para equipaje de 25 kg que inicialmente estaba en reposo. *a*) Si se sabe que la velocidad final del carrito es de 1.2 m/s y que la primera maleta que el empleado lanza tiene una masa de 15 kg, determine la masa de la otra maleta, *b*) ¿Cuál sería la velocidad final del carrito si el empleado invirtiera el orden en el cual lanza las maletas?

14.3 Un hombre de 180 lb y una mujer de 120 lb están de pie uno al lado del otro en el mismo extremo de un bote de 300 lb, listos para lanzarse al agua, cada uno con una velocidad de 16 ft/s en relación con el bote. Determine la velocidad del bote después de que se hayan lanzado ambos al agua, si *a*) la mujer se lanza primero y *b*) el hombre se lanza primero.

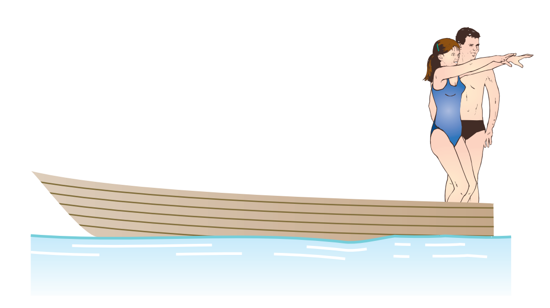


Figura P14.3

14.4 Un hombre de 180 lb y una mujer de 120 lb están de pie en extremos opuestos de un bote de 300 lb, listos para lanzarse, cada uno con una velocidad de 16 ft/s en relación con el bote. Determine la velocidad del bote después de que ambos se hayan lanzado, si *a*) la mujer se lanza primero, *b*) el hombre se lanza primero.



Figura P14.4

14.5 Se dispara una bala con una velocidad horizontal de 1 500 ft/s hacia un bloque *A* de 6 lb; la bala atraviesa el bloque y queda incrustada en otro bloque *B* de 4.95 lb. Si se sabe que los bloques *A* y *B* se empiezan a mover con velocidades respectivas de 5 ft/s y 9 ft/s, determine *a*) el peso de la bala, *b*) su velocidad cuando viaja del bloque *A* al bloque *B*.

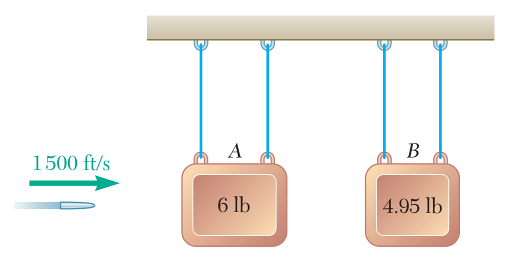


Figura *P14.5*

14.6 Un vagón de ferrocarril *A* de 45 ton se mueve en la vía de un patio de maniobras con una velocidad de 5.6 mi/h hacia los carros *B* y *C*, los cuales están en reposo con sus frenos desactivados a una corta distancia entre ellos. El carro *B* es una plataforma de 25 ton que soporta un contenedor de 30 ton y el carro *C* es otro vagón de 40 ton. Cuando los carros se golpean entre sí quedan estrechamente acoplados de manera automática. Determine la velocidad del carro *A* inmediatamente después de cada uno de los dos acoplamientos, si se supone que el contenedor *a*) no se desliza sobre la plataforma, *b*) se desliza después del primer acoplamiento pero golpea un tope antes de que ocurra el segundo acoplamiento, *c*) se desliza y golpea un tope sólo después de que ha ocurrido el segundo acoplamiento.

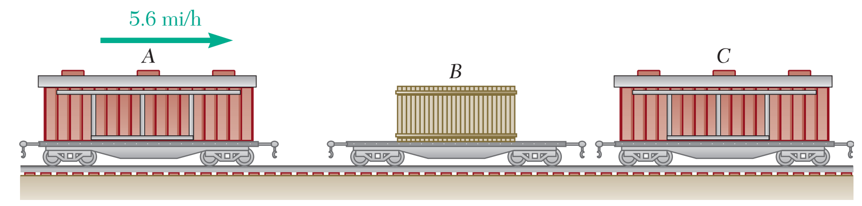


Figura *P14.6*

14.7 En un parque de diversiones están los “carritos chocones” de 200 kg A, B y C, los cuales tienen conductores con masas de 40, 60 y 35 kg, respectivamente. El carrito A se mueve a la derecha con una velocidad $\mathbf{v}_A = 2$ m/s y el carrito C tiene una velocidad $\mathbf{v}_B = 1.5$ m/s hacia la izquierda, pero el carrito B está inicialmente en reposo. El coeficiente de restitución entre cada carrito es de 0.8. Determine la velocidad final de cada carrito, después de todos los impactos, si se supone que *a*) los carritos A y C golpean al carrito B al mismo tiempo, *b*) el carrito A golpea al carrito B antes que al carrito C.



Figura P14.7 y P.14.8

14.8 En un parque de diversiones están los “carritos chocones” de 200 kg A, B y C, los cuales tienen conductores con masas de 40, 60 y 35 kg, respectivamente. El carrito A se mueve a la derecha con una velocidad $\mathbf{v}_A = 2$ m/s cuando golpea al carrito B que está inicialmente en reposo. El coeficiente de restitución entre cada carrito es de 0.8. Determine la velocidad del carrito C de modo que después de que el carrito B choque con el C, la velocidad de B sea cero.

14.9 Un sistema consta de tres partículas A, B y C. Se sabe que $m_A = 3$ kg, $m_B = 4$ kg y $m_C = 5$ kg y que las velocidades de las partículas, expresadas en m/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema con respecto a O.

14.10 Para el sistema de partículas del problema 14.9, determine *a*) el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ del centro de masa G del sistema, *b*) la cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ del sistema y *c*) la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del sistema con respecto a G. Verifique también que las respuestas de este problema y del problema 14.9 satisfagan la ecuación dada en el problema 14.27.

14.11 Un sistema está formado por tres partículas A, B y C. Se sabe que $m_A = 3$ kg, $m_B = 4$ kg y $m_C = 5$ kg y que las velocidades de las partículas expresadas en m/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine *a*) las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema con respecto a O es paralela al eje z, *b*) el valor correspondiente de $\mathbf{H}_O$.

14.12 Para el sistema de partículas del problema 14.11, determine *a*) las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema con respecto a O es paralela al eje y, *b*) el valor correspondiente de $\mathbf{H}_O$.

14.13 Un sistema está formado por tres partículas A, B y C. Se sabe que $W_A = 5$ lb, $W_B = 4$ lb y $W_C = 3$ lb y que las velocidades de las partículas expresadas en ft/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_C = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine *a*) las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema con respecto a O es paralela al eje x, *b*) el valor de $\mathbf{H}_O$.

14.14 Para el sistema de partículas del problema 14.13, determine *a*) las componentes v_x y v_z de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema con respecto a O es paralela al eje z, *b*) el valor de $\mathbf{H}_O$.

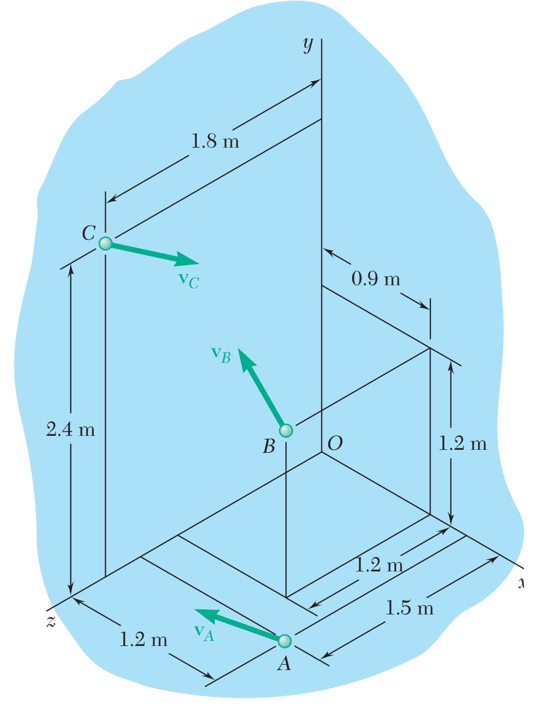


Figura P14.9 y *P14.11*

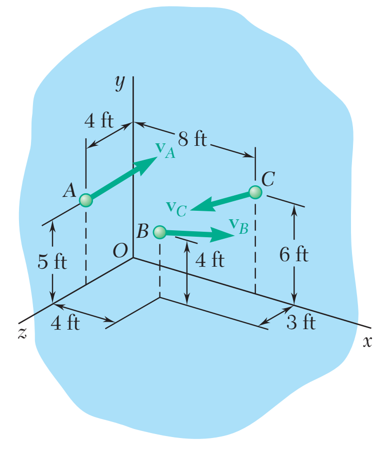


Figura P14.13

14.15 Un vehículo espacial de 900 lb viaja con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (1\,200 \text{ ft/s})\mathbf{i}$ que pasa por el origen O en $t = 0$. Debido a cargas explosivas el vehículo se fragmenta en tres partes A, B y C que pesan 450, 300 y 150 lb, respectivamente. Si se sabe que en $t = 4$ s, las posiciones observadas de las partes son A (3 840 ft, −960 ft, −1 920 ft) y B (6 480 ft, 1 200 ft, 2 640 ft), determine la posición correspondiente de la parte C. No tome en cuenta el efecto de la gravedad.

14.16 Un proyectil de 30 lb pasa por el origen O con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (120 \text{ ft/s})\mathbf{i}$ cuando explota en dos fragmentos A y B, de 12 y 18 lb, respectivamente. Si se sabe que 3 s después, la posición del fragmento A es (300 ft, 24 ft, −48 ft), determine la posición del fragmento B en el mismo instante. Suponga que $a_y = -g = -32.2 \text{ ft/s}^2$ e ignore la resistencia del aire.

14.17 Un pequeño avión de 1 500 kg y un helicóptero de 3 000 kg de masa vuelan a una altura de 1 200 m y chocan directamente arriba de una torre ubicada en O en un área boscosa. El helicóptero fue visto cuatro minutos antes a 8.4 km al oeste de la torre y el aeroplano a 16 km al oeste y 12 km al norte de la torre. Como consecuencia del choque, el helicóptero se partió en dos pedazos, H_1 y H_2, de masa $m_1 = 1\,000$ kg y $m_2 = 2\,000$ kg, respectivamente; el avión cayó al suelo pero no se fragmentó. Si se sabe que los dos fragmentos del helicóptero se localizaron en los puntos $H_1 = (500 \text{ m}, -100 \text{ m})$ y $H_2 = (600 \text{ m}, -500 \text{ m})$, y se supone que todos los fragmentos golpearon el suelo al mismo tiempo, determine las coordenadas del punto A donde se hallaron los restos del avión.

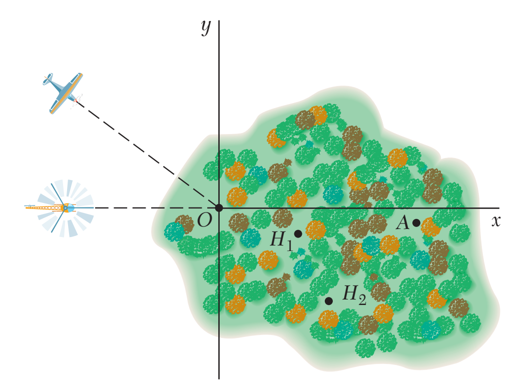


Figura P14.17

14.18 En el problema 14.17, si se sabe que los restos del pequeño avión se encontraron en A (1 200 m, 80 m) y el fragmento de 1 000 kg del helicóptero en el punto H_1 (400 m, −200 m), y se supone que todos los fragmentos golpearon el suelo al mismo tiempo, determine las coordenadas del punto H_2 donde se encontró el otro fragmento del helicóptero.

14.19* y *14.20 El automóvil A viajaba hacia el este a alta velocidad cuando chocó en el punto O con el automóvil B, que se dirigía hacia el norte a 72 km/h. El automóvil C que viajaba hacia el oeste a 90 km/h, se encontraba 10 m al este y 3 m al norte del punto O en el momento del choque. Como el pavimento estaba húmedo, el conductor del automóvil C no pudo evitar que el vehículo patinara hacia los otros dos automóviles, y los tres vehículos, atorados, se mantuvieron deslizándose hasta que chocaron contra el poste eléctrico P. Si se sabe que las masas de los automóviles A, B y C son, respectivamente, 1 500, 1 300 y 1 200 kg, y despreciando las fuerzas ejercidas sobre los automóviles por el pavimento húmedo, resuelva los problemas indicados.

14.19 Si se sabe que las coordenadas del poste eléctrico son $x_p = 18$ m y $y_p = 13.9$ m, determine *a*) el tiempo transcurrido desde el primer choque hasta el impacto en *P*, *b*) la rapidez del automóvil *A*.

14.20 Si se sabe que la velocidad del automóvil *A* fue de 129.6 km/h y que el tiempo transcurrido desde el primer choque hasta el impacto en *P* fue de 2.4 s, determine las coordenadas del poste eléctrico *P*.

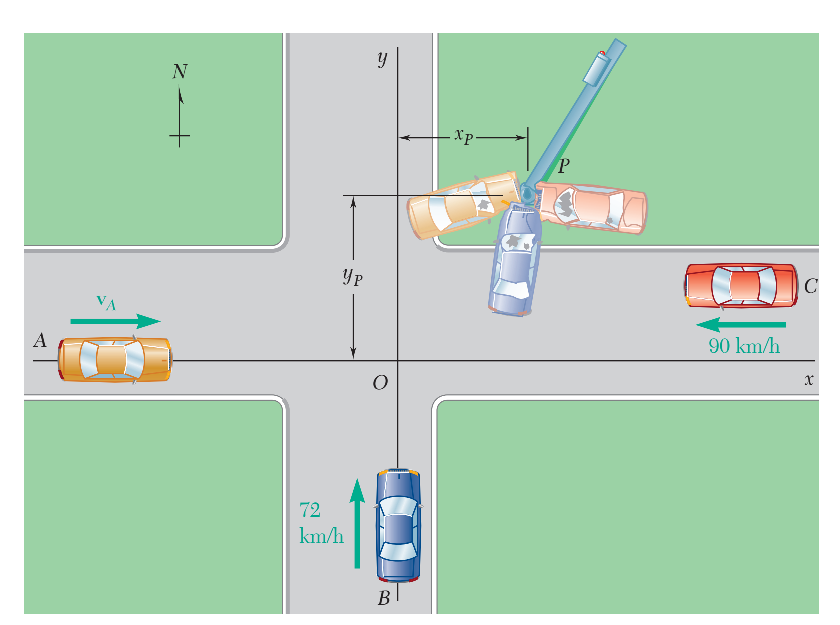


Figura *P14.19* y *P14.20*

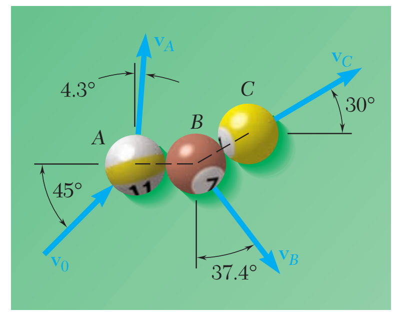


Figura P14.21

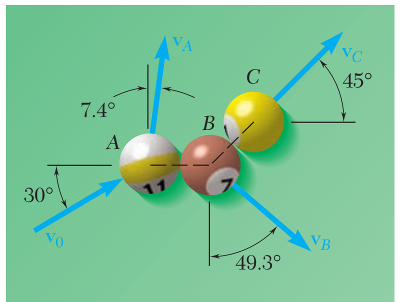
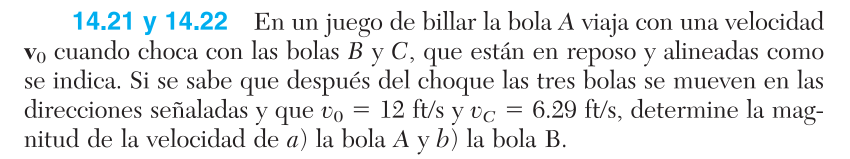


Figura P14.22



14.21 y 14.22 En un juego de billar la bola *A* viaja con una velocidad $\mathbf{v}_0$ cuando choca con las bolas *B* y *C*, que están en reposo y alineadas como se indica. Si se sabe que después del choque las tres bolas se mueven en las direcciones señaladas y que $v_0 = 12$ ft/s y $v_C = 6.29$ ft/s, determine la magnitud de la velocidad de *a*) la bola *A* y *b*) la bola B.

14.23 Un arquero experto demuestra su habilidad atravesando pelotas de tenis lanzadas por un asistente. Una pelota de tenis de 58 g tiene una velocidad de (10 m/s)**i** − (2 m/s)**j** y está a 10 m sobre el suelo cuando es alcanzada por una flecha de 40 g que viaja a una velocidad de (50 m/s)**j** + (70 m/s)**k** donde **j** está dirigida hacia arriba. Determine la posición *P* donde la bola y la flecha golpearán el suelo, con respecto al punto *O* ubicado directamente debajo del punto de impacto.

14.24 En un experimento de dispersión, una partícula alfa *A* se proyecta con la velocidad $\mathbf{u}_0 = -(600 \text{ m/s})\mathbf{i} + (750 \text{ m/s})\mathbf{j} - (800 \text{ m/s})\mathbf{k}$ dentro de una corriente de núcleos de oxígeno que se mueven con una velocidad común $\mathbf{v}_0 = (600 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Después de chocar sucesivamente con los núcleos *B* y *C*, se observa que la partícula *A* se mueve a lo largo de la trayectoria definida por los puntos A_1 (280, 240, 120) y A_2 (360, 320, 160), mientras que los núcleos *B* y *C* se mueven a lo largo de trayectorias definidas, respectivamente, por B_1 (147, 220, 130) y B_2 (114, 290, 120), y por C_1 (240, 232, 90) y C_2 (240, 280, 75). Todas las trayectorias son a lo largo de líneas rectas y todas las coordenadas se expresan en milímetros. Si se sabe que la masa de un núcleo de oxígeno es cuatro veces la de una partícula alfa, determine la rapidez de cada una de las tres partículas después de los choques.

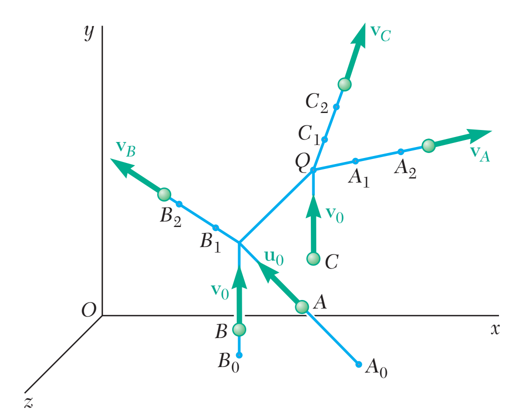


Figura P14.24

14.25 Una bomba de 12 lb que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (40 \text{ ft/s})\mathbf{i} - (30 \text{ ft/s})\mathbf{j} - (1\,200 \text{ ft/s})\mathbf{k}$ explota en el punto D en tres fragmentos A, B y C que pesan, respectivamente, 5, 4 y 3 lb. Si se sabe que los fragmentos se impactan contra la pared vertical en los puntos indicados, determine la rapidez de cada fragmento inmediatamente después de la explosión.

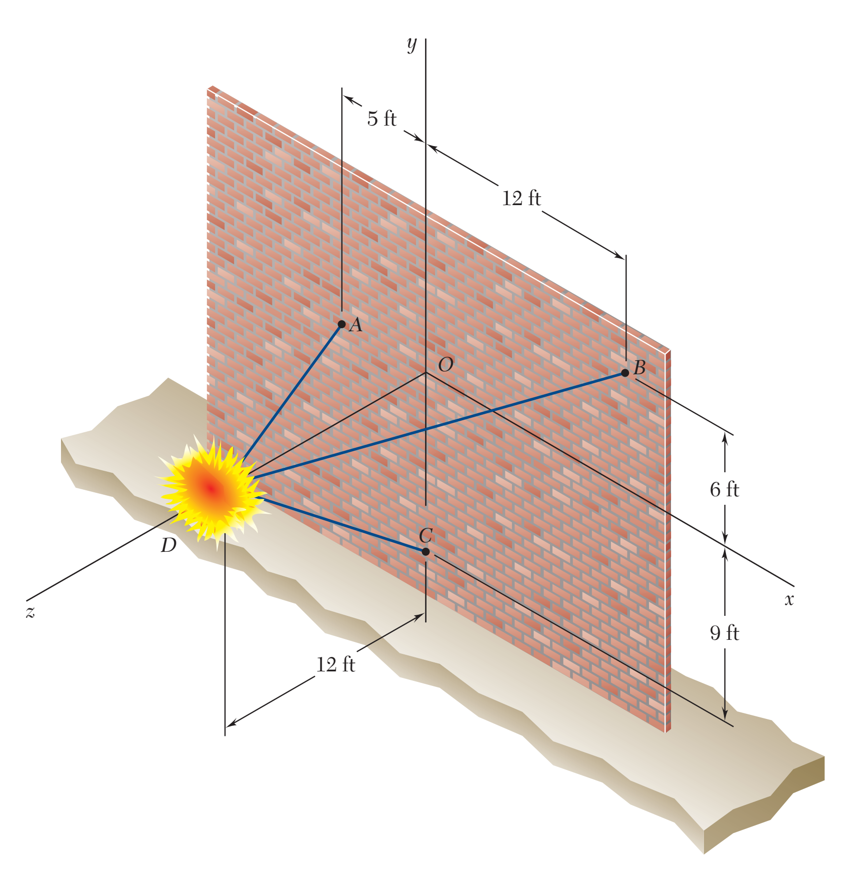


Figura *P14.25* y *P14.26*

14.26 Una bomba de 12 lb que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (40 \text{ ft/s})\mathbf{i} - (30 \text{ ft/s})\mathbf{j} - (1\,200 \text{ ft/s})\mathbf{k}$ explota en el punto D en tres fragmentos A, B y C que pesan, respectivamente, 4, 3 y 5 lb. Si se sabe que los fragmentos se impactan contra la pared vertical en los puntos indicados, determine la rapidez de cada fragmento inmediatamente después de la explosión.

14.27 Obtenga la relación

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G$$

entre las cantidades de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ y $\mathbf{H}_G$ definidas, cada una, en las ecuaciones (14.7) y (14.24). Los vectores $\bar{\mathbf{r}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ definen, de manera respectiva, la posición y la velocidad del centro de masa G del sistema de partículas relativos al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$, y m representa la masa total del sistema.

14.28 Demuestre que la ecuación (14.23) puede obtenerse directamente de la ecuación (14.11) al sustituir la expresión dada en el problema 14.27 por $\mathbf{H}_O$.

14.29 Considere el marco de referencia $Ax'y'z'$ en traslación con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. La cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}'_A$ de un sistema de n partículas alrededor de A se define como la suma

$$\mathbf{H}'_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \tag{1}$$

de los momentos alrededor de A de las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}'_i$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia $Ax'y'z'$. Si se denota con $\mathbf{H}_A$ la suma

$$\mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

de los momentos alrededor de A de las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}_i$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$, demuestre que $\mathbf{H}_A = \mathbf{H}'_A$ en un instante dado, si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones en ese instante: *a*) A tiene velocidad cero con respecto al sistema de referencia $Oxyz$, *b*) A coincide con el centro de masa G del sistema, *c*) la velocidad $\mathbf{v}_A$ relativa a $Oxyz$ está dirigida a lo largo de la línea AG.

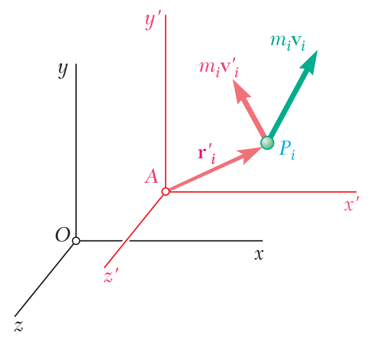


Figura P14.29

14.30 Muestre que la relación $\Sigma\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}'_A$, donde $\mathbf{H}'_A$ está definida por la ecuación (1) del problema 14.29 y donde $\Sigma\mathbf{M}_A$ representa la suma de los momentos alrededor de A de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de partículas, es válida si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones *a*) el mismo sistema de referencia $Ax'y'z'$ es un sistema de referencia newtoniano, *b*) A coincide con el centro de masa G, *c*) la aceleración $\mathbf{a}_A$ de A relativa a $Oxyz$ está dirigida a lo largo de la línea AG.

14.7. ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La energía cinética T de un sistema de partículas se define como la suma de las energías cinéticas de las diversas partículas del sistema. Por lo tanto, con referencia a la sección 13.3, se escribe

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \tag{14.28}$$

Uso de un sistema de referencia centroidal. Al calcular la energía cinética de un sistema que consta de un gran número de partículas (como en el caso de un cuerpo rígido), a menudo resulta conveniente considerar por separado el movimiento del centro de masa G del sistema y el movimiento del sistema relativo al sistema de referencia unido a G.

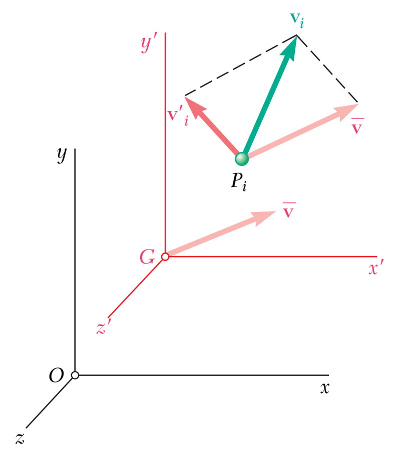


Figura 14.7

Sea P_i una partícula del sistema, $\mathbf{v}_i$ su velocidad relativa al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ y $\mathbf{v}'_i$ su velocidad relativa al sistema de referencia en movimiento $Gx'y'z'$ que está en traslación con respecto a $Oxyz$ (figura 14.7). Se recuerda de la sección anterior que

$$\mathbf{v}_i = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \tag{14.22}$$

donde $\overline{\mathbf{v}}$ denota la velocidad del centro de masa G relativa al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. Al observar que v_i^2 es igual al producto escalar $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$, se expresa la energía cinética T del sistema relativa al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ en la forma siguiente:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

o, al sustituir $\mathbf{v}_i$ de (14.22),

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [m_i(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i)] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \overline{v}^2 + \overline{\mathbf{v}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 \end{aligned}$$

La primera sumatoria representa la masa total m del sistema. Al recordar la ecuación (14.13), se nota que la segunda sumatoria es igual a $m\overline{\mathbf{v}}'$ y, en consecuencia, a cero, ya que $\overline{\mathbf{v}}'$ representa la velocidad de G relativa al sistema de referencia $Gx'y'z'$, es claramente cero. Por lo tanto, se escribe

$$T = \tfrac{1}{2} m \overline{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 \tag{14.29}$$

Esta ecuación muestra que la energía cinética T de un sistema de partículas puede obtenerse *al sumar la energía cinética del centro de masa G* (suponiendo que toda la masa está concentrada en G) y la *energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia* $Gx'y'z'$.

14.8. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

El principio del trabajo y la energía puede aplicarse a cada partícula P_i de un sistema de partículas. Se escribe

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{14.30}$$

para cada partícula P_i, donde $U_{1\to 2}$ representa el trabajo realizado por las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ y la fuerza externa resultante $\mathbf{F}_i$ actuando sobre P_i. Al sumar las energías cinéticas de las diferentes partículas del sistema y al considerar el trabajo de todas las fuerzas implicadas, se puede aplicar la ecuación (14.30) al sistema completo. Las cantidades T_1 y T_2 representan ahora la energía cinética del sistema entero y se calculan de la ecuación (14.28) o de la (14.29). La cantidad $U_{1\to 2}$ representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema. Hay que observar que si bien las fuerzas internas $\mathbf{f}_{ij}$ y $\mathbf{f}_{ji}$ son iguales y opuestas, el trabajo de estas fuerzas en general no se cancelarán, ya que las partículas P_i y P_j sobre las cuales actúan experimentarán, en general, desplazamientos diferentes. Por lo tanto, al calcular $U_{1\to 2}$ *se debe considerar el trabajo de las fuerzas internas* $\mathbf{f}_{ij}$ *así como el trabajo de las fuerzas externas* $\mathbf{F}_i$.

Si todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema son conservativas, la ecuación (14.30) puede sustituirse por

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{14.31}$$

donde V representa la energía potencial asociada con las fuerzas internas y externas que actúan sobre las partículas del sistema. La ecuación (14.31) expresa el principio de *conservación de la energía* para el sistema de partículas.

14.9. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Al integrar las ecuaciones (14.10) y (14.11) en t desde t_1 hasta t_2, se escribe

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \tag{14.32}$$

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 \tag{14.33}$$

Al recordar la definición del impulso lineal de una fuerza que se dio en la sección 13.10, se nota que las integrales en la ecuación (14.32) representan los impulsos lineales de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema. Hay que referirse de manera similar a las integrales en la ecuación (14.33) como los *impulsos angulares* alrededor de O de las fuerzas externas. De tal modo, la ecuación (14.32) expresa que la suma de los impulsos lineales de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual al cambio en la cantidad de movimiento lineal del sistema. De manera similar, la ecuación (14.33) expresa que la suma de los impulsos angulares alrededor de O de las fuerzas externas es igual al cambio en el momento angular alrededor de O del sistema.



Fotografía 14.2 Cuando una pelota de golf es golpeada fuera de la trampa de arena, cierta parte de la cantidad de movimiento del palo se transfiere a la pelota y a la arena que también es golpeada.

Para clarificar el significado físico de las ecuaciones (14.32) y (14.33), se rearreglan los términos en estas ecuaciones y se escribe

$$\mathbf{L}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{L}_2 \tag{14.34}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{14.35}$$

En los incisos *a*) y *c*) de la figura 14.8 están dibujadas las cantidades de movimiento de las partículas del sistema en los tiempos t_1 y t_2, respectivamente. En el inciso *b*) se indica un vector igual a la suma de los impulsos lineales de las fuerzas externas y un momento de par igual a la suma de los impulsos angulares alrededor de *O* de las fuerzas externas. Por simplicidad, se ha supuesto que las partículas se mueven en el plano de la figura, aunque el análisis presente sigue siendo válido en el caso de partículas que se mueven en el espacio. Al recordar de la ecuación (14.6) que **L**, por definición, es la resultante de la cantidad de movimiento $m_i \mathbf{v}_i$, se nota que la ecuación (14.34) expresa que la resultante de los vectores mostrados en los incisos *a*) y *b*) de la figura 14.8 es igual a la resultante de los vectores indicados en el inciso *c*) de la misma figura. Si se recuerda de la ecuación (14.7) que $\mathbf{H}_O$ es el momento resultante de las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}_i$, se advierte que la ecuación (14.35) expresa de manera similar que el momento resultante de los vectores en los incisos *a*) y *b*) de la figura 14.8 es igual al momento resultante de los vectores en el inciso *c*). Juntas, las ecuaciones (14.34) y (14.35) expresan entonces que *las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo* t_1 *y los impulsos de las fuerzas externas desde* t_1 *hasta* t_2 *forman un sistema de vectores equipolente al sistema de las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo* t_2. Esto se ha indicado en la figura 14.8 mediante el uso de signos de más y de igualdad en color azul.

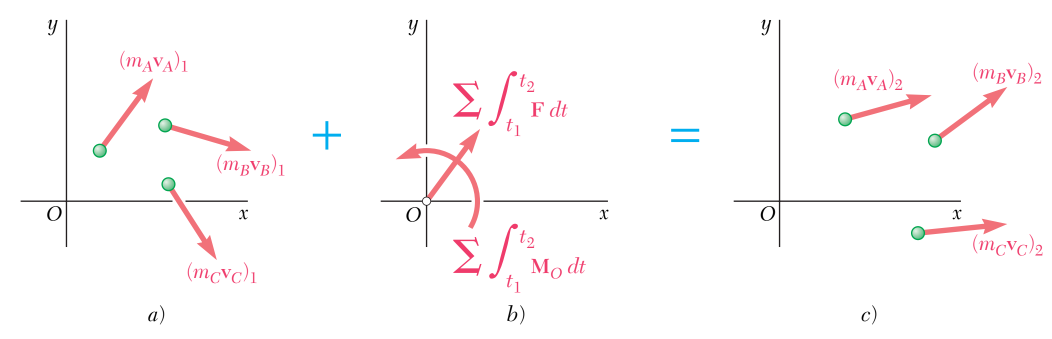


Figura 14.8

Si ninguna fuerza externa actúa sobre las partículas del sistema, las integrales en las ecuaciones (14.34) y (14.35) son cero, y estas ecuaciones producen

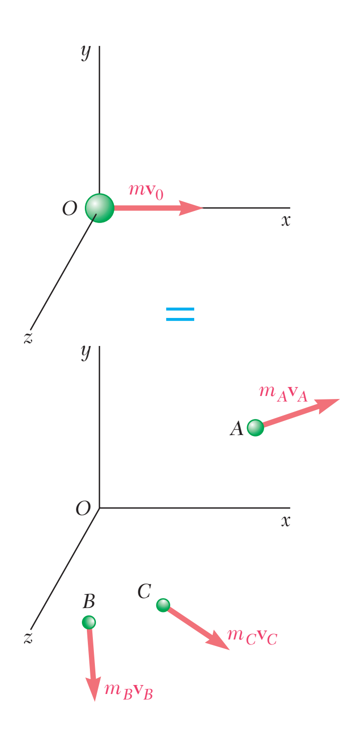
$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \tag{14.36}$$
$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{14.37}$$

De este modo se verifica el resultado obtenido en la sección 14.6: si ninguna fuerza externa actúa sobre las partículas de un sistema, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular alrededor de *O* del sistema de partículas se conservan. El sistema de la cantidad de movimiento inicial es equipolente al sistema de la cantidad de movimiento final y, por lo tanto, la cantidad del movimiento angular del sistema de partículas alrededor de *cualquier* punto fijo se conserva.

PROBLEMA RESUELTO 14.3

Para el vehículo espacial de 200 kg del problema resuelto 14.1, se sabe que en $t = 2.5$ s, si la velocidad de la parte A es $\mathbf{v}_A = (270 \text{ m/s})\mathbf{i} - (120 \text{ m/s})\mathbf{j} + (160 \text{ m/s})\mathbf{k}$ y la velocidad de la parte B es paralela al plano xz. Determine la velocidad de la parte C.

SOLUCIÓN



Puesto que no hay fuerza externa, la cantidad de movimiento inicial $m\mathbf{v}_0$ es equipolente al sistema de las cantidades de movimiento finales. Igualando primero las sumas de los vectores en ambas partes del dibujo adjunto y después las sumas de sus momentos alrededor de O, se escribe

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2: \qquad m\mathbf{v}_0 = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B + m_C\mathbf{v}_C \tag{1}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2: \qquad 0 = \mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A + \mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B + \mathbf{r}_C \times m_C\mathbf{v}_C \tag{2}$$

Al recordar del problema resuelto 14.1 que $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$,

$$m_A = 100 \text{ kg} \qquad m_B = 60 \text{ kg} \qquad m_C = 40 \text{ kg}$$
$$\mathbf{r}_A = (555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_B = (255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k}$$

y utilizar la información que se dio en el enunciado de este problema, se reescriben las ecuaciones (1) y (2) del modo siguiente:

$$200(150\mathbf{i}) = 100(270\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 160\mathbf{k}) + 60[(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_z\mathbf{k}] + 40[(v_C)_x\mathbf{i} + (v_C)_y\mathbf{j} + (v_C)_z\mathbf{k}] \tag{1'}$$

$$0 = 100\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 255 & 0 & -120 \\ (v_B)_x & 0 & (v_B)_z \end{vmatrix} + 40\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 105 & 450 & -420 \\ (v_C)_x & (v_C)_y & (v_C)_z \end{vmatrix} \tag{2'}$$

Al igualar a cero el coeficiente de $\mathbf{j}$ en (1′) y los coeficientes de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{k}$ en (2′), se escribe, después de simplificaciones, las tres ecuaciones escalares

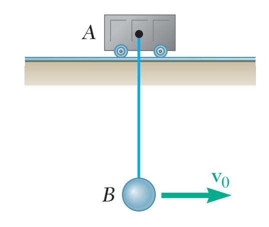
$$(v_C)_y - 300 = 0$$
$$450(v_C)_z + 420(v_C)_y = 0$$
$$105(v_C)_y - 450(v_C)_x - 45\,000 = 0$$

las cuales producen, respectivamente,

$$(v_C)_y = 300 \qquad (v_C)_z = -280 \qquad (v_C)_x = -30$$

La velocidad de la parte C es entonces

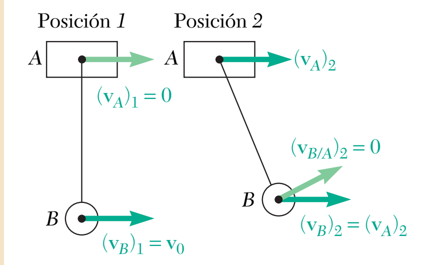
$$\mathbf{v}_C = -(30 \text{ m/s})\mathbf{i} + (300 \text{ m/s})\mathbf{j} - (280 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 14.4

La bola B, de masa m_B, se suspende de una cuerda de longitud l unida al carro A, de masa m_A, que rueda con libertad sobre una pista horizontal sin fricción. Si a la bola se le da una velocidad horizontal inicial $\mathbf{v}_0$ mientras el carro está en reposo, determine *a*) la velocidad de B cuando ésta alcanza su elevación máxima, *b*) la distancia vertical máxima h a que se elevará B. (Se supone que $v_0^2 < 2gl$.)

SOLUCIÓN

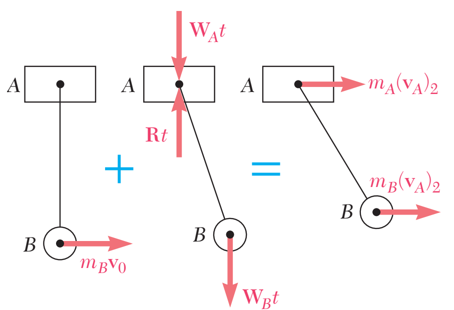


El principio del impulso-cantidad de movimiento y el principio de conservación de la energía se aplicarán al sistema carro-bola entre su posición inicial *1* y la posición *2*, cuando B alcanza su elevación máxima.

Velocidades ***Posición 1:*** $(\mathbf{v}_A)_1 = 0 \qquad (\mathbf{v}_B)_1 = \mathbf{v}_0$ (1)

Posición 2: Cuando la bola B alcanza su elevación máxima, su velocidad $(\mathbf{v}_{B/A})_2$ relativa a su soporte A es cero. De tal modo, en ese instante, su velocidad absoluta es

$$(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 + (\mathbf{v}_{B/A})_2 = (\mathbf{v}_A)_2 \tag{2}$$



Principio del impulso-cantidad de movimiento. Al observar que los impulsos externos consisten en $\mathbf{W}_A t$, $\mathbf{W}_B t$ y $\mathbf{R}t$, donde $\mathbf{R}$ es la reacción de la pista sobre el carro y recordando (1) y (2) se dibuja el diagrama de impulso-cantidad de movimiento y se escribe

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \textbf{ Ext Imp}_{1\to 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

$\xrightarrow{+}$ componentes x: $\qquad m_B v_0 = (m_A + m_B)(v_A)_2$

que expresa que la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva en la dirección horizontal. Al resolver para $(v_A)_2$:

$$(v_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \qquad (\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \rightarrow \quad ◀$$

Conservación de energía

Posición 1. ***Energía potencial:*** $V_1 = m_A g l$
Energía cinética: $T_1 = \frac{1}{2} m_B v_0^2$

Posición 2. ***Energía potencial:*** $V_2 = m_A g l + m_B g h$
Energía cinética: $T_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \qquad \tfrac{1}{2} m_B v_0^2 + m_A g l = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2 + m_A g l + m_B g h$$

Al resolver para h, se tiene

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_A + m_B}{m_B} \frac{(v_A)_2^2}{2g}$$

o, al sustituir para $(v_A)_2$ la expresión que se encontró arriba,

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_B}{m_A + m_B} \frac{v_0^2}{2g} \qquad h = \frac{m_A}{m_A + m_B} \frac{v_0^2}{2g} \quad ◀$$

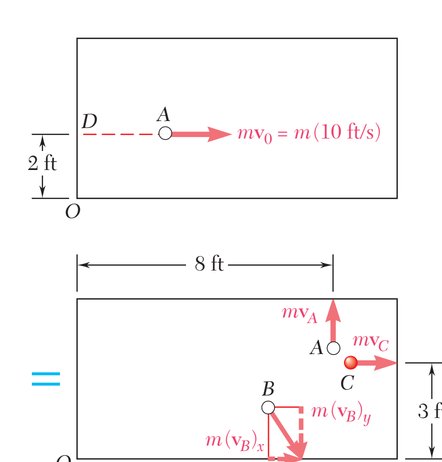
Comentarios. 1) Al recordar que $v_0^2 < 2gl$, de acuerdo con la última ecuación $h < l$, se verifica de tal modo que B permanece debajo de A como se supuso en la solución.

2) para $m_A \gg m_B$, la respuesta que se obtuvo se reduce a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = 0$ y $h = v_0^2/2g$; B oscila como un péndulo simple con A fijo. Para $m_A \ll m_B$, el problema se reduce a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{v}_0$ y $h = 0$; A y B se mueven con la misma velocidad constante $\mathbf{v}_0$.

PROBLEMA RESUELTO 14.5

En un juego de billar, a la bola A se le da una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de magnitud $v_0 = 10$ ft/s a lo largo de la línea DA paralela al eje de la mesa. Esta bola choca con la bola B y luego con la bola C, las cuales se encuentran en reposo. Si se sabe que A y C inciden perpendicularmente en las laterales de la mesa en los puntos A' y C', respectivamente, que B choca con la lateral de manera oblicua en B', y se suponen superficies sin fricción, así como impactos perfectamente elásticos, determine las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ con las cuales las bolas chocan con las laterales de la mesa. (*Comentario.* En este problema resuelto y en varios de los problemas que siguen, se supone que las bolas de billar son partículas que se mueven con libertad en un plano horizontal, y no como las esferas rodantes y deslizantes que realmente son.)

SOLUCIÓN



Conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que no hay fuerza externa, el momento inicial $m\mathbf{v}_0$ es equipolente al sistema de cantidades de movimiento después de los dos choques (y antes de que cualquiera de las bolas golpee las laterales de la mesa). Con referencia al dibujo adjunto, se escribe

$\xrightarrow{+}$ componentes x: $\quad m(10 \text{ ft/s}) = m(v_B)_x + mv_C \qquad (1)$

$+\uparrow$ componentes y: $\quad 0 = mv_A - m(v_B)_y \qquad (2)$

$+\circlearrowleft$ momentos alrededor de O: $-(2 \text{ ft})m(10 \text{ ft/s}) = (8 \text{ ft})mv_A - (7 \text{ ft})m(v_B)_y - (3 \text{ ft})mv_C \qquad (3)$

Al resolver las tres ecuaciones para v_A, $(v_B)_x$ y $(v_B)_y$ en términos de v_C,

$$v_A = (v_B)_y = 3v_C - 20 \qquad (v_B)_x = 10 - v_C \qquad (4)$$

Conservación de la energía. Puesto que las superficies son sin fricción y los impactos perfectamente elásticos, la energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$ es igual a la energía cinética final del sistema:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 + \tfrac{1}{2}m_C v_C^2$$
$$v_A^2 + (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 + v_C^2 = (10 \text{ ft/s})^2 \qquad (5)$$

Al sustituir v_A, $(v_B)_x$ y $(v_B)_y$ de (4) en (5), se tiene

$$2(3v_C - 20)^2 + (10 - v_C)^2 + v_C^2 = 100$$
$$20v_C^2 - 260v_C + 800 = 0$$

Al resolver para v_C, se encuentra que $v_C = 5$ ft/s y $v_C = 8$ ft/s. Puesto que sólo la segunda raíz produce un valor positivo de v_A después de sustituir en las ecuaciones (4), se concluye que $v_C = 8$ ft/s y

$$v_A = (v_B)_y = 3(8) - 20 = 4 \text{ ft/s} \qquad (v_B)_x = 10 - 8 = 2 \text{ ft/s}$$

$\mathbf{v}_A = 4 \text{ ft/s}\uparrow \qquad \mathbf{v}_B = 4.47 \text{ ft/s} \searrow 63.4° \qquad \mathbf{v}_C = 8 \text{ ft/s} \rightarrow$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la lección anterior se definió la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas. En esa lección se definió la *energía cinética* T de un sistema de partículas:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \qquad (14.28)$$

La solución de los problemas en la sección anterior se basó en la conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas o en la observación del movimiento del centro de masa de un sistema de partículas. En esta lección se resolverán problemas que implican lo siguiente:

1. Cálculo de la energía cinética perdida en choques. La energía cinética T_1 del sistema de partículas antes de los choques y su energía cinética T_2 después de los mismos se calcula a partir de la ecuación (14.28) y se resta una de la otra. Teniendo presente que, si bien la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular son cantidades vectoriales, la energía cinética es una cantidad *escalar*.

2. Conservación de la cantidad de movimiento lineal y conservación de la energía. Como se estudió en la lección anterior, cuando la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas es cero, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema. En problemas que implican movimiento en dos dimensiones, el señalamiento de que la cantidad de movimiento lineal inicial y la cantidad de movimiento lineal final del sistema son equipolentes produce dos ecuaciones algebraicas. La igualación de la energía total inicial del sistema de partículas (incluyendo la energía potencial, así como la energía cinética) con su energía total final produce una ecuación adicional. En consecuencia, es posible escribir tres ecuaciones que pueden resolverse para tres incógnitas [problema resuelto 14.5]. Hay que observar que si la resultante de las fuerzas externas no es cero y tiene una dirección fija, la componente de la cantidad de movimiento lineal en una dirección perpendicular a la resultante se sigue conservando; el número de ecuaciones que es posible utilizar se reduce entonces a dos [problema resuelto 14.4].

3. Conservación de las cantidades de movimiento lineal y angular. Cuando no actúan fuerzas externas sobre un sistema de partículas, se conservan tanto la cantidad de movimiento lineal del sistema como su cantidad de movimiento angular alrededor de algún punto arbitrario. En el caso de movimiento en tres dimensiones, lo anterior permitirá escribir hasta seis ecuaciones, aunque quizá sea necesario resolver únicamente alguna de ellas para obtener las respuestas deseadas [problema resuelto 14.3]. En el caso de movimiento bidimensional, será factible escribir tres ecuaciones que podrán resolverse para tres incógnitas.

4. Conservación de las cantidades de movimiento lineal y angular y conservación de la energía. En el caso de movimiento en dos dimensiones de un sistema de partículas que no está sujeto a ninguna fuerza externa, se obtendrán dos ecuaciones algebraicas al expresar la conservación de la cantidad de movimiento lineal del sistema, una ecuación al escribir que se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de algún punto arbitrario, y una cuarta ecuación al expresar que se conserva la energía total del sistema. Con estas ecuaciones se pueden despejar cuatro incógnitas.

Problemas

14.31 Si el empleado de la línea aérea del problema 14.1 primero lanza la maleta de 15 kg sobre el carrito para equipaje, determine la energía perdida *a*) cuando la primera maleta entra en contacto con el carrito, *b*) cuando la segunda maleta hace contacto con el carrito.

14.32 Determine la energía perdida como resultado de la serie de choques que se describe en el problema 14.7.

14.33 En el problema 14.3, determine el trabajo realizado por la mujer y por el hombre cuando se lanzan del bote, suponiendo que la mujer se lanza primero.

14.34 En el problema 14.5, determine la energía que se pierde cuando la bala *a*) pasa a través del bloque *A* y *b*) queda incrustada en el bloque *B*.

14.35 Dos automóviles *A* y *B*, de masa m_A y m_B viajan en direcciones opuestas cuando chocan de frente. El impacto se supone perfectamente plástico y, además, se considera que la energía absorbida por cada automóvil es igual a su pérdida de energía cinética con respecto a un sistema de referencia en movimiento unido al centro de masa del sistema de los dos vehículos. Si se denota con E_A y E_B la energía que absorben los automóviles *A* y *B*, *a*) demuestre que $E_A/E_B = m_B/m_A$, es decir, la cantidad de energía que absorbe cada vehículo es inversamente proporcional a su masa. *b*) Calcule E_A y E_B, si se sabe que $m_A = 1\,600$ kg y $m_B = 900$ kg y que las velocidades de *A* y *B* son, respectivamente, 90 y 60 km/h.



Figura *P14.35*

14.36 Se supone que cada uno de los dos automóviles implicados en el choque descrito en el problema 14.35 se han diseñado para soportar de manera segura una prueba en la cual se estrellan contra una pared sólida e inamovible, a la rapidez v_0. La severidad del choque del problema 14.35 puede medirse entonces para cada vehículo por medio del cociente de la energía absorbida en el choque y la energía absorbida en la prueba. Sobre esa base, demuestre que el choque descrito en el problema 14.35 es $(m_A/m_B)^2$ veces más severo para el automóvil *B* que para el automóvil *A*.

14.37 Retome el problema resuelto 14.4, y ahora suponga que al carro *A* se le da una velocidad horizontal inicial $\mathbf{v}_0$ mientras la bola *B* está en reposo.

14.38 En un juego de billar, la bola A se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ cuando golpea a las bolas B y C, las cuales están en reposo una al lado de la otra. Si se suponen superficies sin fricción y un impacto perfectamente elástico (esto es, conservación de energía), determine la velocidad final de cada bola, suponiendo que la trayectoria de A *a*) está perfectamente centrada y que A golpea de manera simultánea a B y C, *b*) no está perfectamente centrada y que A golpea a B un poco antes de golpear a C.

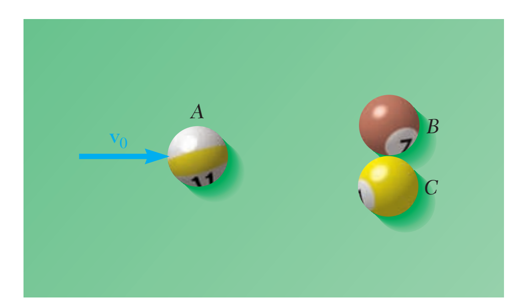


Figura P14.38

14.39 y 14.40 En un juego de billar la bola A se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0$ de magnitud $v_0 = 15$ ft/s cuando choca contra las bolas B y C, las cuales se encuentran en reposo y alineadas como se muestra. Si después del choque las tres bolas se mueven en las direcciones indicadas y se suponen superficies sin fricción y un impacto perfectamente elástico (esto es, conservación de energía), determine las magnitudes de las velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$.

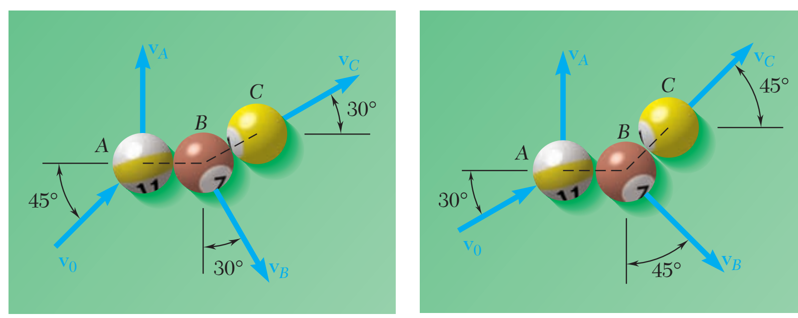


Figura P14.39 **Figura P14.40**

14.41 Dos hemisferios se conservan unidos mediante una cuerda que mantiene comprimido a un resorte (el resorte no está unido a los hemisferios). La energía potencial del resorte comprimido es igual a 120 J y el ensamble tiene una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de magnitud $v_0 = 8$ m/s. Si la cuerda se rompe cuando $\theta = 30°$, lo que ocasiona que los hemisferios se separen, determine la velocidad resultante de cada hemisferio.

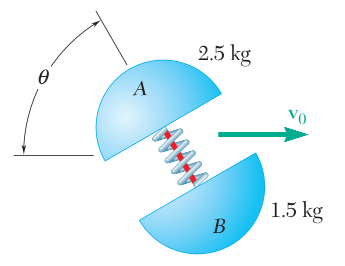


Figura P14.41

14.42 Retome el problema 14.41, si se sabe que la cuerda se rompe cuando $\theta = 120°$.

14.43 Un bloque B de 40 lb está suspendido de una cuerda de 6 ft unida a un carrito A de 60 lb, el cual puede rodar libremente sobre una pista horizontal y sin fricción. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine las velocidades de A y B cuando B pasa directamente debajo de A.

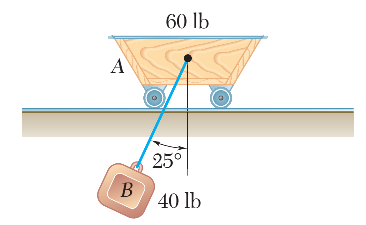


Figura *P14.43*

14.44 Tres esferas, cada una de masa m, se pueden deslizar con libertad sobre una superficie horizontal sin fricción. Las esferas A y B están unidas a una cuerda inextensible e inelástica de longitud l y se encuentran en reposo en la posición que se muestra cuando la esfera C, que se está moviendo a la derecha con una velocidad $\mathbf{v}_0$, choca frontalmente contra la esfera B. Si la cuerda no está tensa cuando la esfera C choca con la esfera B y se supone un impacto perfectamente elástico entre B y C, determine a) la velocidad de cada esfera inmediatamente después de que la cuerda se tensa, b) la fracción de la energía cinética inicial del sistema que se disipa cuando la cuerda se pone tensa.

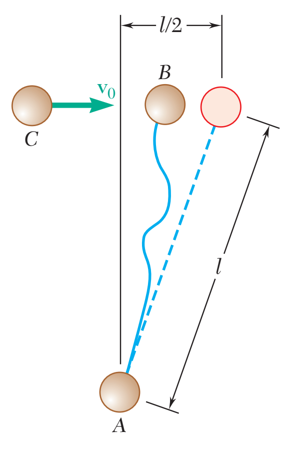


Figura *P14.44*

14.45 Un vehículo espacial de 360 kg que viaja con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (450 \text{ m/s})\mathbf{k}$ pasa por el origen O. Después, mediante cargas explosivas se separa al vehículo en tres partes A, B y C, con masas respectivas de 60, 120 y 180 kg. Si poco tiempo después las posiciones de las tres partes son $A(72, 72, 648)$, $B(180, 396, 972)$ y $C(-144, -288, 576)$, donde las coordenadas se expresan en metros, y se sabe que la velocidad de B es $\mathbf{v}_B = (150 \text{ m/s})\mathbf{i} + (330 \text{ m/s})\mathbf{j} + (660 \text{ m/s})\mathbf{k}$, y que la componente x de la velocidad de C es -120 m/s, determine la velocidad de la parte A.

14.46 En el experimento de dispersión del problema 14.24, se sabe que la partícula alfa se proyecta desde $A_0(300, 0, 300)$ y que choca con el núcleo de oxígeno C en $Q(240, 200, 100)$, donde todas las coordenadas se expresan en milímetros. Determine las coordenadas del punto B_0 donde la trayectoria original del núcleo B interseca el plano zx. (*Sugerencia*: Exprese que la cantidad de movimiento angular de las tres partículas alrededor de Q se conserva.)

14.47 Dos pequeñas esferas A y B, que pesan 5 y 2 lb, respectivamente, se conectan mediante una varilla rígida de longitud l y de peso despreciable. Las dos esferas descansan sobre una superficie horizontal sin fricción cuando a A se le imparte repentinamente la velocidad $\mathbf{v}_0 = (10.5 \text{ ft/s})\mathbf{i}$. Determine a) la cantidad de movimiento lineal del sistema y su cantidad de movimiento angular alrededor de su centro de masa G y b) las velocidades de A y B después de que la varilla AB ha girado 180°.

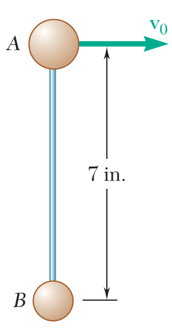


Figura *P14.47*

14.48 Retome el problema 14.47, y ahora suponga que es a la esfera B a la que se le imparte repentinamente la velocidad $\mathbf{v}_0 = (10.5 \text{ ft/s})\mathbf{i}$.

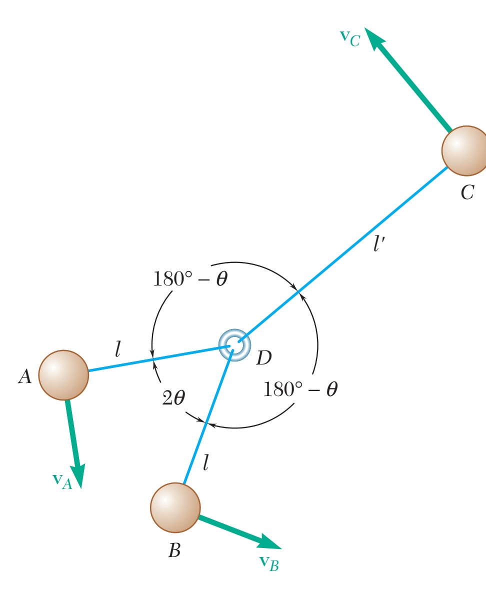


Figura P14.49

14.49 Tres esferas idénticas A, B y C, que pueden deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción, se conectan mediante cuerdas inelásticas e inextensibles a un pequeño anillo D ubicado en el centro de masa de las tres esferas ($l' = 2l \cos \theta$). Las esferas están rotando inicialmente alrededor del anillo D, que está en reposo, a velocidades proporcionales a sus distancias de D. Se denota con v_0 la rapidez original de A y B y se supone que $\theta = 30°$. Repentinamente se rompe la cuerda CD, lo que ocasiona que la esfera C se aleje deslizándose. Considere el movimiento de las esferas A y B y del anillo D después de que las otras dos cuerdas se han tensado de nuevo y determine *a*) la rapidez del anillo D, *b*) la rapidez relativa a la cual giran las esferas A y B alrededor de D y *c*) el porcentaje de la energía del sistema original que se disipa cuando las cuerdas AD y BD se vuelven a tensar.

14.50 Retome el problema 14.49, y ahora suponga que $\theta = 45°$.

14.51 Dos discos pequeños, A y B, de 3 y 1.5 kg de masa, respectivamente, se pueden deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción. Están conectados mediante una cuerda de 600 mm de largo, y giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de su centro de masa G a razón de 10 rad/s. En $t = 0$, las coordenadas de G son $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 2$ m y su velocidad es $\bar{\mathbf{v}}_0 = (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.96 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Poco tiempo después se rompe la cuerda; se observa luego que el disco A se mueve a lo largo de una trayectoria paralela al eje y y que el disco B lo hace por una trayectoria que interseca al eje x a una distancia $b = 7.5$ m de O. Determine *a*) las velocidades de A y B después de que se rompe la cuerda, *b*) la distancia a desde el eje y a la trayectoria de A.

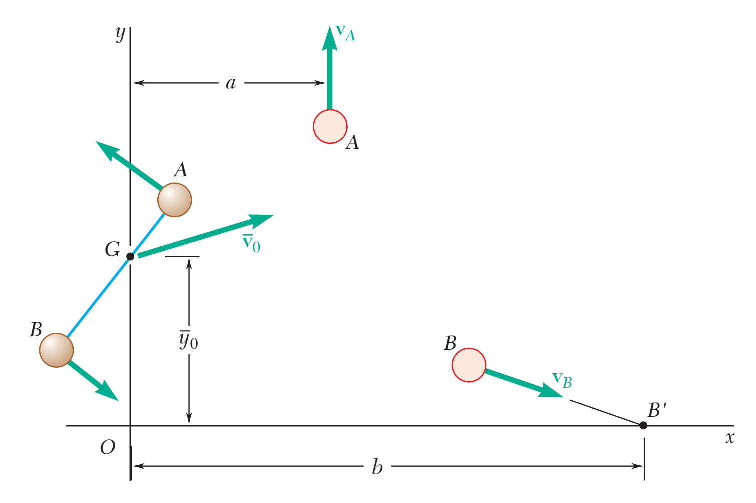


Figura P14.51 y P14.52

14.52 Dos discos pequeños, A y B, de 2 y 1 kg de masa, respectivamente, pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción. Se conectan mediante una cuerda de masa despreciable y giran alrededor de su centro de masa G. En $t = 0$, G se mueve con la velocidad $\bar{\mathbf{v}}_0$ y sus coordenadas son $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 1.89$ m. Poco después se rompe la cuerda y se observa que el disco A se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_A = (5 \text{ m/s})\mathbf{j}$ en línea recta y a una distancia $a = 2.56$ m desde el eje y, en tanto que B lo hace con una velocidad $\mathbf{v}_B = (7.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (4.6 \text{ m/s})\mathbf{j}$ a lo largo de una trayectoria que interseca al eje x a una distancia $b = 7.48$ m desde el origen O. Determine *a*) la velocidad inicial $\bar{\mathbf{v}}_0$ del centro de masa G de los dos discos, *b*) la longitud de la cuerda que conecta inicialmente a los dos discos, *c*) la rapidez en rad/s a la cual los dos discos giraban alrededor de G.

14.53 En un juego de billar a la bola A se le da una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ a lo largo del eje longitudinal de la mesa. Choca con la bola B y luego con la bola C, las cuales están en reposo. Se observa que las bolas A y C chocan de manera frontal con las laterales de la mesa en A' y C', respectivamente, y que la bola B choca en forma oblicua con la lateral en B'. Si $v_0 = 12$ ft/s, $v_A = 5.76$ ft/s y $a = 66$ in., determine *a*) las velocidades $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$ de las bolas B y C, y *b*) el punto C' donde la bola C choca con la lateral de la mesa. Suponga superficies sin fricción e impactos perfectamente elásticos (esto es, conservación de energía).

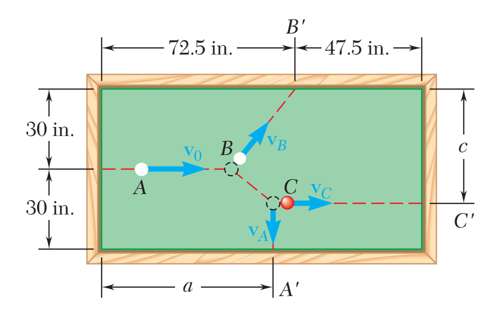


Figura P14.53

14.54 Para el juego de billar del problema 14.53, ahora suponga que $v_0 = 15$ ft/s, $v_C = 9.6$ ft/s y $c = 48$ in. Determine *a*) las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de las bolas A y B, *b*) el punto A' donde la bola A hace contacto con la lateral de la mesa.

14.55 Tres pequeñas esferas idénticas A, B y C, que pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción, están unidas a tres cuerdas, de 200 mm de largo, las cuales están amarradas a un anillo G. Al principio las esferas giran en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del anillo, con una velocidad relativa de 0.8 m/s y el anillo se mueve a lo largo del eje x con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (0.4 \text{ m/s})\mathbf{i}$. De repente se rompe el anillo y las tres esferas se mueven libremente en el plano xy con A y B siguiendo trayectorias paralelas al eje y a una distancia $a = 346$ mm una de la otra y C siguiendo una trayectoria paralela al eje x. Determine *a*) la velocidad de cada esfera y *b*) la distancia d.

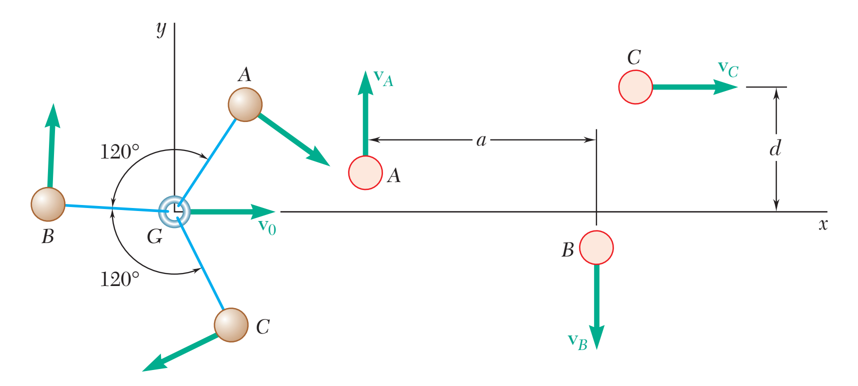


Figura *P14.55* y *P14.56*

14.56 Tres pequeñas esferas idénticas A, B y C, que pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción, están unidas a tres cuerdas de longitud l, las cuales se encuentran amarradas al anillo G. Al principio las esferas giran, en el sentido de las manecillas del reloj, alrededor del anillo que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad $\mathbf{v}_0$. De repente el anillo se rompe y las tres esferas se mueven libremente en el plano xy. Si $\mathbf{v}_A = (1.039 \text{ m/s})\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_C = (1.800 \text{ m/s})\mathbf{i}$, $a = 416$ mm y $d = 240$ mm, determine *a*) la velocidad inicial del anillo, *b*) la longitud l de las cuerdas, *c*) la tasa en rad/s a la cual las esferas rotaban alrededor de G.

*14.10. SISTEMAS VARIABLES DE PARTÍCULAS

Todos los sistemas de partículas considerados hasta ahora están compuestos por partículas bien definidas. Estos sistemas no ganarán o perderán partículas durante su movimiento. Sin embargo, en un gran número de aplicaciones de ingeniería es necesario considerar *sistemas variables de partículas*, esto es, sistemas que están ganando o perdiendo continuamente partículas o ambas cosas al mismo tiempo. Considere, por ejemplo, una turbina hidráulica. Su análisis implica la determinación de las fuerzas ejercidas por una corriente de agua sobre los álabes giratorios, y se advierte que las partículas de agua en contacto con los álabes forman un sistema que cambia en todo momento y que adquiere y pierde partículas de manera continua. Los cohetes proporcionan otro ejemplo de sistemas variables, ya que su propulsión depende de la expulsión continua de partículas de combustible.

Recuérdese que todos los principios de la cinética establecidos hasta ahora se dedujeron para sistemas constantes de partículas, los cuales ni las ganan ni las pierden. Por lo tanto, se debe encontrar una forma de reducir el análisis de un sistema variable de partículas al de un sistema constante auxiliar. El procedimiento seguido se indica en las secciones 14.11 y 14.12 para dos amplias categorías de aplicaciones: una corriente estacionaria de partículas y un sistema que gana o pierde masa.

*14.11. CORRIENTE ESTACIONARIA DE PARTÍCULAS

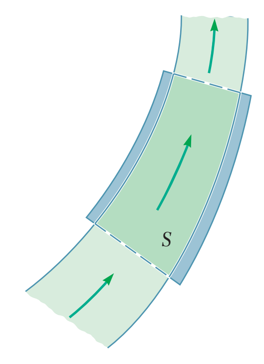


Figura 14.9

Considere una corriente estacionaria de partículas, tal como un chorro de agua que desvía una paleta fija o un flujo de aire que pasa por un ducto o por un ventilador. Para determinar la resultante de las fuerzas ejercidas sobre las partículas en contacto con la paleta, el ducto o el ventilador, se aíslan estas partículas y se denota por S el sistema definido de esa manera (figura 14.9). Observe que S es un sistema variable de partículas, ya que de manera continua gana las partículas que fluyen hacia su interior e igualmente pierde un número igual de partículas que fluyen hacia afuera del sistema. Por lo tanto, los principios de la cinética que se han establecido hasta ahora no pueden aplicarse de manera directa a S.

Sin embargo, se puede definir con facilidad un sistema auxiliar de partículas que permanece constante durante un breve intervalo de tiempo Δt. Considere al tiempo t el sistema S *más* las partículas que entrarán a S durante el intervalo de tiempo Δt (figura 14.10*a*). A continuación, considere al tiempo $t + \Delta t$ el sistema S *más* las partículas que han salido de S durante el intervalo de tiempo Δt (figura 14.10*c*). Claramente, *las mismas partículas están implicadas en ambos casos*, y es posible aplicar a aquellas partículas el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que la masa total m del sistema S permanece constante, las partículas que entran al sistema y aquellas que salen de él en el tiempo Δt deben tener la misma masa Δm. Denotando por $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente, las velocidades de las partículas que entran a S en A y las que salen de S en B, se representa en la figura 14.10*a* la cantidad de movimiento de las partículas que entran a S por $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ y la cantidad de movimiento de las partículas que salen de S por $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ (figura 14.10*c*). Se representan también mediante vectores apropiados las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}_i$ de las partículas que forman a S y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S y se indica mediante signos más e igual en azul que el sistema de las cantidades de movimientos e impulsos en los incisos *a*) y *b*) de la figura 14.10 es equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el inciso *c*) de la misma figura.

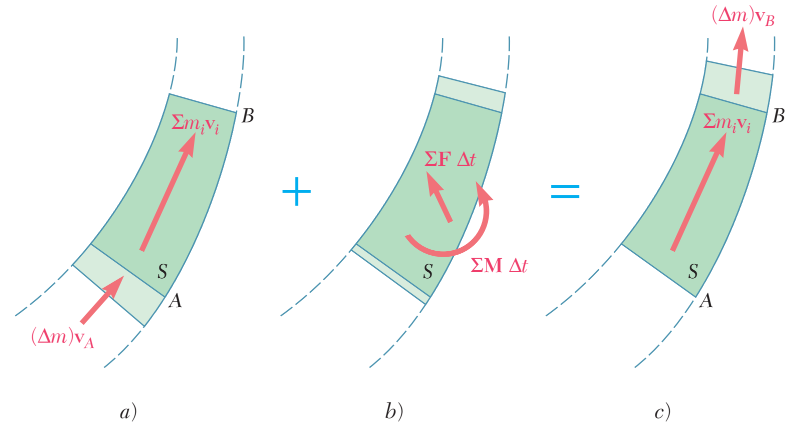


Figura 14.10

La sumatoria $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ de las cantidades de movimiento de las partículas de S se encuentra a ambos lados del signo de igualdad y por ello puede omitirse. Se concluye que *el sistema formado por la cantidad de movimiento* $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ *de las partículas que entran a* S *en el tiempo* Δt *y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre* S *durante ese tiempo es equipolente a la cantidad de movimiento* $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ *de las partículas que salen de* S *en el mismo tiempo* Δt. Por lo tanto, es posible escribir

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \Sigma \mathbf{F}\ \Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \tag{14.38}$$

Se puede obtener una ecuación similar considerando los momentos de los vectores que intervienen (véase el problema resuelto 14.5). Al dividir todos los términos de la ecuación (14.38) entre Δt y dejando que Δt tienda a cero, se obtiene en el límite

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \tag{14.39}$$

donde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa la diferencia entre el *vector* $\mathbf{v}_B$ y el *vector* $\mathbf{v}_A$.

Si se usan unidades del SI, dm/dt se expresa en kg/s y las velocidades en m/s; se verifica que ambos miembros de la ecuación (14.39) se expresan en las mismas unidades (newtons). Si se recurre a unidades de uso común en Estados Unidos, dm/dt debe expresarse en slugs/s y las velocidades en ft/s. Se verifica de nuevo que ambos miembros de la ecuación se expresen en las mismas unidades (libras).†

El principio establecido se usa para analizar un gran número de aplicaciones de ingeniería. Algunas de las más comunes de estas aplicaciones se considerarán a continuación.

†Muchas veces es conveniente expresar el gasto de masa dm/dt como el producto ρQ, donde ρ es la densidad de la corriente (masa por unidad de volumen) y Q su gasto de volumen (volumen por unidad de tiempo). Si se usan unidades del SI, ρ se expresa en kg/m^3 (por ejemplo, $\rho = 1\,000$ kg/m^3 para el agua) y Q en m^3/s. Sin embargo, si se recurre a unidades de uso común en Estados Unidos, ρ por lo general tendrá que calcularse a partir del peso específico correspondiente γ (peso por unidad de volumen) $\rho = \gamma/g$. Puesto que γ se expresa en lb/ft^3 (por ejemplo, $\gamma = 62.4$ lb/ft^3 para el agua), ρ se obtiene en slugs/ft^3. El gasto de volumen Q se expresa en ft^3/s.

Corriente de fluido desviada por una paleta. Si la paleta está fija, el método de análisis que se indicó antes puede aplicarse de manera directa para determinar la fuerza **F** ejercida por la paleta sobre la corriente. **F** es la única fuerza que necesita considerarse, ya que la presión en la corriente es constante (presión atmosférica). La fuerza ejercida por la corriente sobre la paleta será igual y opuesta a **F**. Si la paleta se mueve con una velocidad constante, la corriente no es estacionaria. Sin embargo, parecerá estacionaria para un observador que se mueve con la paleta. Por lo tanto, se debe elegir un sistema de ejes que se muevan con ella. Puesto que dicho sistema de ejes no está acelerado, la ecuación (14.38) puede seguirse usando, aunque $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ deben sustituirse por las *velocidades relativas* de la corriente con respecto a la paleta (véase el problema resuelto 14.7).

Flujo de fluido por el interior de un tubo. La fuerza que ejerce el fluido sobre una transición de un tubo tal como una curva o un estrechamiento puede determinarse al considerar el sistema de partículas S en contacto con la transición. Puesto que en general variará la presión en el flujo, también se deben considerar las fuerzas que ejercen sobre S las partes colindantes del fluido.

Motor a reacción. En un motor a reacción, el aire entra sin velocidad por el frente del motor y sale por la parte posterior con una velocidad elevada. La energía que se requiere para acelerar las partículas de aire se obtiene al quemar el combustible. La masa del combustible quemado en los gases de escape será de manera usual lo suficientemente pequeña comparada con la masa del aire que fluye por el motor y debido a ello será posible ignorarla. De tal modo, el análisis de un motor a reacción se reduce al de una corriente de aire. Ésta puede considerarse como una corriente estacionaria si todas las velocidades se miden con respecto al avión. En consecuencia, se supondrá que las corrientes de aire entran al motor con una velocidad **v** de magnitud igual a la rapidez del avión y que salen con una velocidad **u** igual

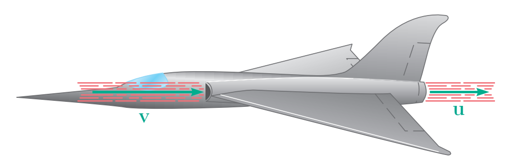


Figura 14.11

a la velocidad relativa de los gases de escape (figura 14.11). Como las presiones de entrada y salida son casi iguales a la atmosférica, la única fuerza externa que necesita considerarse es la ejercida por el motor sobre la corriente de aire. Esta fuerza es igual y opuesta al empuje.[†]

[†]Advierta que si se acelera el avión, no es posible utilizarlo como un sistema de referencia newtoniano. Sin embargo, se obtendrá el mismo resultado para el empuje, al recurrir a un sistema de referencia en reposo con respecto a la atmósfera, ya que en ese caso se observará que las partículas de aire entrarán al motor sin velocidad y saldrán de él con una velocidad de magnitud $u - v$.

Ventilador. Considere el sistema de partículas S que se muestra en la figura 14.12. La velocidad $\mathbf{v}_A$ de las partículas que entran al sistema se supone igual a cero, y la velocidad $\mathbf{v}_B$ de las partículas que salen del sistema es la velocidad del *viento de hélice o torbellino.* La velocidad del gasto se obtiene al multiplicar v_B por el área de la sección transversal del viento de hélice o torbellino. Puesto que toda la presión alrededor de S es la atmosférica, la única fuerza externa que actúa sobre S es el empuje del ventilador.

Helicóptero. La determinación del empuje creado por las hélices giratorias de un helicóptero en vuelo es similar a la determinación del empuje de un ventilador. La velocidad $\mathbf{v}_A$ de las partículas de aire cuando éstas se aproximan a las hélices se supone igual a cero, y la velocidad del gasto se obtiene al multiplicar la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}_B$ del viento de hélice por su área de sección transversal.

Figura 14.12

*14.12. SISTEMAS QUE GANAN O PIERDEN MASA

En seguida se analiza un tipo diferente de sistema variable de partículas, a saber, un sistema que gana masa al absorber continuamente partículas o que pierde masa al expulsar partículas de manera continua. Considere el sistema S que se muestra en la figura 14.13. Su masa, igual a m en el instante t, aumenta en Δm en el intervalo de tiempo Δt. Para aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento al análisis de este sistema, se debe considerar en el tiempo t al sistema S *más* las partículas de masa Δm que absorbe S durante el intervalo de tiempo Δt. La velocidad de S en el tiempo t se denota mediante $\mathbf{v}$, la velocidad de S en el tiempo $t + \Delta t$ se denota mediante $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, y la velocidad absoluta de las partículas absorbidas se denota por medio de $\mathbf{v}_a$. Al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento, se escribe

$$m\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}_a + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) \qquad (14.40)$$

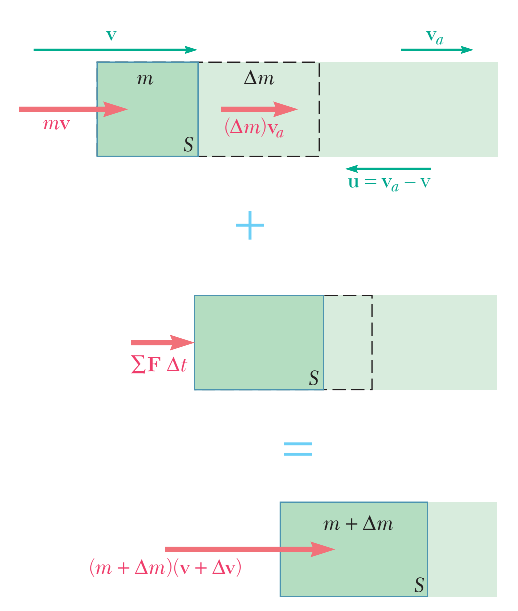


Figura 14.13


Fotografía 14.3 Cuando los cohetes de propulsión del transbordador se encienden, las partículas de gas que expulsan proporcionan el empuje requerido para el despegue.

Al resolver para la suma $\Sigma\mathbf{F}\,\Delta t$ de los impulsos de las fuerzas externas que actúan sobre S (excluyendo las fuerzas ejercidas por las partículas que se absorben), se tiene

$$\Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\Delta\mathbf{v} + \Delta m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) + (\Delta m)(\Delta\mathbf{v}) \qquad (14.41)$$

Al introducir la *velocidad relativa* $\mathbf{u}$ con respecto a S de las partículas que se absorben, se escribe $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ y se anota, puesto que $v_a < v$, que la velocidad relativa $\mathbf{u}$ está dirigida hacia la izquierda, como se muestra en la figura 14.13. Si se ignora el último término en la ecuación (14.41), que es de segundo orden, se escribe

$$\Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\,\Delta\mathbf{v} - (\Delta m)\mathbf{u}$$

Al dividir entre Δt y dejar que Δt tienda a cero, se tiene en el límite[†]

$$\Sigma\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14.42)$$

Al reagrupar los términos y recordar que $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es la aceleración del sistema S, se escribe

$$\Sigma\mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u} = m\mathbf{a} \qquad (14.43)$$

que muestra que la acción sobre S de las partículas que se están absorbiendo es equivalente a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14.44)$$

que tiende a frenar el movimiento de S, ya que la velocidad relativa $\mathbf{u}$ de las partículas está dirigida hacia la izquierda. Si se usan unidades del SI, dm/dt se expresa en kg/s, la velocidad relativa u en m/s y el empuje correspondiente en newtons. Si se recurre a unidades de uso común en Estados Unidos, dm/dt debe expresarse en slugs/s, u en ft/s y el empuje correspondiente en libras.[‡]

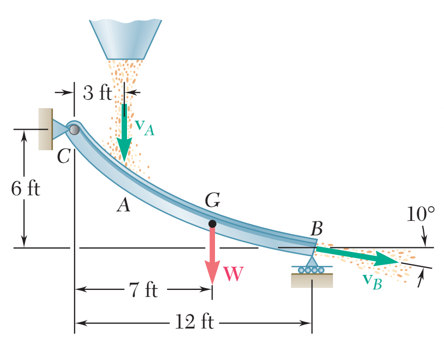
Las ecuaciones que se obtienen se usan también para determinar el movimiento de un sistema S que pierde masa. En este caso la tasa de cambio de masa es negativa y la acción sobre S de las partículas que se están expulsando es equivalente a un empuje en la dirección de $-\mathbf{u}$, esto es, en la dirección opuesta a aquella en que las partículas se están expulsando. Un *cohete* representa un caso característico de un sistema que pierde masa de manera continua (véase el problema resuelto 14.8).

[†]Cuando la velocidad absoluta $\mathbf{v}_a$ de las partículas que se absorben es cero, $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$, y la fórmula (14.42) se convierte en

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Al comparar la fórmula obtenida para la ecuación (12.3) de la sección 12.3, se observa que es posible aplicar la segunda ley de Newton a un sistema que gana masa, *siempre que las partículas absorbidas estén inicialmente en reposo.* También puede aplicarse a sistemas que pierdan masa, *siempre que la velocidad de las partículas expulsadas sea cero* con respecto al sistema de referencia elegido.

[‡]Vea la nota al pie de la página 891.

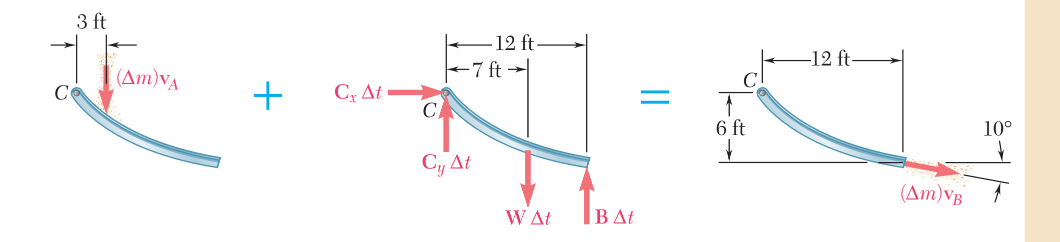


PROBLEMA RESUELTO 14.6

De una tolva cae grano sobre una rampa CB a razón de 240 lb/s. El grano golpea a la rampa en A con una velocidad de 20 ft/s y sale en B con una velocidad de 15 ft/s, formando un ángulo de 10° con la horizontal. Si el peso combinado de la rampa y el grano que se transporta es una fuerza **W** de magnitud igual a 600 lb aplicada en G, determine la reacción en el rodillo de apoyo B y las componentes de la reacción en la articulación C.

SOLUCIÓN

Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento durante el intervalo de tiempo Δt al sistema compuesto por la rampa y el grano que transportan, y la cantidad de grano que golpea a la rampa en el intervalo Δt. Puesto que la rampa no se mueve, no tiene cantidad de movimiento. También se observa que la suma $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ de las cantidades de movimiento de las partículas que transporta la rampa es el mismo en t y $t + \Delta t$ y que, en consecuencia, es posible omitir.



Puesto que el sistema formado por la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ y los impulsos es equipolente a la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$, se escribe

$\xrightarrow{+}$ componentes x: $\quad C_x\,\Delta t = (\Delta m)v_B \cos 10° \quad (1)$

$+\uparrow$ componentes y: $\quad -(\Delta m)v_A + C_y\,\Delta t - W\,\Delta t + B\,\Delta t = -(\Delta m)v_B \operatorname{sen} 10° \quad (2)$

$+\circlearrowleft$ momentos alrededor de C: $\quad -3(\Delta m)v_A - 7(W\,\Delta t) + 12(B\,\Delta t) = 6(\Delta m)v_B \cos 10° - 12(\Delta m)v_B \operatorname{sen} 10° \quad (3)$

Al utilizar los datos proporcionados, $W = 600$ lb, $v_A = 20$ ft/s, $v_B = 15$ ft/s y $\Delta m/\Delta t = 240/32.2 = 7.45$ slugs/s, y resolver la ecuación (3) para B y la ecuación (1) para C_x,

$$12B = 7(600) + 3(7.45)(20) + 6(7.45)(15)(\cos 10° - 2 \operatorname{sen} 10°)$$

$$12B = 5\,075 \qquad B = 423 \text{ lb}$$

$\mathbf{B} = 423$ lb $\uparrow$ ◀

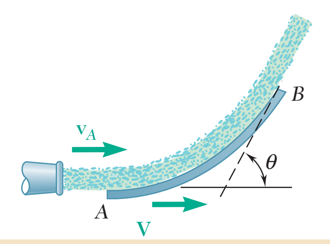
$$C_x = (7.45)(15)\cos 10° = 110.1 \text{ lb}$$

$\mathbf{C}_x = 110.1$ lb $\rightarrow$ ◀

Al sustituir B y resolver la ecuación (2) para C_y,

$$C_y = 600 - 423 + (7.45)(20 - 15 \operatorname{sen} 10°) = 307 \text{ lb}$$

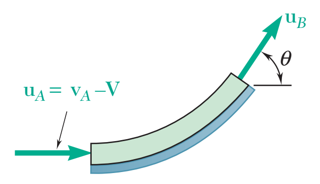
$\mathbf{C}_y = 307$ lb $\uparrow$ ◀



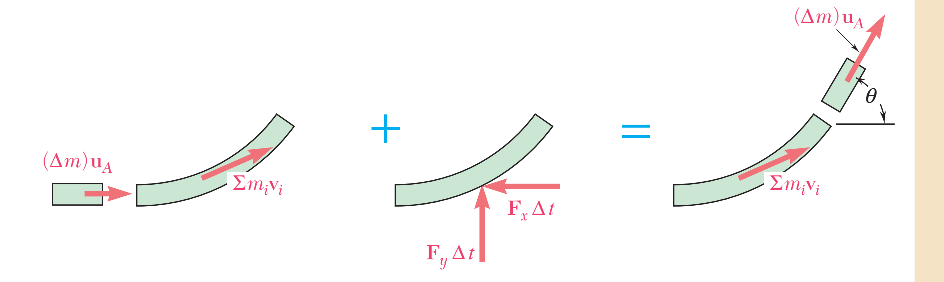
PROBLEMA RESUELTO 14.7

Una tobera descarga un chorro de agua de área de sección transversal A con velocidad $\mathbf{v}_A$. La corriente se desvía por medio de una *sola* paleta que se mueve hacia la derecha con velocidad constante $\mathbf{V}$. Suponiendo que el agua se mueve a lo largo de la paleta a velocidad constante, determine *a*) las componentes de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por la paleta sobre la corriente, *b*) la velocidad $\mathbf{V}$ para la cual se genera la potencia máxima.

SOLUCIÓN



***a*) Componentes de la fuerza ejercida sobre el chorro.** Se elige un sistema de coordenadas que se mueve con la paleta a una velocidad constante $\mathbf{V}$. Las partículas de agua golpean la paleta con una velocidad relativa $\mathbf{u}_A = \mathbf{v}_A - \mathbf{V}$ y se alejan de la paleta con una velocidad relativa $\mathbf{u}_B$. Puesto que las partículas se mueven a lo largo de la paleta a una rapidez constante, las velocidades relativas $\mathbf{u}_A$ y $\mathbf{u}_B$ tienen la misma magnitud u. Al denotar la densidad de agua por ρ, la masa de las partículas que hacen contacto con la paleta durante el intervalo de tiempo Δt es $\Delta m = A\rho(v_A - V)\,\Delta t$; una masa igual de partículas se aleja de la paleta durante Δt. Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema formado por las partículas en contacto con la paleta y las partículas que inciden en esta misma en el intervalo Δt.



Al recordar que $\mathbf{u}_A$ y $\mathbf{u}_B$ tienen la misma magnitud u, y omitir la cantidad de movimiento $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ que aparece en ambos lados, se escribe

$\xrightarrow{+}$ componentes x: $\quad (\Delta m)u - F_x\,\Delta t = (\Delta m)u \cos\theta$

$+\uparrow$ componentes y: $\quad +F_y\,\Delta t = (\Delta m)u \operatorname{sen}\theta$

Al sustituir $\Delta m = A\rho(v_A - V)\,\Delta t$ y $u = v_A - V$, se obtiene

$$\mathbf{F}_x = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos\theta) \leftarrow \qquad \mathbf{F}_y = A\rho(v_A - V)^2 \operatorname{sen}\theta \uparrow \quad ◀$$

***b*) Velocidad de la paleta para desarrollar la máxima potencia.** La potencia se obtiene al multiplicar la velocidad V de la paleta por la componente F_x de la fuerza ejercida por el chorro sobre la paleta.

$$\text{Potencia} = F_x V = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos\theta)V$$

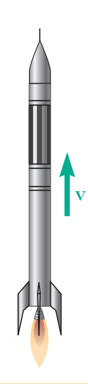
Al diferenciar la potencia con respecto a V e igualar a cero la derivada, se obtiene

$$\frac{d(\text{potencia})}{dV} = A\rho(v_A^2 - 4v_A V + 3V^2)(1 - \cos\theta) = 0$$

$$V = v_A \qquad V = \tfrac{1}{3}v_A \qquad \text{Para potencia máxima } \mathbf{V} = \tfrac{1}{3}v_A \rightarrow \quad ◀$$

Nota. Estos resultados sólo son válidos cuando una *sola* paleta desvía el chorro. Se obtienen resultados diferentes cuando una serie de paletas desvían el chorro como en una turbina Pelton. (Véase el problema 14.81.)

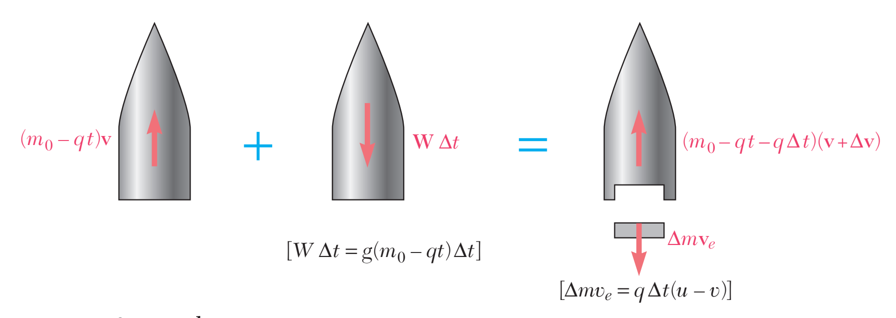
PROBLEMA RESUELTO 14.8



Un cohete de masa inicial m_0 (incluido el armazón y el combustible) se lanza verticalmente en el instante $t = 0$. El combustible se consume a una tasa constante $q = dm/dt$ y se expulsa a una velocidad constante u relativa al cohete. Obtenga una expresión para la magnitud de la velocidad del cohete en el tiempo t, ignorando la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

En el tiempo t, la masa del armazón del cohete y el combustible que queda es $m = m_0 - qt$ y la velocidad es $\mathbf{v}$. Durante el intervalo de tiempo Δt se expulsa una masa de combustible $\Delta m = q\ \Delta t$ con una rapidez u relativa al cohete. Denotando por $\mathbf{v}_e$ la velocidad absoluta del combustible expulsado, se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$.



Se escribe

$$(m_0 - qt)v - g(m_0 - qt)\ \Delta t = (m_0 - qt - q\ \Delta t)(v + \Delta v) - q\ \Delta t(u - v)$$

Al dividir entre Δt y dejar que Δt tienda a cero, se obtiene

$$-g(m_0 - qt) = (m_0 - qt)\frac{dv}{dt} - qu$$

Al separar variables e integrar desde $t = 0$, $v = 0$ a $t = t$, $v = v$,

$$dv = \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g\right) dt \qquad \int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g\right) dt$$

$$v = [-u \ln (m_0 - qt) - gt]_0^t \qquad v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - qt} - gt \quad ◀$$

Comentario. La masa que queda en el tiempo t_f, después de que se ha consumido todo el combustible, es igual a la masa del armazón del cohete $m_s = m_0 - qt_f$, y la máxima velocidad que alcanza el cohete es $v_m = u \ln (m_0/m_s) - gt_f$. Suponiendo que el combustible se expulsa en un periodo relativamente corto, el término gt_f es pequeño y se tiene $v_m \approx u \ln (m_0/m_s)$. Para escapar el campo gravitacional terrestre, un cohete debe alcanzar una velocidad de 11.18 km/s. Si se supone que $u = 2\,200$ m/s y $v_m = 11.18$ km/s, se obtiene $m_0/m_s = 161$. En consecuencia, para lanzar cada kilogramo del armazón del cohete al espacio, es necesario consumir más de 161 kg de combustible si se usa un impulsor que produce $u = 2\,200$ m/s.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó al estudio del movimiento de *sistemas variables de partículas,* esto es, sistemas que están *ganando o perdiendo partículas* en forma continua o en los que ambos procesos se producen al mismo tiempo. Los problemas que se proponen para resolver incluyen 1) *corrientes estacionarias de partículas* y 2) *sistemas que ganan o pierden masa.*

1. Para resolver problemas de corrientes estacionarias de partículas se considerará una parte S de la corriente y se expresará que el sistema formado por la cantidad de movimiento de las partículas que entran a S en A en el tiempo Δt y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S durante ese tiempo es equipolente a la cantidad de movimiento de las partículas que salen de S en B en el mismo tiempo Δt (figura 14.10). Si se consideran sólo las resultantes de los sistemas vectoriales implicados, es posible escribir la ecuación vectorial

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \qquad (14.38)$$

Quizá también sea deseable considerar los momentos alrededor de un punto dado del sistema vectorial para obtener una ecuación adicional [problema resuelto 14.6], aunque muchos problemas se resuelven utilizando la ecuación (14.38) o la ecuación que se obtuvo al dividir todos los términos entre Δt y al dejar que Δt tienda a cero,

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \qquad (14.39)$$

donde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa una *resta vectorial* y donde la tasa de masa de flujo dm/dt se expresa como el producto ρQ de la densidad ρ de la corriente (masa por unidad de volumen) y la tasa de flujo de volumen Q (volumen por unidad de tiempo). Si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, ρ se expresa como el cociente γ/g, donde γ es el peso específico del flujo y g es la aceleración de la gravedad.

Los problemas característicos que implican una corriente estacionaria de partículas se han descrito en la sección 14.11. Se le podría pedir que determinara lo siguiente:

a) Empuje causado por un flujo desviado. La ecuación (14.39) resulta aplicable, pero se obtendrá una mejor comprensión del problema si se usa una solución basada en la ecuación (14.38).

b) Reacciones en soportes de paletas o bandas transportadoras. Es necesario dibujar primero un diagrama que muestre a uno de los lados del signo de igualdad la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ de las partículas que inciden sobre la paleta o la banda en el tiempo Δt, así como los impulsos de las cargas y reacciones en los soportes durante ese tiempo, y que indique en el otro lado la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ de las partículas que se alejan de la paleta o la banda en el tiempo Δt [problema resuelto 14.6]. Al igualar las componentes x, las componentes y los momentos de las cantidades en ambos lados del signo de igualdad se generarán tres ecuaciones escalares de las que es posible despejar tres incógnitas.

(*continúa*)

c) Empuje desarrollado por un motor a reacción, un propulsor o un ventilador. En la mayoría de los casos interviene una sola incógnita, la cual puede despejarse al resolver la ecuación escalar que se obtuvo de la ecuación (14.38) o de la (14.39).

2. Para resolver problemas en los que los sistemas ganan masa se considerará al sistema S, el cual tiene una masa m y se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en el tiempo t, y las partículas de masa Δm con velocidad $\mathbf{v}_a$ que S absorberá en el intervalo de tiempo Δt (figura 14.13). Luego se expresará que la cantidad de movimiento total de S y de las partículas que se absorberán, *más* el impulso de las fuerzas externas ejercidas sobre S, son equipolentes a la cantidad de movimiento S en el tiempo $t + \Delta t$. Al advertir que la masa de S y que su velocidad en ese tiempo son, respectivamente, $m + \Delta m$ y $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$, se escribe la ecuación vectorial

$$m\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}_a + \Sigma \mathbf{F}\, \Delta t = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) \qquad (14.40)$$

Como se mostró en la sección 14.12, si se introduce la velocidad relativa $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ de las partículas que se están absorbiendo, se obtiene la siguiente expresión para la resultante de las fuerzas externas aplicadas a S:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14.42)$$

Además, se mostró que la acción sobre S de las partículas que están siendo absorbidas es equivalente a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14.44)$$

ejercido en la dirección de la velocidad relativa de las partículas que se absorben.

Los ejemplos de los sistemas que ganan masa son las bandas transportadoras y los vagones de ferrocarril en movimiento que se están cargando con grava o arena, así como las cadenas que se están jalando de un carrete.

3. Para resolver problemas de sistemas que pierden masa, como los cohetes y los motores de cohetes, es posible recurrir a las ecuaciones (14.40) a (14.44), siempre que se den valores negativos a los incrementos de masa Δm y a la tasa de cambio de masa dm/dt. De este modo, el empuje definido por la ecuación (14.44) se ejercerá en una dirección opuesta a la dirección de la velocidad relativa de las partículas que se están expulsando.

Problemas

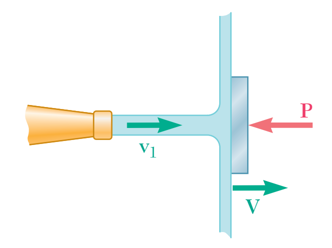


Figura P14.57 y P14.58

14.57 Un chorro de agua con un área de sección transversal A y una velocidad $\mathbf{v}_1$, golpea a una placa que permanece sin movimiento mediante una fuerza $\mathbf{P}$. Determine la magnitud de $\mathbf{P}$, si se sabe que $A = 500 \text{ mm}^2$, $v_1 = 25$ m/s y $V = 0$.

14.58 Un chorro de agua con un área de sección transversal A y una velocidad $\mathbf{v}_1$, golpea a una placa que se mueve a la derecha con velocidad $\mathbf{V}$. Determine la magnitud de $\mathbf{V}$, si se sabe que $A = 600 \text{ mm}^2$, $v_1 = 30$ m/s y $P = 400$ N.

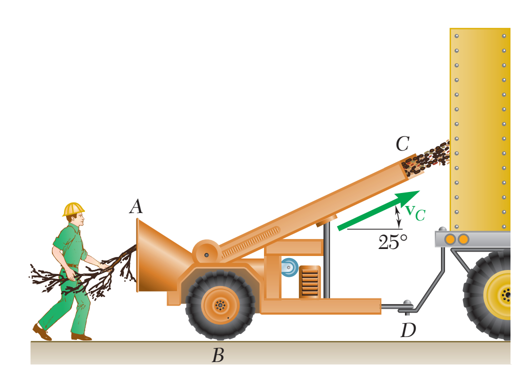


Figura P14.59

14.59 Se introducen troncos y ramas de árbol en A a razón de 5 kg/s en una picadora que lanza las astillas resultantes en C con una velocidad de 20 m/s. Determine la componente horizontal de la fuerza que ejerce la picadora sobre el camión en la unión en D.

14.60 Un arado giratorio eléctrico se usa para quitar la nieve de la sección horizontal de una vía. Esta máquina se coloca enfrente de una locomotora que la impulsa a una velocidad constante de 12 mi/h. La máquina quita 180 toneladas de nieve por minuto, lanzándola en la dirección que se muestra con una velocidad relativa a la máquina de 40 ft/s. Si se desprecia la fricción, determine *a*) la fuerza ejercida por la locomotora sobre la máquina, *b*) la fuerza lateral ejercida por la vía sobre la máquina.

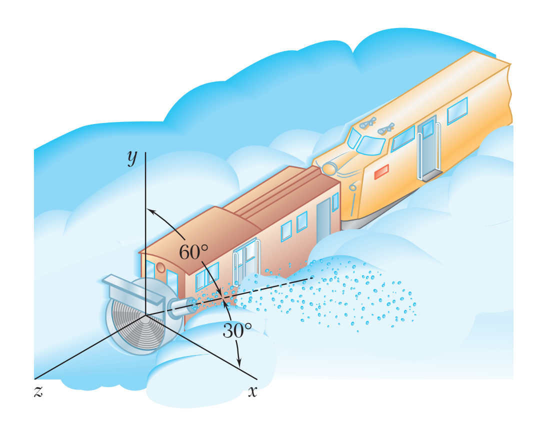


Figura P14.60

14.61 Entre dos placas A y B fluye agua en una forma laminar con una velocidad $\mathbf{v}$ de 30 m/s de magnitud. La corriente se divide en dos partes mediante una placa horizontal lisa C. Si se sabe que los gastos en cada una de las dos corrientes resultantes son, respectivamente, $Q_1 = 100$ L/min y $Q_2 = 500$ L/min, determine *a*) el ángulo θ, *b*) la fuerza total ejercida por la corriente sobre la placa horizontal.

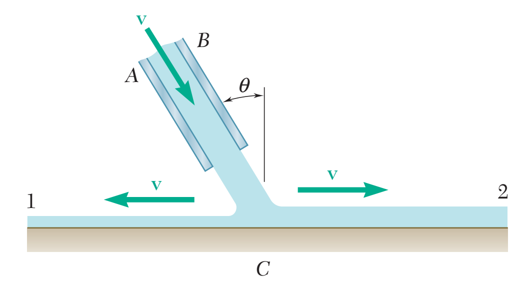


Figura *P14.61* y *P14.62*

14.62 Entre dos placas A y B fluye agua en forma laminar con una velocidad $\mathbf{v}$ de 40 m/s de magnitud. La corriente se divide en dos partes mediante una placa horizontal lisa C. Determine los gastos Q_1 y Q_2 en cada una de las dos corrientes resultantes, si se sabe que $\theta = 30°$ y que la fuerza total ejercida por el chorro sobre la placa horizontal es una fuerza vertical de 500 N.

14.63 La manguera que se muestra en la figura descarga agua a razón de 1.3 m^3/min. Si se sabe que tanto en *A* como en *B* la corriente de agua se mueve con una velocidad de 20 m/s de magnitud y se desprecia el peso de la paleta, determine las componentes de las reacciones en *C* y *D*.

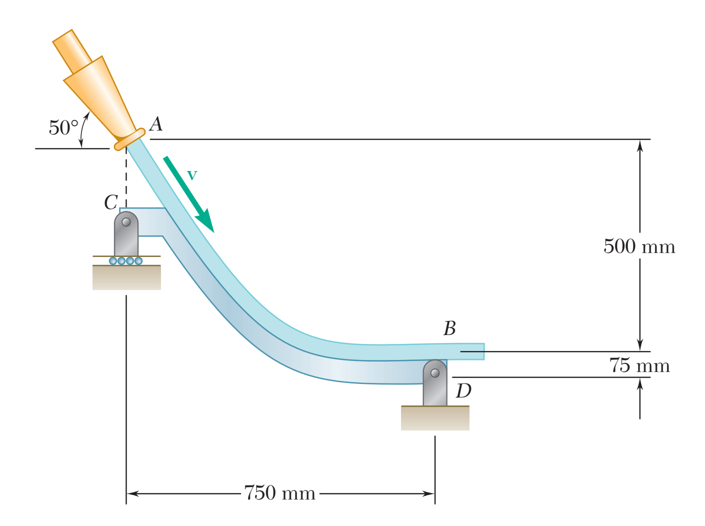


Figura P14.63

14.64 Si se sabe que la cuchilla *AB* del problema resuelto 14.7 tiene la forma de un arco de círculo, muestre que la fuerza resultante **F** ejercida por la cuchilla sobre el chorro se aplica en el punto medio *C* del arco *AB*. (*Sugerencia*: Primero muestre que la línea de acción de **F** debe pasar por el centro *O* del círculo.)

14.65 La corriente de agua que se muestra en la figura fluye a razón de 150 gal/min y se mueve con una velocidad de 60 ft/s de magnitud tanto en *A* como en *B*. La paleta está soportada por un pasador y una ménsula en *C* y por una celda de carga en *D*, la cual sólo puede ejercer una fuerza horizontal. Si se desprecia el peso de la paleta, determine las componentes de las reacciones en *C* y *D* (1 ft^3 = 7.48 gal).

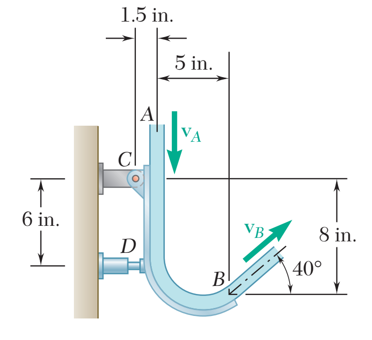


Figura *P14.65*

14.66 La manguera que se muestra en la figura descarga agua a razón de 200 gal/min. Si se sabe que tanto en *B* como en *C* la corriente de agua se mueve con una velocidad de 100 ft/s de magnitud y se desprecia el peso de la paleta, determine el sistema fuerza-par que debe aplicarse en *A* para mantener fija la paleta (1 ft^3 = 7.48 gal).

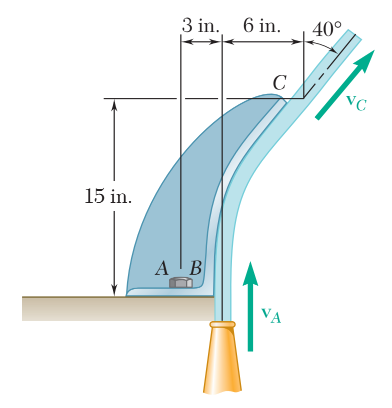


Figura *P14.66*

14.67 Un chorro de aire a alta velocidad sale de la boquilla A con una velocidad $\mathbf{v}_A$ y una razón de flujo de masa de 0.36 kg/s. El aire incide sobre una paleta ocasionando que gire hasta la posición mostrada. La paleta tiene una masa de 6 kg. Si se sabe que la magnitud de la velocidad del aire es igual en A y B, determine *a*) la magnitud de la velocidad en A, *b*) las componentes de las reacciones en O.

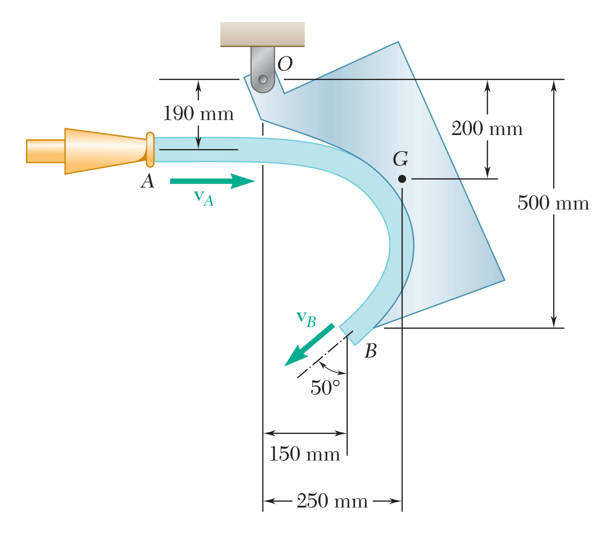


Figura P14.67

14.68 Se descarga carbón desde una banda transportadora a razón de 120 kg/s. Una segunda banda lo recibe en A y a su vez lo descarga en B. Si se sabe que $v_1 = 3$ m/s y $v_2 = 4.25$ m/s y que la segunda banda y el carbón que sostiene tienen una masa total de 472 kg, determine las componentes de las reacciones en C y en D.

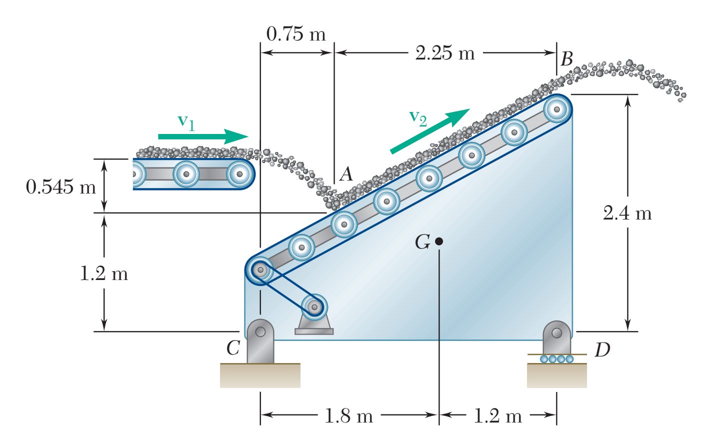


Figura P14.68

14.69 Mientras vuela a una rapidez de 900 km/h, un avión a propulsión succiona aire a razón de 90 kg/s y lo descarga a una velocidad con respecto al avión de 660 m/s. Determine el arrastre total debido a la fricción del aire sobre el aeroplano.

14.70 El arrastre total debido a la fricción del aire sobre un avión a propulsión que vuela a una rapidez de 570 mi/h es de 7 500 lb. Si se sabe que la velocidad de escape relativa al avión es de 1 800 ft/s, determine la razón en lb/s a la que el aire debe pasar a través del motor.

14.71 El avión a propulsión que se muestra succiona aire en A a razón de 200 lb/s y lo descarga en B a una velocidad con respecto al avión de 2 000 ft/s. Determine la magnitud y la línea de acción del empuje propulsor desarrollado por el motor cuando la rapidez del avión es *a*) 300 mi/h y *b*) 600 mi/h.

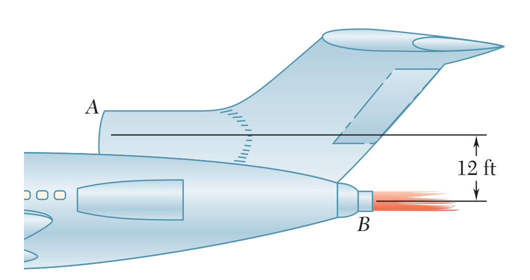


Figura P14.71

14.72 Con la finalidad de acortar la distancia requerida para aterrizar, un avión a propulsión está equipado con paletas móviles, las cuales invierten parcialmente la dirección del aire descargado por los motores. Cada uno de los motores succiona aire a razón de 120 kg/s y lo descarga a una velocidad de 600 m/s en relación con el motor. En un instante cuando la rapidez del avión es de 270 km/h, determine el empuje inverso proporcionado por cada uno de los motores.

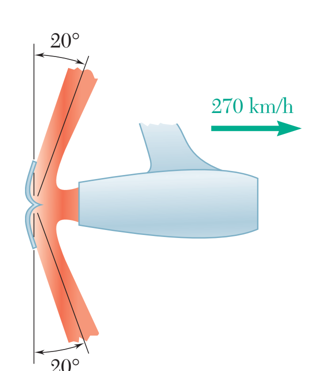


Figura *P14.72*

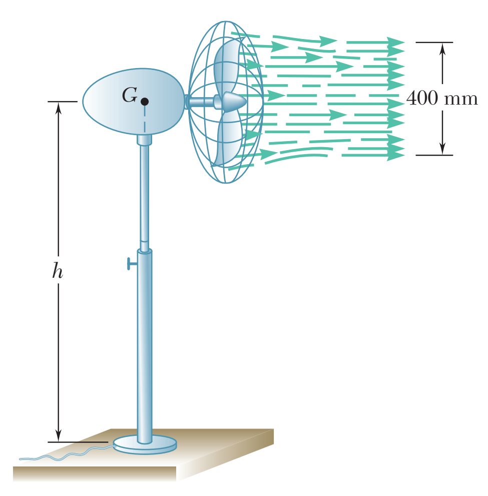


Figura P14.73

14.73 Un ventilador de piso, diseñado para arrojar aire a una velocidad máxima de 6 m/s en una estela de 400 mm de diámetro, está sostenido por una base circular de 200 mm de diámetro. Si se sabe que el peso total del ensamble es de 60 N y que su centro de gravedad se ubica directamente por encima del centro de la placa base, determine la altura h máxima a la cual debe operarse el ventilador para que no se vuelque. Suponga que la densidad del aire es $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$ y desprecie la velocidad de aproximación del aire.

14.74 El helicóptero que se muestra en la figura puede producir una rapidez máxima del aire hacia abajo de 80 ft/s en una estela de 30 ft de diámetro. Si el peso del helicóptero y la tripulación es de 3 500 lb y se supone que $\gamma = 0.076 \text{ lb/ft}^3$ para el aire, determine la carga máxima que el helicóptero puede levantar cuando está suspendido en el aire.

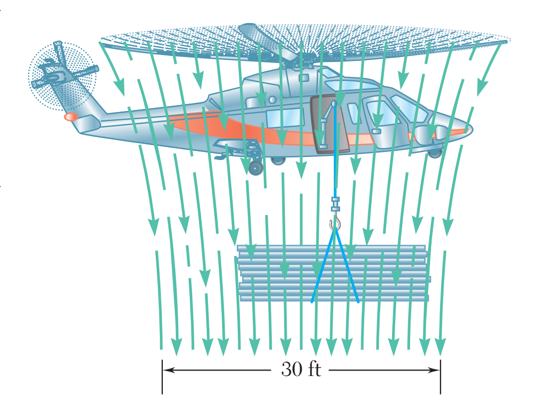


Figura P14.74

14.75 Un jet de línea viaja a una rapidez de 600 mi/h mientras cada uno de sus tres motores descarga aire con una velocidad relativa al avión de 2 000 ft/s. Determine la rapidez del jet después de haber perdido el uso de *a*) uno de sus motores, *b*) dos de sus motores. Suponga que el arrastre debido a la fricción del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez y que los motores restantes siguen operando al mismo ritmo.

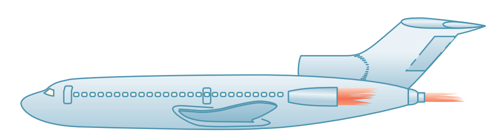


Figura P14.75

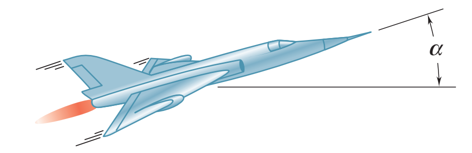


Figura *P14.76*

14.76 Un avión a propulsión de 16 Mg mantiene una rapidez constante de 774 km/h mientras asciende a un ángulo $\alpha = 18°$. El avión succiona aire a razón de 300 kg/s y lo descarga con una velocidad relativa a la nave de 665 m/s. Si el piloto cambia a un vuelo horizontal mientras mantiene los motores funcionando igual que antes, determine *a*) la aceleración inicial del avión, *b*) la máxima rapidez horizontal que alcanzará. Suponga que el arrastre debido a la fricción del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez.

14.77 El aerogenerador que se muestra en la figura tiene una salida de potencia de 5 kW para una rapidez del viento de 30 km/h. Para la rapidez del viento dada, determine *a*) la energía cinética de las partículas de aire que entran por segundo al círculo de 7.50 m de diámetro y *b*) la eficiencia de este sistema de conversión de energía. Suponga que la densidad del aire es $\rho = 1.21$ kg/m^3.

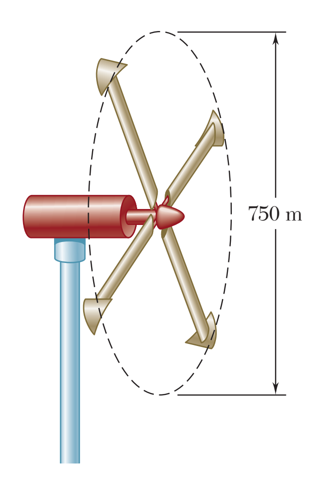


Figura P14.77 y P14.78

14.78 Para cierta rapidez del viento el aerogenerador que se muestra en la figura produce 28 kW de potencia eléctrica y tiene una eficiencia de 0.35 como sistema de conversión de energía. Si la densidad del aire es $\rho =$ 1.21 kg/m^3, determine *a*) la energía cinética de las partículas de aire que entran por segundo al círculo de 7.50 m de diámetro y *b*) la rapidez del viento.

14.79 Un avión a propulsión viaja en un vuelo plano a una rapidez de 570 mi/h, succiona aire a razón de 240 lb/s y lo descarga con una velocidad relativa al avión de 2 200 ft/s. Determine *a*) la potencia que en realidad se utiliza para propulsar al avión, *b*) la potencia total desarrollada por el motor, *c*) la eficiencia mecánica del avión.

14.80 La hélice de un pequeño avión tiene una estela de 6 ft de diámetro y produce un empuje de 800 lb cuando el avión está en reposo sobre el suelo. Si $y = 0.076$ lb/ft^3 para el aire, determine *a*) la rapidez del aire en la estela, *b*) el volumen de aire que pasa por la hélice por segundo, *c*) la energía cinética por segundo impartida al aire en la estela.

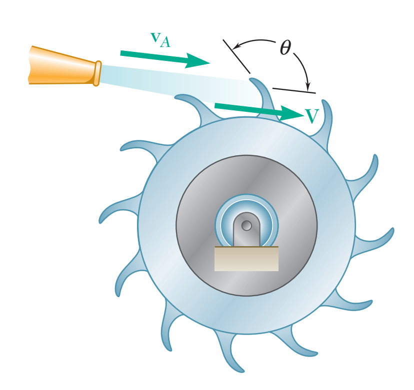


Figura *P14.81*

14.81 En una turbina de acción una serie de cuchillas desvía un chorro de agua, de manera que la razón a la que el agua es desviada por las cuchillas es igual a la razón con la que el agua sale de la boquilla ($\Delta m/\Delta t = A\rho v_A$). Si se usa la misma notación que en el problema resuelto 14.7, *a*) determine la velocidad **V** de las cuchillas para la cual se desarrolla la potencia máxima, *b*) obtenga una expresión para la potencia máxima, *c*) obtenga una expresión para la eficiencia mecánica.

14.82 Un orificio circular entrante (conocido también con el nombre de boquilla de Borda) de diámetro D se sitúa a una profundidad h por debajo de la superficie de un tanque. Si se sabe que la rapidez del chorro expulsado es $v = \sqrt{2gh}$ y se supone que la rapidez de aproximación v_1 es cero, muestre que el diámetro del chorro es $d = D/\sqrt{2}$. (*Sugerencia*: Considere la sección de agua indicada y observe que P es igual a la presión a una profundidad h multiplicada por el área del orificio.)

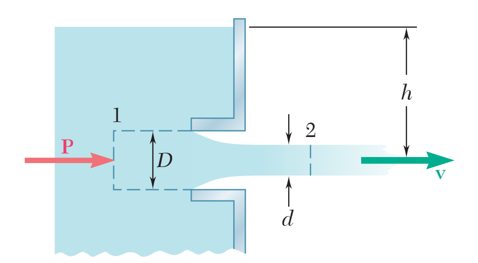


Figura *P14.82*

***14.83** La profundidad del agua que fluye en un canal rectangular de ancho b a una rapidez v_1 y a una profundidad d_1 aumenta a una profundidad d_2, en un *salto hidráulico*. Exprese el gasto Q en términos de b, d_1 y d_2.

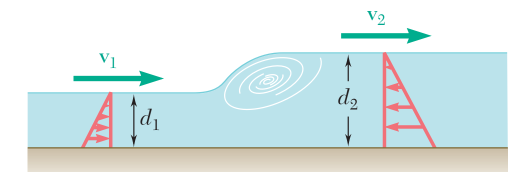


Figura *P14.83*

***14.84** Determine el gasto en el canal del problema 14.83, si se sabe que $b = 12$ ft, $d_1 = 4$ ft y $d_2 = 5$ ft.

14.85 La grava que se muestra en la figura cae casi con velocidad cero sobre la banda transportadora a una razón constante $q = dm/dt$. *a*) Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener una velocidad constante v en la banda. *b*) Demuestre que la energía cinética adquirida por la grava en un intervalo de tiempo dado es igual a la mitad del trabajo realizado en ese intervalo por la fuerza **P**. Explique qué le sucede a la otra mitad del trabajo realizado por **P**.

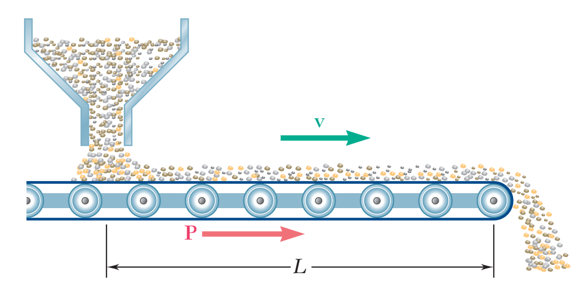


Figura P14.85

14.86 Una cadena de longitud l y masa m cae por un pequeño agujero en una placa. Al principio, cuando y es muy pequeña, la cadena está en reposo. En cada caso mostrado, determine *a*) la aceleración del primer eslabón A como una función de y, *b*) la velocidad de la cadena cuando el último eslabón pasa por el agujero. En el caso *1* suponga que los eslabones individuales están en reposo hasta que caen por el agujero. En el caso *2* considere que en cualquier instante todos los eslabones tienen la misma rapidez. Desprecie el efecto de la fricción.

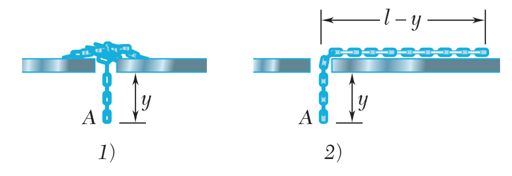


Figura P14.86

14.87 Una cadena de longitud l y masa m se encuentra amontonada sobre el piso. Si su extremo A se levanta verticalmente a una rapidez constante v, exprese en términos de la longitud y de la cadena que está fuera del piso en cualquier instante dado *a*) la magnitud de la fuerza **P** aplicada en A, *b*) la reacción del piso.

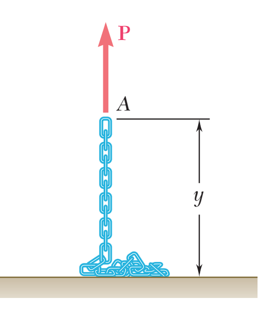
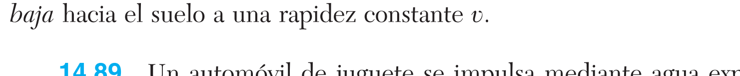


Figura P14.87



14.88 Retome el problema 14.87, y ahora suponga que la cadena se *baja* hacia el suelo a una rapidez constante v.

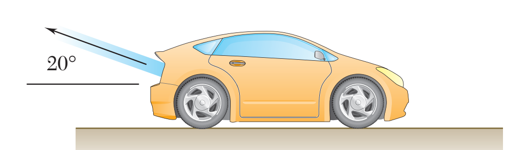


Figura P14.89 y P14.90

14.89 Un automóvil de juguete se impulsa mediante agua expulsada desde un tanque interno a una velocidad constante relativa al automóvil de 6 ft/s. El peso del automóvil vacío es de 0.4 lb y puede contener 2 lb de agua. Si se desprecian las demás fuerzas tangenciales, determine la rapidez máxima del automóvil.

14.90 Un automóvil de juguete se impulsa mediante agua expulsada desde un tanque interno. El peso del automóvil vacío es de 0.4 lb y puede contener 2 lb de agua. Si se sabe que la rapidez máxima del automóvil es de 8 ft/s, determine la velocidad relativa del agua que se expulsa desde el tanque interior.

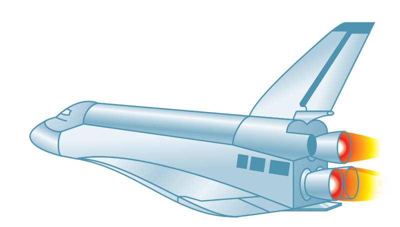


Figura *P14.91* y *P14.92*

14.91 El principal sistema de propulsión del transbordador espacial consiste en tres motores de cohete idénticos, cada uno de los cuales quema el propelente de hidrógeno-oxígeno a razón de 340 kg/s y lo expulsa a una velocidad relativa de 3 750 m/s. Determine el empuje total que proporcionan los tres motores.

14.92 El principal sistema de propulsión del transbordador espacial consiste en tres motores de cohetes idénticos que proporcionan un empuje total de 6 MN. Determine la razón a la cual cada uno de los tres motores quema el propulsor de hidrógeno-oxígeno, si se sabe que éste se expulsa con una velocidad relativa de 3 750 m/s.

14.93 Un vehículo espacial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una rapidez de 24×10^3 km/h libera en su extremo frontal una cápsula que tiene masa bruta de 600 kg, incluyendo 400 kg de combustible. Si el combustible se consume a razón de 18 kg/s y se expulsa con una velocidad relativa de 3 000 m/s, determine *a*) la aceleración tangencial de la cápsula cuando se enciende su motor, *b*) la máxima rapidez que alcanza la cápsula.

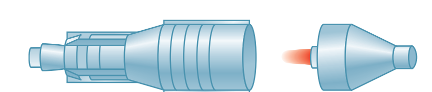


Figura P14.93

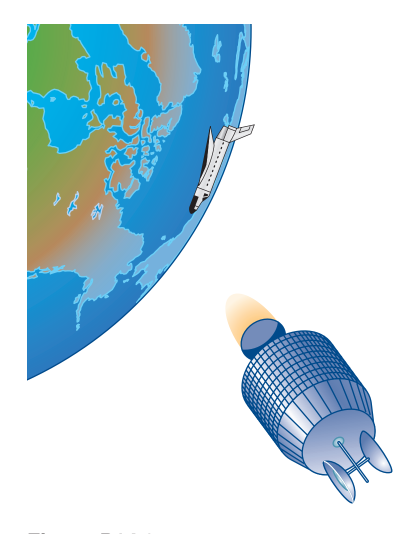


Figura P14.95

14.94 Un cohete tiene una masa de 1 200 kg que incluyen 1 000 kg de combustible, el cual se consume a razón de 12.5 kg/s y se expulsa con una velocidad relativa de 4 000 m/s. Si se sabe que el cohete se lanza verticalmente desde el suelo, determine su aceleración *a*) cuando éste es lanzado, *b*) cuando se consume la última partícula de combustible.

14.95 Un satélite de comunicaciones climatológico con un peso de 10 000 lb, que incluye al combustible, ha sido expulsado de un transbordador espacial que describe una órbita circular baja alrededor de la Tierra. Después de que el satélite se ha alejado lentamente del transbordador hasta una distancia segura, se enciende su motor para incrementar la velocidad en 8 000 ft/s como primer paso en su transferencia a una órbita geosíncrona. Si se sabe que el combustible se expulsa con una velocidad relativa de 13 750 ft/s, determine el peso de combustible consumido en esta maniobra.

14.96 Determine el aumento en la velocidad del satélite del problema 14.95 después de que se han consumido 2 500 lb del combustible.

14.97 Una nave espacial de 540 kg se monta en la parte superior de un cohete de 19 Mg de masa, lo que incluye 17.8 Mg de combustible. Si se sabe que el combustible se consume a razón de 225 kg/s y que se expulsa con una velocidad relativa de 3 600 m/s, determine la rapidez máxima que se imparte a la nave espacial cuando el cohete es lanzado verticalmente desde el suelo.

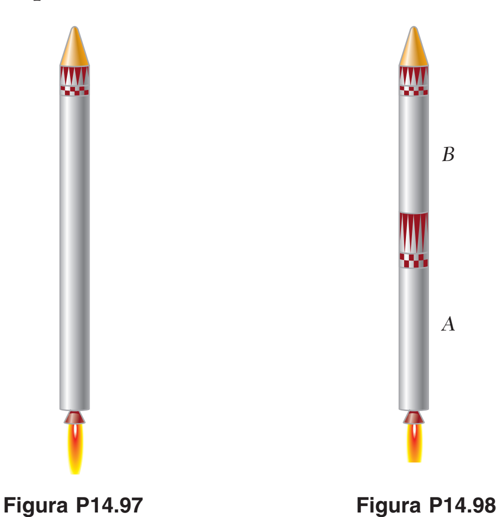


Figura P14.97 **Figura P14.98**

14.98 El cohete que se usó para lanzar la nave espacial de 540 kg del problema 14.97 se rediseñó para incluir dos etapas A y B, cada una con una masa de 9.5 Mg, que incluyen 8.9 Mg de combustible. En este caso el combustible también se consume a razón de 225 kg/s y se expulsa con una velocidad relativa de 3 600 m/s. Si se sabe que cuando la etapa A expulsa su última partícula de combustible, su cubierta se desprende y se dispara, determine *a*) la rapidez del cohete en ese instante, *b*) la rapidez máxima que se imparte a la nave espacial.

14.99 Determine la altura alcanzada por la nave espacial del problema 14.97 cuando todo el combustible de su cohete de lanzamiento se ha consumido.

14.100 Para la nave espacial y el cohete de lanzamiento de dos etapas del problema 14.98, determine la altura a la cual *a*) se desprende la etapa A del cohete, *b*) se ha consumido el combustible de ambas etapas.

14.101 En el problema 14.95 determine la distancia que separa al satélite de comunicaciones del transbordador espacial 60 s después de haber encendido el motor, si se sabe que el combustible se consume a una tasa de 37.5 lb/s.

14.102 Para el cohete del problema 14.94, determine *a*) la altura a la cual se ha consumido el combustible, *b*) la velocidad del cohete en ese momento.

14.103 Un avión de propulsión desperdicia la energía cinética impartida a los gases de escape. La potencia útil es igual al producto de la fuerza disponible para impulsarlo y su velocidad. Si v es la rapidez del avión y u es la rapidez relativa de los gases expulsados, muestre que la eficiencia mecánica del avión es $\eta = 2v/(u + v)$. Explique por qué $\eta = 1$ cuando $u = v$.

14.104 En la propulsión de un cohete se desperdicia la energía cinética que se imparte al combustible consumido y expulsado. La potencia útil es igual al producto de la fuerza disponible para impulsarlo y su velocidad. Si v es la rapidez del cohete y u es la rapidez relativa del combustible expulsado, muestre que la eficiencia mecánica del cohete es $\eta = 2uv/(u^2 + v^2)$. Explique por qué $\eta = 1$ cuando $u = v$.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 14

En este capítulo se estudió el movimiento de *sistemas de partículas,* esto es, el movimiento de un gran número de partículas consideradas juntas. En la primera parte del capítulo se consideraron los sistemas compuestos por partículas bien definidas, mientras que en la segunda parte se analizaron sistemas que continuamente ganan o pierden partículas, o ambas cosas al mismo tiempo.

Fuerzas efectivas

Se definió primero la *fuerza efectiva* de una partícula P_i de un sistema dado como el producto $m_i\mathbf{a}_i$ de su masa m_i y su aceleración $\mathbf{a}_i$ con respecto al sistema de referencia newtoniano centrado en O [sección 14.2]. Se mostró después que *el sistema de fuerzas externas que actúan sobre las partículas y el sistema de las fuerzas efectivas de las partículas son equipolentes;* esto es, ambos sistemas tienen la *misma resultante* y el *mismo momento resultante* alrededor de O:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \qquad (14.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \qquad (14.5)$$

Cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas

Al definir la *cantidad de movimiento lineal* $\mathbf{L}$ y la *cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_O$ *alrededor del punto* O del sistema de partículas [sección 14.3] como

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i \qquad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) \qquad (14.6, 14.7)$$

se mostró que las ecuaciones (14.4) y (14.5) pueden sustituirse por las ecuaciones

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (14.10, 14.11)$$

que expresa que *la resultante y el momento resultante alrededor de O de las fuerzas externas son, respectivamente, iguales a las tasas de cambio de la cantidad de movimiento lineal y de la cantidad de movimiento angular alrededor de O del sistema de partículas.*

Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas

En la sección 14.4 se definió el centro de masa de un sistema de partículas como el punto G cuyo vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ satisface la ecuación

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i \qquad (14.12)$$

donde m representa la masa total $\sum_{i=1}^{n} m_i$ de las partículas. Al diferenciar dos veces ambos miembros de la ecuación (14.12) con respecto a t, se obtienen las relaciones

$$\mathbf{L} = m\overline{\mathbf{v}} \qquad \dot{\mathbf{L}} = m\overline{\mathbf{a}} \qquad (14.14,\ 14.15)$$

donde $\overline{\mathbf{v}}$ y $\overline{\mathbf{a}}$ representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración del centro de masa G. Al sustituir $\dot{\mathbf{L}}$ de (14.15) en (14.10), se obtuvo la ecuación

$$\Sigma\mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \qquad (14.16)$$

a partir de la cual se concluyó que *el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total del sistema y todas las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto* [problema resuelto 14.1].

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas alrededor de su centro de masa

En la sección 14.5 se consideró el movimiento de la partícula de un sistema con respecto a un sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ unido al centro de masa G del sistema y en traslación con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (figura 14.14). Se definió la *cantidad de movimiento angular* del sistema *alrededor de su centro de masa* G como la suma de los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}_i'$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$. También se advirtió que el mismo resultado puede obtenerse considerando los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}_i$ de las partículas en su movimiento absoluto. Por lo tanto, se escribió

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i' \times m_i\mathbf{v}_i') \qquad (14.24)$$

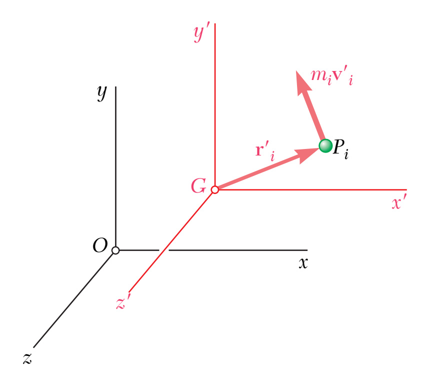


Figura 14.14

y se dedujo la relación

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (14.23)$$

que expresa que *el momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas.* Como se verá después, esta relación es fundamental para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos.

Conservación de la cantidad de movimiento

Cuando no actúan fuerzas externas sobre un sistema de partículas [sección 14.6] se concluye a partir de las ecuaciones (14.10) y (14.11) que la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{L}$ y la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del sistema se conservan [problemas resueltos 14.2 y 14.3]. En los problemas en los que intervienen fuerzas centrales, la cantidad del movimiento angular del sistema alrededor del centro de fuerza O también se conservará.

Energía cinética de un sistema de partículas

La energía cinética T de un sistema de partículas se definió como la suma de las energías cinéticas de las partículas [sección 14.7]:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \qquad (14.28)$$

Utilizando el sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ de la figura 14.14 se advirtió que la energía cinética del sistema también puede obtenerse al sumar la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociado con el movimiento del centro de masa G y la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$:

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 \qquad (14.29)$$

Principio del trabajo y la energía

El *principio del trabajo y la energía* puede aplicarse a un sistema de partículas, así como a partículas individuales [sección 14.8]. Se escribe

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (14.30)$$

y se señaló que $U_{1\rightarrow 2}$ representa el trabajo de *todas* las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema, internas y externas.

Conservación de la energía

Si todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema son *conservativas,* es posible determinar la energía potencial V del sistema y escribir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (14.31)$$

que expresa el *principio de conservación de la energía* para un sistema de partículas.

Principio del impulso y la cantidad de movimiento

Se vio en la sección 14.9 que el *principio del impulso y la cantidad de movimiento* para un sistema de partículas se expresa gráficamente como se muestra en la figura 14.15. Se establece que las cantidades de movimiento en las partículas en el tiempo t_1 y los impulsos de las fuerzas externas desde t_1 hasta t_2 forman un sistema de vectores equipolentes al sistema de cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_2.

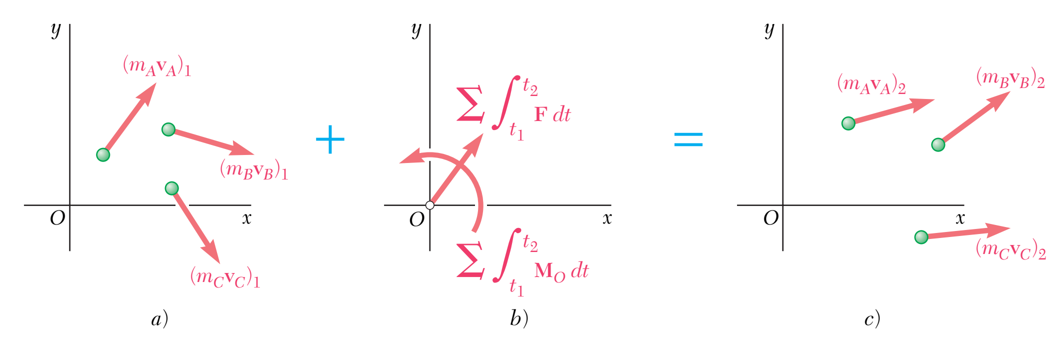


Figura 14.15

Si ninguna fuerza externa actúa sobre las partículas del sistema, los sistemas de las cantidades de movimiento indicados en los incisos *a*) y *c*) de la figura 14.15 son equipolentes y se tiene

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \qquad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (14.36, 14.37)$$

Uso de los principios de conservación en la solución de problemas en los que intervienen sistemas de partículas

Muchos problemas que implican el movimiento de sistemas de partículas pueden resolverse aplicando de manera simultánea el principio del impulso y la cantidad de movimiento y el principio de la conservación de la energía [problema resuelto 14.4] o expresando que la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía del sistema se conservan [problema resuelto 14.5].

En la segunda parte del capítulo se consideraron los *sistemas variables de partículas.* Primero se estudió una *corriente estacionaria de partículas,* como una corriente de agua desviada por una paleta fija o el flujo de aire a través de un motor a reacción [sección 14.11]. Al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento a un sistema S de partículas durante un intervalo de tiempo Δt y al incluir las partículas que entran al sistema en A durante ese intervalo de tiempo y aquellas (de la misma masa Δm) que dejan el sistema en B, se concluyó que *el sistema formado por la cantidad de movimiento* $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ *de las partículas que entran por S en el tiempo* Δt *y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S durante ese tiempo es equipolente a la cantidad de movimiento* $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ *de las partículas que salen de S en el mismo tiempo* Δt (figura 14.16). Al igualar las componentes x, las componentes y y los momentos alrededor de un punto fijo de los vectores que intervienen, se podrían obtener hasta tres ecuaciones, en las que se podrían resolver las incógnitas deseadas [problemas resueltos 14.6 y 14.7]. De este resultado sería posible obtener la siguiente expresión para la resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de las fuerzas ejercidas sobre S,

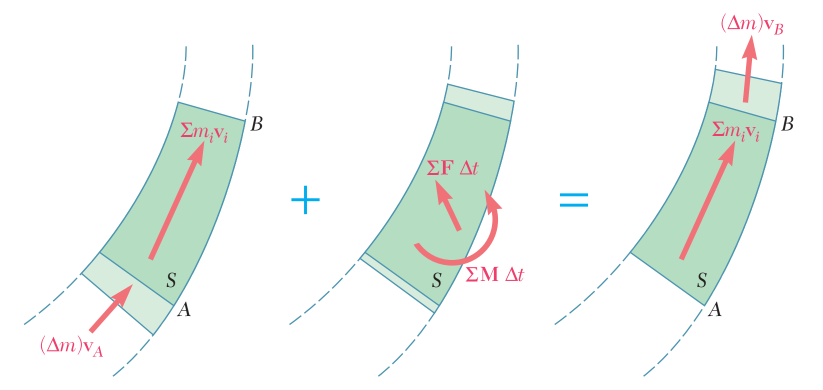


Figura 14.16

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \qquad (14.39)$$

donde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa la diferencia entre los *vectores* $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_A$ y donde dm/dt es el gasto de masa de la corriente (véase la nota al pie, pág. 891).

Sistemas que ganan o pierden masa

Considerando a continuación un sistema de partículas que gana masa al absorber partículas de manera continua o que pierde masa al expulsar partículas continuamente (sección 14.12), como en el caso de un cohete, se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema durante el intervalo de tiempo Δt, teniendo cuidado de incluir las partículas ganadas o perdidas durante ese intervalo de tiempo [problema resuelto 14.8]. También se advirtió que la acción sobre un sistema S de las partículas que se están *absorbiendo* por S era equivalente a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14.44)$$

donde dm/dt es la tasa a la cual se está absorbiendo la masa y $\mathbf{u}$ es la velocidad de las partículas *relativa a S*. En el caso de partículas que están siendo *expulsadas* por S, la tasa dm/dt es negativa y el empuje $\mathbf{P}$ se ejerce en una dirección opuesta a aquel en el cual las partículas están siendo expulsadas.

Problemas de repaso

14.105 Una bala de 30 g se dispara con una velocidad de 480 m/s hacia un bloque *A*, el cual tiene una masa de 5 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque *A* y el carrito *BC* es de 0.50. Si se sabe que el carrito tiene una masa de 4 kg y puede rodar libremente, determine *a*) la velocidad final del carrito y el bloque, *b*) la posición final del bloque sobre el carrito.

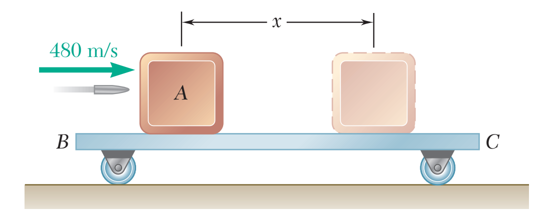


Figura P14.105

14.106 Una locomotora *A* de 80 Mg que viaja a 6.5 km/h choca con un carro plataforma *C* de 20 Mg que transporta una carga *B* de 30 Mg, la cual puede deslizarse a lo largo del piso ($\mu_k = 0.25$). Si se sabe que el carro plataforma estaba en reposo, sin frenos, y que se acopló automáticamente con la locomotora luego del impacto, determine la velocidad del carro plataforma *a*) inmediatamente después del impacto, *b*) después de que la carga se ha deslizado con relación al carro plataforma hasta llegar a un tope.

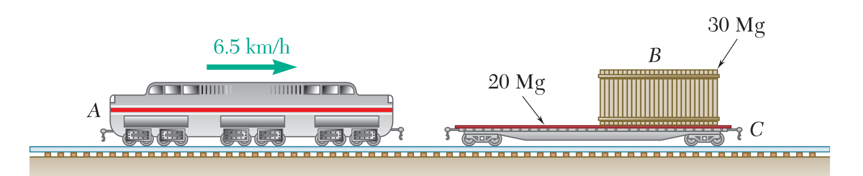


Figura P14.106

14.107 Tres vagones de carga idénticos tienen las velocidades que se indican en la figura. Si el vagón *A* primero golpea al vagón *B*, determine la velocidad de cada vagón después de que hayan ocurrido todas las colisiones si *a*) los tres vagones se acoplan de manera automática, *b*) si los vagones *A* y *B* se acoplan automáticamente mientras que los vagones *B* y *C* rebotan uno contra el otro con un coeficiente de restitución $e = 0.8$.

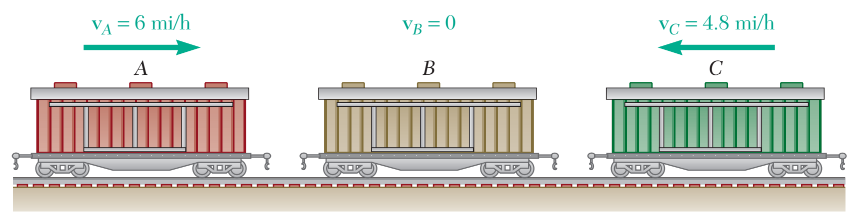


Figura *P14.107*

14.108 Un helicóptero A de 9 000 lb viajaba hacia el este a una rapidez de 75 mi/h y a una altura de 2 500 ft, cuando fue golpeado por un helicóptero B de 12 000 lb. Como resultado de la colisión, los dos helicópteros perdieron altura y sus restos trenzados cayeron al suelo en 12 s en un punto localizado 1 500 ft al este y 384 ft al sur del punto de impacto. Si se desprecia la resistencia del aire, determine las componentes de la velocidad del helicóptero B justo antes del choque.

14.109 Un bloque B de 15 lb se encuentra en reposo y un resorte de constante $k = 72$ lb/in. se mantiene comprimido 3 in. mediante una cuerda. Después de colocar el bloque A de 5 lb contra el extremo del resorte, se corta la cuerda ocasionando que A y B se muevan. Si se desprecia la fricción, determine las velocidades de los bloques A y B inmediatamente después de que A despegue de B.

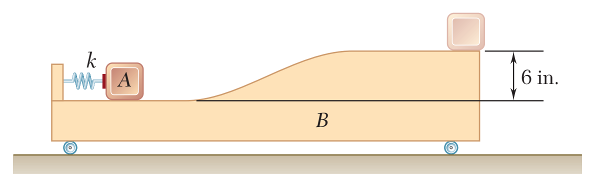


Figura P14.109

14.110 Un bloque B de 9 kg parte del reposo y se desliza hacia debajo sobre la superficie inclinada de una cuña A de 15 kg, la cual está soportada por una superficie horizontal. Si se desprecia la fricción, determine *a*) la velocidad de B en relación con A después de que el bloque se haya deslizado hacia abajo 0.6 m sobre la superficie de la cuña, *b*) la velocidad correspondiente de la cuña.

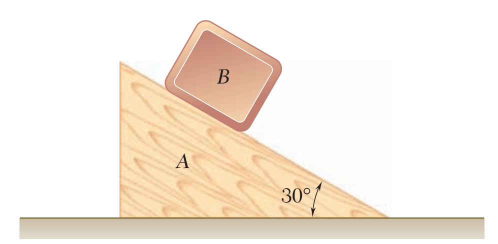


Figura *P14.110*

14.111 Cada unidad de tiempo se descarga una masa q de arena sobre una banda transportadora que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$. La arena se desvía mediante una placa A de modo que cae en una corriente vertical. Después de caer una distancia h, la arena se desvía de nuevo mediante una placa curva en B. Si se desprecia la fricción entre la arena y las placas, determine la fuerza requerida para mantener en la posición mostrada *a*) la placa A, *b*) la placa B.

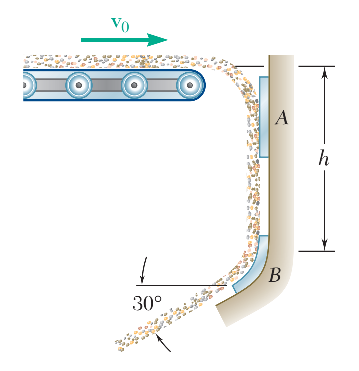


Figura P14.111

14.112 La componente final de un sistema transportador recibe arena a razón de 100 kg/s en *A* y la descarga en *B*. La arena se mueve horizontalmente en *A* y *B* con una velocidad de magnitud $v_A = v_B = 4.5$ m/s. Si se sabe que el peso combinado de la componente y de la arena que soporta es $W = 4$ kN, determine las reacciones en *C* y *D*.

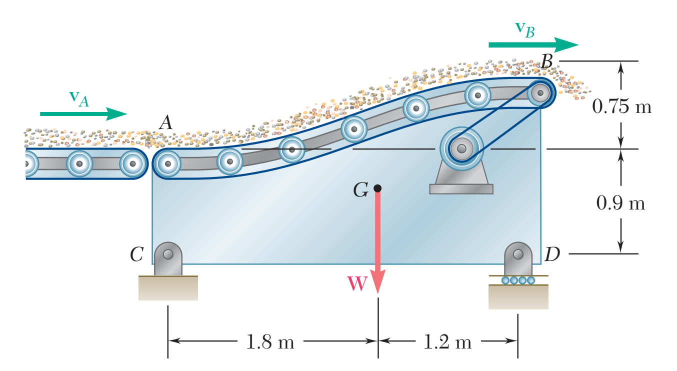


Figura *P14.112*

14.113 Un aspersor de jardín tiene cuatro brazos rotatorios, cada uno de los cuales consta de dos secciones rectas horizontales de tubo que forman un ángulo de 120°. Cada brazo descarga agua a razón de 20 L/min con una velocidad de 18 m/s relativa al brazo. Si se sabe que la fricción entre las partes móviles y estacionarias del aspersor es equivalente a un par de magnitud $M = 0.375$ N · m, determine la razón constante a la cual gira el aspersor.

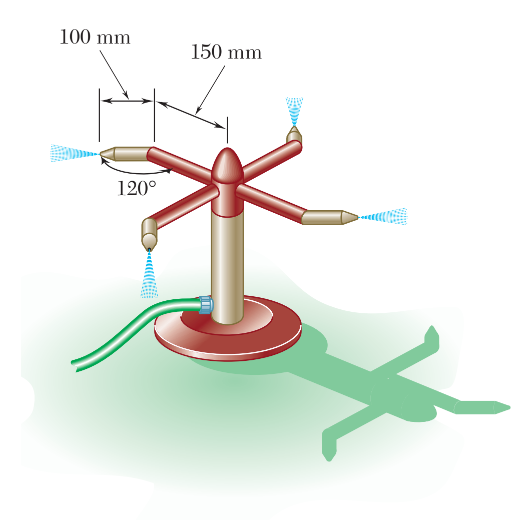


Figura P14.113

14.114 Los eslabones de los extremos de una cadena se encuentran amontonados en A y C. Cuando se le da una velocidad inicial v, la cadena se mantiene en movimiento libre a esa rapidez sobre la polea en B. Desprecie la fricción y determine el valor requerido de h.

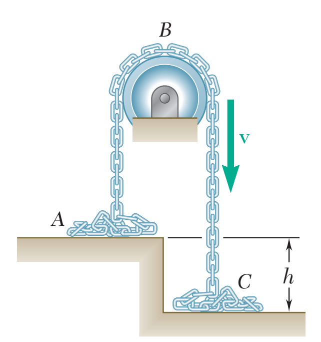


Figura P14.114

14.115 Un vagón de ferrocarril de longitud L y masa m_0 cuando está vacío, se mueve con libertad sobre una vía horizontal mientras se carga con arena que proviene de un conducto estacionario a una razón $dm/dt = q$. Si se sabe que el vagón se aproximaba al conducto a una rapidez v_0, determine a) la masa del vagón y su carga después de que éste ha dejado atrás al conducto, b) la rapidez del vagón en ese momento.

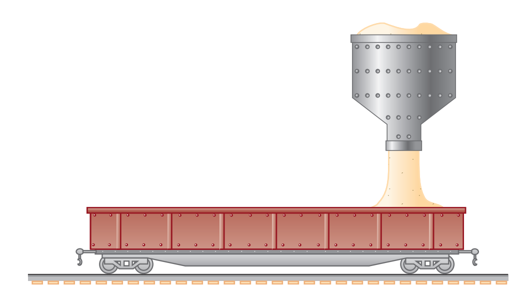


Figura P14.115

14.116 Un método posible para reducir la rapidez de un avión de entrenamiento cuando desciende sobre un portaviones consiste en enganchar la cola del avión al extremo de una cadena pesada de longitud l, la cual está amontonada debajo de la cubierta. Si se denota con m la masa del avión y con v_0 su rapidez al hacer contacto con el portaaviones, y se supone que no existe otra fuerza retardadora, determine a) la masa requerida de la cadena si la rapidez del avión debe reducirse a βv_0, donde $\beta < 1$, b) el máximo valor de la fuerza ejercida por la cadena sobre el avión.

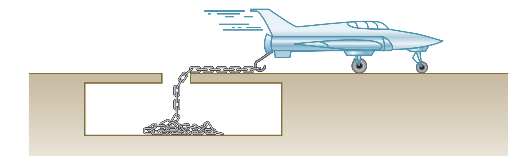


Figura P14.116

Problemas de computadora

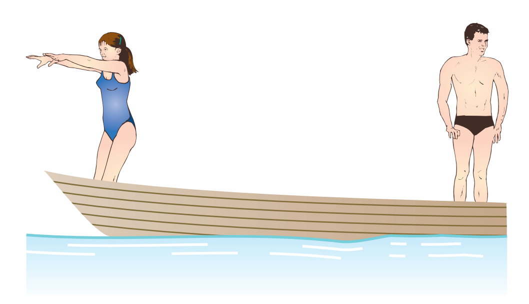


Figura P14.C1

14.C1 Un hombre y una mujer de pesos W_h y W_m, están de pie en extremos opuestos de un bote de peso W_b, listos para lanzarse con velocidades relativas al bote v_h y v_m, respectivamente. Use software para determinar la velocidad del bote después de que ambos se hayan lanzado, si *a*) la mujer se lanza primero, *b*) el hombre se lanza primero. En primer lugar utilice este software para resolver el problema 14.4 como se estableció originalmente, después resuelva ese problema suponiendo que las velocidades de la mujer y el hombre relativas al bote son, respectivamente, *i*) 14 ft/s y 18 ft/s, *ii*) 18 ft/s y 14 ft/s.

14.C2 Un sistema de partículas está formado por n partículas A_i de masa m_i y coordenadas x_i, y_i y z_i con velocidades de componentes $(v_x)_i$, $(v_y)_i$ y $(v_z)_i$. Deduzca expresiones para las componentes de la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del origen O de las coordenadas. Utilice software para resolver los problemas 14.9 y 14.13.

14.C3 Una bomba que se mueve con una velocidad de componentes conocidas v_x, v_y y v_z explota en tres fragmentos de pesos W_1, W_2 y W_3 en el punto A_0 a una distancia d de una pared vertical. Use software para determinar las velocidades de los tres fragmentos inmediatamente después de la explosión, si se conocen las coordenadas x_i y y_i, de los puntos A_i (i = 1, 2, 3) donde los fragmentos golpean la pared. Utilice este software para resolver *a*) el problema 14.25, *b*) el problema 14.26.

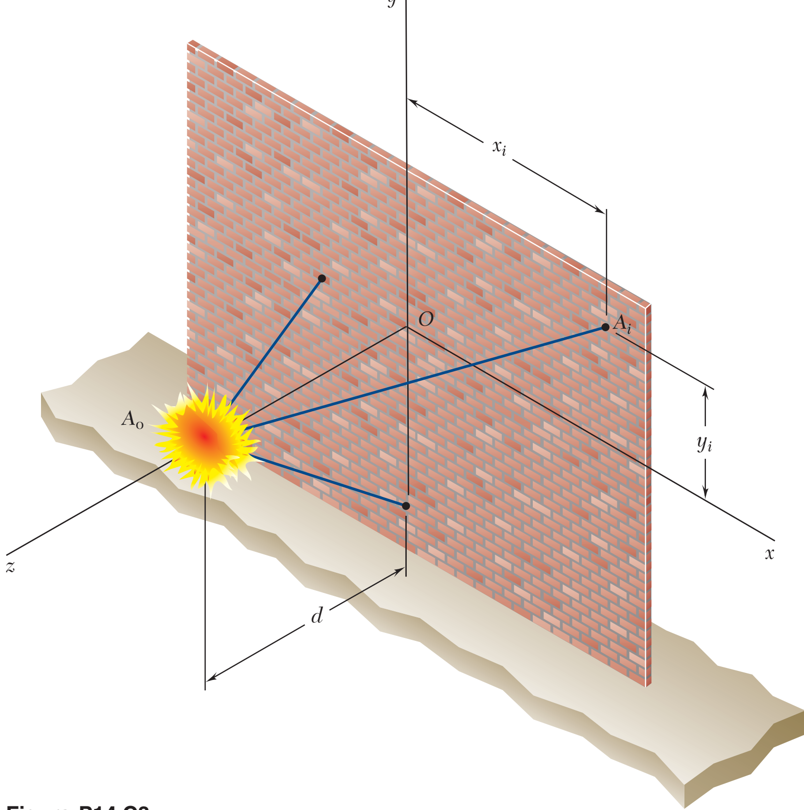


Figura P14.C3

14.C4 Cuando un avión de entrenamiento de 6 000 kg desciende sobre un portaaviones con una velocidad de 180 km/h, su cola se engancha en el extremo de una larga cadena de 80 m que se encuentra amontonada debajo de la cubierta. Si se sabe que la cadena tiene una masa por unidad de longitud de 50 kg/m y se supone que no hay otra fuerza retardadora, utilice software para determinar la distancia recorrida por el avión mientras la cadena está siendo jalada y los valores correspondientes del tiempo transcurrido, así como la velocidad y la desaceleración del avión.

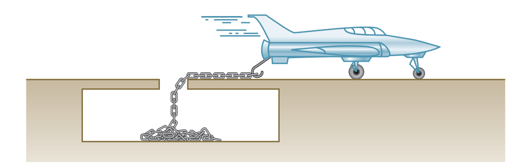


Figura P14.C4

14.C5 Un avión a propulsión de 16 Mg mantiene una velocidad constante de 774 km/h mientras asciende con un ángulo $\alpha = 18°$. El avión succiona aire a razón de 300 kg/s y lo descarga con una velocidad relativa a la aeronave de 665 m/s. Si se sabe que el piloto cambia el ángulo de ascenso α mientras mantiene a los motores funcionando igual, use software para calcular y graficar con los valores de α entre 0 y 20° *a*) la aceleración inicial del avión, *b*) la rapidez máxima que alcanzará. Suponga que el arrastre debido a la fricción del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez.

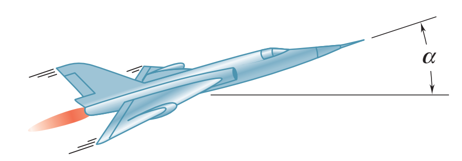


Figura P14.C5

14.C6 Un cohete tiene una masa de 2 400 lb, lo que incluye 2 000 lb de combustible, el cual se consume a razón de 25 lb/s y se expulsa con una velocidad relativa de 12 000 ft/s. Si se sabe que el cohete se dispara verticalmente desde el suelo y se supone un valor constante para la aceleración de la gravedad, utilice intervalos de tiempo de 4 s y software para calcular y graficar, desde el momento del encendido hasta el instante en que se consume la última partícula de combustible, *a*) la aceleración a del cohete en ft/s^2, *b*) su velocidad v en ft/s y *c*) su elevación h sobre el suelo en millas. (*Sugerencia*: Use para v la expresión obtenida en el problema resuelto 14.8 e integre esta expresión analíticamente para obtener h.)

El enorme cigüeñal pertenece a un motor a diesel de dos tiempos Wartsila-Sulzer RTA96-C turbocargado. En este capítulo usted aprenderá a llevar a cabo el análisis cinemático de cuerpos rígidos que realizan *traslación*, *rotación alrededor de un eje fijo* y *movimiento plano general*.



CAPÍTULO 15

Cinemática de cuerpos rígidos



15.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se considera la cinemática de *cuerpos rígidos*. Se investigan las relaciones existentes entre el tiempo, las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de las diferentes partículas que forman un cuerpo rígido. Como se verá, los diferentes tipos de movimiento de cuerpo rígido pueden agruparse de manera conveniente en la forma que sigue:

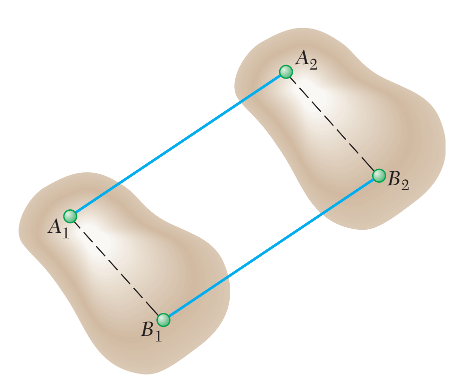


Figura 15.1

1. *Traslación.* Se afirma que un movimiento será de traslación si toda línea recta dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento. También puede observarse que en la traslación todas las partículas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas, se afirma que el movimiento es una *traslación rectilínea* (figura 15.1); si las trayectorias son líneas curvas, el movimiento es una *traslación curvilínea* (figura 15.2).

2. *Rotación alrededor de un eje fijo.* En este movimiento, las partículas que forman al cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo eje fijo (figura 15.3). Si este eje, llamado *eje de rotación*, interseca al cuerpo rígido, las partículas localizadas sobre el eje tienen velocidad cero y aceleración cero.

   La rotación no debe confundirse con ciertos tipos de traslación curvilínea. Por ejemplo, la placa que se muestra en la figura 15.4*a* es una traslación curvilínea, con todas sus partículas moviéndose a lo largo de círculos *paralelos*, mientras que la placa que se muestra en la figura 15.4*b* está en rotación, con todas sus partículas moviéndose a lo largo de círculos *concéntricos*.

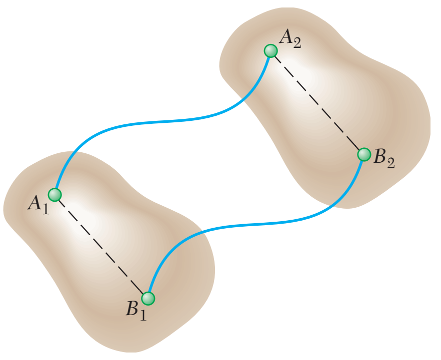


Figura 15.2

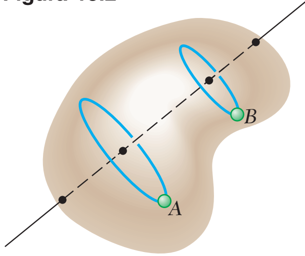
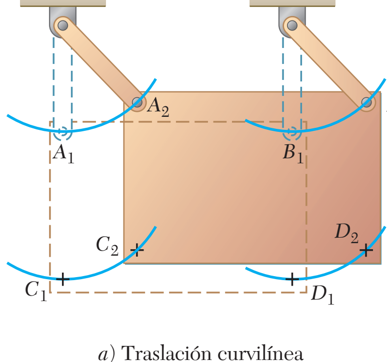
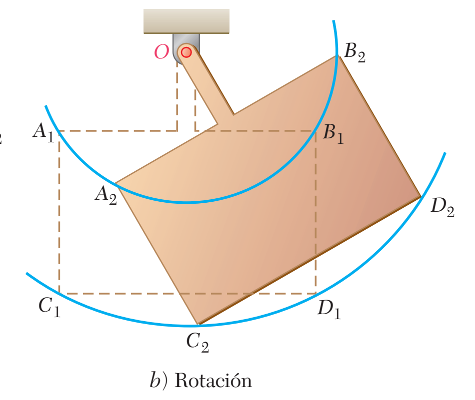


Figura 15.3



a) Traslación curvilínea



b) Rotación

Figura 15.4

En el primer caso, cualquier línea recta dada dibujada sobre la placa mantendrá la misma dirección, en tanto que en el segundo caso, el punto O permanece fijo.

Como cada partícula se mueve en un plano determinado, se afirma que la rotación del cuerpo alrededor de un eje fijo es un *movimiento plano.*

3. *Movimiento plano general.* Hay muchos otros tipos de movimiento plano, esto es, movimientos en los cuales todas las partículas del cuerpo se mueven en planos paralelos. Cualquier movimiento plano que no es ni una rotación ni una traslación se conoce como un movimiento plano general. En la figura 15.5 se dan dos ejemplos de movimiento plano general.

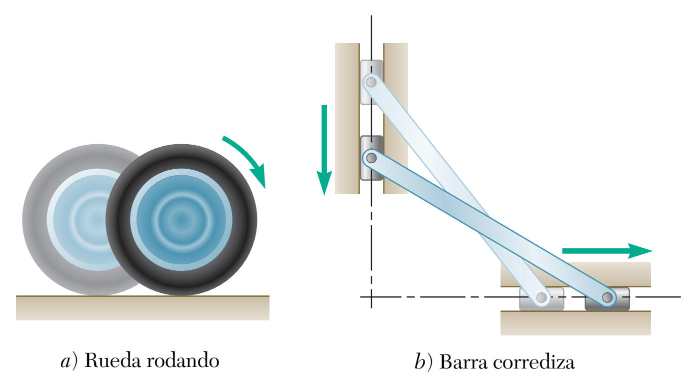


Figura 15.5

4. *Movimiento alrededor de un punto fijo*. El movimiento tridimensional de un cuerpo rígido unido a un punto fijo O, por ejemplo, el movimiento de un trompo sobre un piso rugoso (figura 15.6), se conoce como movimiento alrededor de un punto fijo.

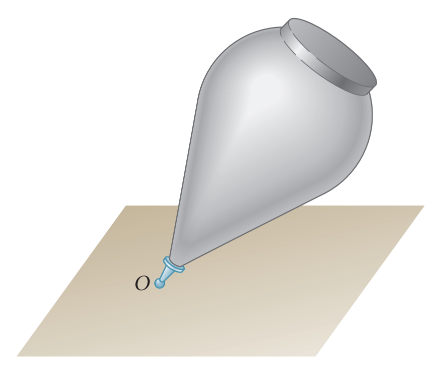


Figura 15.6

5. *Movimiento general.* Cualquier movimiento de un cuerpo rígido que no entra en ninguna de las categorías anteriores se conoce como movimiento general.

Después de un breve análisis en la sección 15.2 del movimiento de traslación, en la sección 15.3 se considera la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo. Se definirá la *velocidad angular* y la *aceleración angular* de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, y el lector aprenderá a expresar la velocidad y la aceleración de un punto dado del cuerpo en términos de su vector de posición, de la velocidad angular y de la aceleración angular del cuerpo.

Las siguientes secciones se dedican al estudio del movimiento plano general de un cuerpo rígido y a su aplicación al análisis de mecanismos tales como engranes, bielas y eslabones conectados por medio de pasadores. Al descomponer el movimiento plano de una placa en una traslación y una rotación (secciones 15.5 y 15.6), se expresará la velocidad de un punto B de la placa como la suma de la velocidad de un punto de referencia A y de la velocidad de B relativa al sistema de referencia que se traslada con A (esto es, que se mueve con A pero que no gira). El mismo planteamiento se utiliza posteriormente en la sección 15.8 para expresar la aceleración de B en términos de la aceleración de A, y la aceleración de B relativa a un sistema de referencia que se traslada con A.

Un método alternativo para el análisis de velocidades en movimiento plano, basado en el concepto de *centro instantáneo de rotación*, se proporciona en la sección 15.7; e incluso otro método de análisis, basado en el uso de expresiones paramétricas para las coordenadas de un punto dado, se presenta en la sección 15.9.

El movimiento de una partícula relativo a un sistema de referencia en rotación y el concepto de *aceleración de Coriolis* se estudian en las secciones 15.10 y 15.11, y los resultados que se obtienen se aplican al análisis del movimiento plano de mecanismos que contienen partes que deslizan entre sí.

La parte restante del capítulo se dedica al análisis del movimiento en tres dimensiones de un cuerpo rígido, a saber, el movimiento de un cuerpo rígido como un punto fijo y el movimiento general de un cuerpo rígido. En las secciones 15.12 y 15.13 se utiliza un sistema de referencia fijo o sistema de referencia en traslación para realizar este análisis; en las secciones 15.14 y 15.15 será considerado el movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia en rotación o a un sistema de referencia en movimiento general, y se volverá a usar el concepto de aceleración de Coriolis.



Fotografía 15.1 Esta réplica de un ariete en *Château des Baux*, Francia, realiza traslación curvilínea.

15.2. TRASLACIÓN

Considere un cuerpo rígido en traslación (ya sea rectilínea o curvilínea), y deje que A y B sean cualesquiera dos de sus partículas (figura 15.7*a*). Al denotar, respectivamente, por $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ los vectores de posición de A y B con respecto a un sistema de referencia fijo y mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ al vector que une a A y B, se escribe

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.1}$$

Se diferencia esta relación con respecto a t. Hay que resaltar que de la definición pura de traslación, el vector $\mathbf{r}_{B/A}$ debe mantener una dirección constante; su magnitud también debe ser constante, ya que A

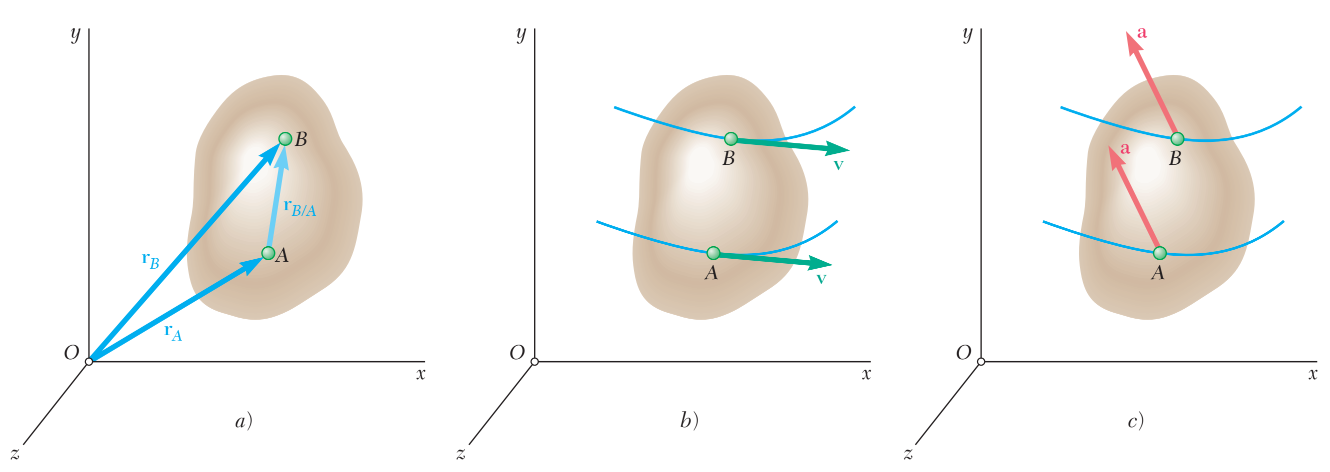


Figura 15.7

y B pertenecen al mismo cuerpo rígido. De tal modo, la derivada de $\mathbf{r}_{B/A}$ es cero y se tiene

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \tag{15.2}$$

Al diferenciar una vez más, se escribe

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A \tag{15.3}$$

En consecuencia, *cuando un cuerpo rígido está en traslación, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante dado* (figura 15.7*b* y *c*). En el caso de traslación curvilínea, la velocidad y la aceleración cambian en dirección, así como en magnitud, en cada instante. En el caso de traslación rectilínea, todas las partículas del cuerpo se mueven a lo largo de líneas rectas paralelas, y su velocidad y aceleración se mantienen en la misma dirección durante el movimiento completo.

15.3. ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Considere un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo AA'. Sea P un punto del cuerpo y $\mathbf{r}$ su vector de posición con respecto a un sistema de referencia fijo. Por conveniencia, se supone que el sistema de referencia está centrado en el punto O sobre AA' y que el eje z coincide con AA' (figura 15.8). Sea B la proyección de P sobre AA'; puesto que P debe permanecer a una distancia constante de B, describirá un círculo de centro B y de radio r sen ϕ, donde ϕ denota el ángulo formado por $\mathbf{r}$ y AA'.

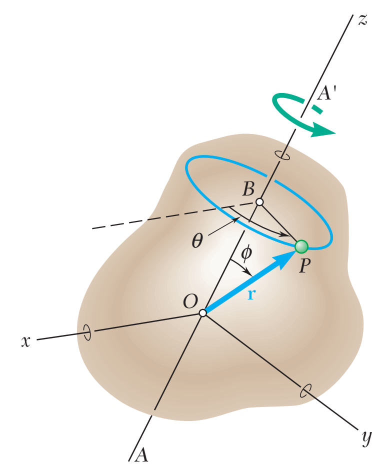


Figura 15.8

La posición de P y del cuerpo completo está definida totalmente por el ángulo θ que forma la línea BP con el plano zx. El plano θ se conoce como *coordenada angular* del cuerpo y se define como positiva cuando se ve en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde A'. La coordenada angular se expresará en radianes (rad) o, en ocasiones, en grados (°) o revoluciones (rev). Recuérdese que

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} = 360°$$

Recuérdese de la sección 11.9 que la velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ de una partícula P es un vector tangente a la trayectoria de P y de magnitud $v = ds/dt$. Al observar que la longitud Δs del arco descrito por P cuando el cuerpo gira un ángulo $\Delta\theta$ es

$$\Delta s = (BP)\,\Delta\theta = (r \text{ sen } \phi)\,\Delta\theta$$

y al dividir ambos miembros entre Δt, se obtiene en el límite, cuando Δt tiende a cero,

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \text{ sen } \phi \tag{15.4}$$

donde $\dot{\theta}$ denota la derivada en el tiempo de θ. (Advierta que el ángulo θ depende de la posición de P dentro del cuerpo, pero que la razón de cambio $\dot{\theta}$ es en sí misma independiente de P.) La conclusión es que



Fotografía 15.2 Para el engrane central que gira alrededor de un eje fijo, su velocidad y aceleración angulares son vectores dirigidos a lo largo del eje de rotación vertical.

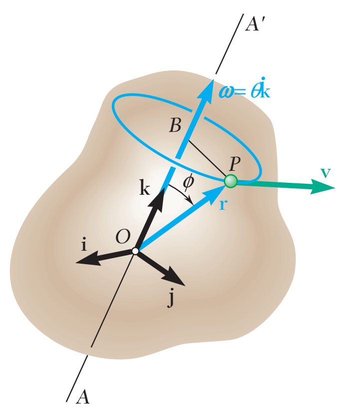


Figura 15.9

la velocidad **v** de P es un vector perpendicular al plano que contiene a AA' y **r**, y de magnitud v definida por (15.4). Pero éste es precisamente el resultado que se obtendría al dibujar un vector $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ a lo largo de AA' y se formara el producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (figura 15.9). Entonces se escribe

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.5}$$

El vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.6}$$

que está dirigido a lo largo del eje de rotación se denomina la *velocidad angular* del cuerpo y es igual en magnitud a la razón de cambio $\dot{\theta}$ de la coordenada angular; su sentido puede obtenerse mediante la regla de la mano derecha (sección 3.6) con base en el sentido de rotación del cuerpo.†

La aceleración **a** de la partícula P se determinará a continuación. Al diferenciar (15.5) y recordar la regla de diferenciación de un producto vectorial (sección 11.10), se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{aligned} \tag{15.7}$$

El vector $d\boldsymbol{\omega}/dt$ se denota mediante $\boldsymbol{\alpha}$ y se denomina *aceleración angular* del cuerpo. Al sustituir también **v** de (15.5), se tiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.8}$$

Al diferenciar (15.6) y recordar que **k** es constante en magnitud y dirección, se tiene

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.9}$$

De tal modo, la aceleración angular de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación, y es igual en magnitud a la tasa de cambio $\dot{\omega}$ de la velocidad angular. Volviendo a (15.8), observe que la aceleración de P es la suma de dos vectores. El primer vector es igual al producto vectorial $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$; es tangente al círculo descrito por P y, por lo tanto, representa la componente tangencial de la aceleración. El segundo vector es igual al *triple producto vectorial (mixto de tres vectores)* $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ obtenido al formar el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; ya que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ es tangente al círculo que describe P, el triple producto vectorial está dirigido hacia el centro B del círculo y, por consiguiente, representa la componente normal de la aceleración.

†Se demostrará en la sección 15.12 en el caso más general de un cuerpo rígido que rota simultáneamente alrededor de ejes que tienen diferentes direcciones, que las velocidades angulares obedecen la ley de suma del paralelogramo y, por ello, verdaderamente son cantidades vectoriales.

Rotación de una placa representativa. La rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo puede definirse mediante el movimiento de una placa representativa en un plano de referencia perpendicular al eje de rotación. Se elige el plano xy como el plano de referencia y se supone que coincide con el plano de la figura, con el eje z apuntando hacia fuera del papel (figura 15.10). Al recordar de (15.6) que $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, se

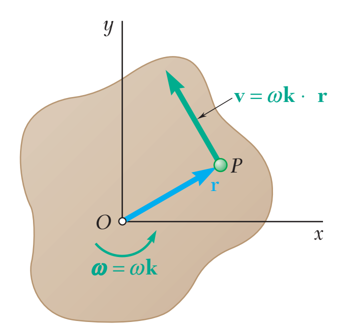


Figura 15.10

nota que un valor positivo del escalar ω corresponde a una rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de la placa representativa, y un valor negativo a una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. Al sustituir $\omega\mathbf{k}$ por $\boldsymbol{\omega}$ en la ecuación (15.5), se expresa la velocidad de cualquier punto P dado de la placa como

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{15.10}$$

Puesto que los vectores $\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}$ son mutuamente perpendiculares, la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}$ es

$$v = r\omega \tag{15.10$'$}$$

y su dirección puede obtenerse al girar $\mathbf{r}$ 90° en el sentido de rotación de la placa.

Al sustituir $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ en la ecuación (15.8) y observar que el doble producto cruz de $\mathbf{r}$ por $\mathbf{k}$ origina una rotación de 180° del vector $\mathbf{r}$, se expresa la aceleración del punto P como

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r} \tag{15.11}$$

Al descomponer $\mathbf{a}$ en las componentes tangencial y normal (figura 15.11), se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} \qquad & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.11$'$}$$

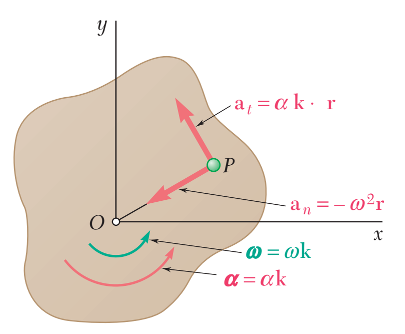


Figura 15.11

La componente tangencial $\mathbf{a}_t$ apunta en la dirección contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj si el escalar α es positivo, y en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj si α es negativo. La componente normal $\mathbf{a}_n$ siempre apunta en la dirección opuesta a la de $\mathbf{r}$, esto es, hacia O.

15.4. ECUACIONES QUE DEFINEN LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO



Fotografía 15.3 Si el rollo inferior tiene una velocidad angular constante, la rapidez con la que el papel está siendo enrollado se incrementa conforme el radio aumenta.

Se afirma que se *conoce* el movimiento de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo AA' cuando su coordenada angular θ puede expresarse como una función conocida de t. Sin embargo, en la práctica la rotación de un cuerpo rígido rara vez se define mediante una relación entre θ y t. Con mayor frecuencia, las condiciones de movimiento se especificarán mediante el tipo de aceleración angular que posea el cuerpo. Por ejemplo, es posible que α se dé como una función de t, como una función de θ o como una función de ω. Al recordar las relaciones (15.6) y (15.9), se escribe

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{15.12}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15.13}$$

o, al despejar (15.12) dt y sustituir en (15.13),

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \tag{15.14}$$

Puesto que estas ecuaciones son similares a las que se obtuvieron en el capítulo 11 para el movimiento rectilíneo de una partícula, su integración puede efectuarse siguiendo el procedimiento descrito en la sección 11.3.

Con frecuencia se encuentran dos casos particulares de rotación:

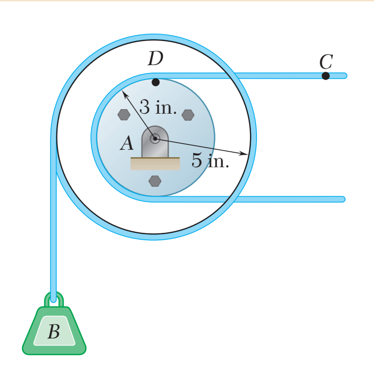
1. *Rotación uniforme.* Este caso se caracteriza por el hecho de que la aceleración angular es cero. Consecuentemente, la aceleración angular es constante, y la coordenada angular está dada por la fórmula

$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{15.15}$$

2. *Rotación acelerada uniformemente.* En este caso, la aceleración angular es constante. Las siguientes fórmulas que relacionan la velocidad angular, la coordenada angular y el tiempo pueden obtenerse entonces de manera similar a la que se describe en la sección 11.5. La similitud entre las fórmulas derivadas aquí y aquellas obtenidas para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula es manifiesta.

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{15.16}$$

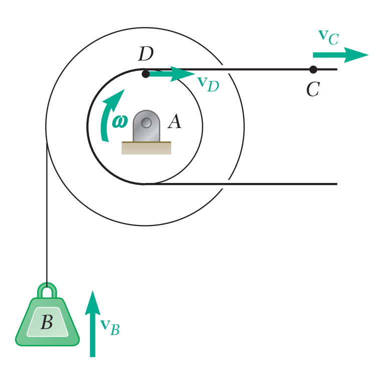
Debe subrayarse que la fórmula (15.15) sólo se usa cuando $\alpha = 0$, y las fórmulas (15.16) sólo cuando α = constante. En cualquier otro caso, deben emplearse las fórmulas generales (15.12) a (15.14).



PROBLEMA RESUELTO 15.1

La carga B se conecta a una polea doble mediante uno de los dos cables inextensibles que se muestran. El movimiento de la polea se controla mediante el cable C, el cual tiene una aceleración constante de 9 in./s^2 y una velocidad inicial de 12 in./s, ambas dirigidas hacia la derecha. Determine *a*) el número de revoluciones ejecutadas por la polea en 2 s, *b*) la velocidad y el cambio en la posición de la carga B después de 2 s, y *c*) la aceleración del punto D sobre el borde de la polea interna cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN



***a*) Movimiento de la polea.** Puesto que el cable es inextensible, la velocidad del punto D es igual a la velocidad del punto C y la componente tangencial de la aceleración de D es igual a la aceleración de C.

$$(\mathbf{v}_D)_0 = (\mathbf{v}_C)_0 = 12 \text{ in./s} \rightarrow \qquad (\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 9 \text{ in./s}^2 \rightarrow$$

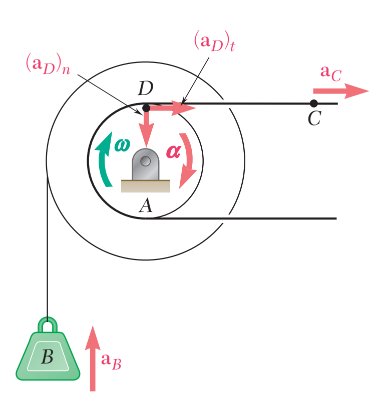
Al observar que la distancia desde D hasta el centro de la polea es de 3 in., se escribe

$$(v_D)_0 = r\omega_0 \qquad 12 \text{ in./s} = (3 \text{ in.})\omega_0 \qquad \boldsymbol{\omega}_0 = 4 \text{ rad/s} \downarrow$$
$$(a_D)_t = r\alpha \qquad 9 \text{ in./s}^2 = (3 \text{ in.})\alpha \qquad \boldsymbol{\alpha} = 3 \text{ rad/s}^2 \downarrow$$

Con base en las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, se obtiene, para $t = 2$ s,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 4 \text{ rad/s} + (3 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s}) = 10 \text{ rad/s}$$
$$\boldsymbol{\omega} = 10 \text{ rad/s} \downarrow$$
$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = (4 \text{ rad/s})(2 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(3 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s})^2 = 14 \text{ rad}$$
$$\theta = 14 \text{ rad} \downarrow$$

$$\text{Número de revoluciones} = (14 \text{ rad})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 2.23 \text{ rev} \quad \blacktriangleleft$$

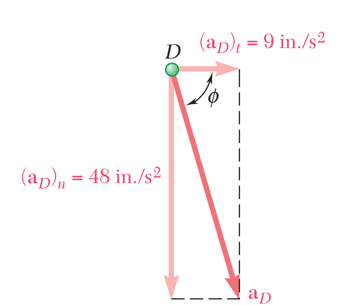


***b*) Movimiento de la carga *B*.** Mediante el uso de las relaciones siguientes entre el movimiento lineal y el angular con $r = 5$ in., se escribe

$$v_B = r\omega = (5 \text{ in.})(10 \text{ rad/s}) = 50 \text{ in./s} \qquad \mathbf{v}_B = 50 \text{ in./s} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$
$$\Delta y_B = r\theta = (5 \text{ in.})(14 \text{ rad}) = 70 \text{ in.} \qquad \Delta y_B = 70 \text{ in. hacia arriba} \quad \blacktriangleleft$$

***c*) Aceleración del punto *D* en *t* = 0.** La componente tangencial de la aceleración es

$$(\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 9 \text{ in./s}^2 \rightarrow$$



Puesto que, en $t = 0$, $\omega_0 = 4$ rad/s, la componente normal de la aceleración es

$$(a_D)_n = r_D\omega_0^2 = (3 \text{ in.})(4 \text{ rad/s})^2 = 48 \text{ in./s}^2 \qquad (\mathbf{a}_D)_n = 48 \text{ in./s}^2 \downarrow$$

La magnitud y dirección de la aceleración total puede obtenerse al escribir

$$\tan \phi = (48 \text{ in./s}^2)/(9 \text{ in./s}^2) \qquad \phi = 79.4^\circ$$
$$a_D \text{ sen } 79.4^\circ = 48 \text{ in./s}^2 \qquad a_D = 48.8 \text{ in./s}^2$$
$$\mathbf{a}_D = 48.8 \text{ in./s}^2 \measuredangle 79.4^\circ \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se inicia el estudio del movimiento de cuerpos rígidos considerando dos tipos particulares de su movimiento: *traslación* y *rotación* alrededor de un *eje fijo*.

1. Cuerpo rígido en traslación. En cualquier instante dado, todos los puntos de un cuerpo rígido en traslación tienen la *misma velocidad* y la *misma aceleración* (figura 15.7).

2. Cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo. La posición de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo se definió en cualquier instante dado mediante la *coordenada angular* θ, que suele medirse en *radianes.* Al elegir el vector unitario $\mathbf{k}$ a lo largo del eje fijo, de manera tal que la rotación del cuerpo aparece en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde la punta de $\mathbf{k}$, se definió la *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ y la *aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.6, 15.9}$$

En la solución de problemas, téngase presente que los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ están dirigidos ambos a lo largo del eje fijo de rotación y que su sentido puede obtenerse mediante la regla de la mano derecha.

a) La velocidad de un punto P de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo se determinó como

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.5}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo y $\mathbf{r}$ es el vector de posición dibujado desde cualquier punto sobre el eje de rotación hasta el punto P (figura 15.9).

b) La aceleración del punto P se determinó como

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.8}$$

Puesto que los productos vectoriales no son conmutativos, *hay que asegurarse de escribir los vectores en el orden indicado* cuando se use cualquiera de las dos ecuaciones anteriores.

3. Rotación de una placa representativa. En muchos problemas se puede reducir el análisis de la rotación de un cuerpo tridimensional alrededor de un eje fijo mediante el estudio de la rotación de una placa representativa en un plano perpendicular al eje fijo. El eje z debe dirigirse a lo largo del eje de rotación y apuntar hacia fuera del papel. Así, la placa representativa girará en el plano xy alrededor del origen O del sistema de coordenadas (figura 15.10).

Para resolver problemas de este tipo es necesario realizar lo siguiente:

a) Dibujar un diagrama de la placa representativa que muestre sus dimensiones, su velocidad angular y la aceleración angular, así como los vectores que representan las velocidades y aceleraciones de los puntos de la placa para los cuales se tiene o se busca información.

b) Relacionar la rotación de la placa y el movimiento de los puntos de la misma al escribir las ecuaciones

$$v = r\omega \qquad (15.10')$$

$$a_t = r\alpha \qquad a_n = r\omega^2 \qquad (15.11')$$

Recuerde que la velocidad **v** y la componente $\mathbf{a}_t$ de la aceleración de un punto P de la placa son tangentes a la trayectoria circular descrita por P. Las direcciones de **v** y $\mathbf{a}_t$ se encuentran al girar el vector de posición **r** 90° en el sentido indicado por $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, respectivamente. La componente normal $\mathbf{a}_n$ de la aceleración de P siempre está dirigida hacia el eje de rotación.

4. Ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido. Es posible que le complazca la similitud que existe entre las ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo [ecuaciones (15.12) a la (15.16)] y las del capítulo 11 que definen el movimiento rectilíneo de una partícula [ecuaciones (11.1) a (11.8)]. Todo lo que se necesita hacer para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones es sustituir θ, ω y α por x, v y a en las ecuaciones del capítulo 11.

Problemas

15.1 El movimiento de una leva se define por medio de la relación $\theta = t^3 - 9t^2 + 15t$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Determine la coordenada angular, la velocidad angular y la aceleración angular de la leva cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 3$ s.

15.2 Para la leva del problema 15.1, determine el tiempo, la coordenada angular y la aceleración angular cuando la velocidad angular es cero.

15.3 El movimiento de una manivela oscilante se define por medio de la relación $\theta = \theta_0$ sen $(\pi t/T) - (0.5\theta_0)$ sen $(2\,\pi t/T)$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Si se sabe que $\theta_0 = 6$ rad y $T = 4$ s, determine la coordenada angular, la velocidad angular y la aceleración angular de la manivela cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 2$ s.

15.4 Retome el problema 15.3, cuando $t = 1$ s.

15.5 El movimiento de un disco que gira en un baño de aceite se define mediante la relación $\theta = \theta_0(1 - e^{-t/4})$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Si se sabe que $\theta_0 = 0.40$ rad, determine la coordenada angular, la velocidad angular y la aceleración angular del disco cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 3$ s, *c*) $t = \infty$.

15.6 La aceleración angular de un disco oscilante se define mediante la relación $\alpha = -k\theta$. Determine *a*) el valor de k para el cual $\omega = 8$ rad/s cuando $\theta = 0$ y $\theta = 4$ rad cuando $\omega = 0$, *b*) la velocidad angular del disco cuando $\theta = 3$ rad.

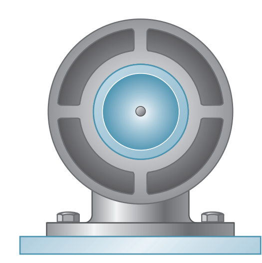


Figura *P15.7*

15.7 Cuando se pone en operación, un motor alcanza su velocidad nominal de 3 300 rpm en 6 s y cuando el motor se desactiva tarda 80 s para llegar al reposo. Si se supone que el movimiento es uniformemente acelerado, determine el número de revoluciones que ejecuta el motor *a*) para alcanzar la velocidad nominal, *b*) para detenerse.

15.8 El rotor de una turbina de gas está girando a una velocidad de 6 900 rpm cuando la turbina se desactiva. Se observa que se necesitan 4 min para que el rotor llegue al reposo. Si se supone que el movimiento es uniformemente acelerado, determine *a*) la aceleración angular, *b*) el número de revoluciones que ejecuta el rotor antes de llegar al reposo.

15.9 La aceleración angular de una flecha se define mediante la relación $\alpha = -0.25\omega$, donde α se expresa en rad/s^2 y ω en rad/s. Si se sabe que en $t = 0$ la velocidad angular de la flecha es 20 rad/s, determine *a*) el número de revoluciones que la flecha ejecutará antes de detenerse, *b*) el tiempo requerido para que la flecha se detenga y *c*) el tiempo necesario para que la velocidad angular de la flecha se reduzca en 1 por ciento de su valor inicial.

15.10 El ensamble que se muestra en la figura está compuesto por la varilla recta *ABC* que pasa por, y está soldada a la placa rectangular *DEFH*. El ensamble gira alrededor del eje *AC* con una velocidad angular constante de 9 rad/s. Si el movimiento es en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde *C*, determine la velocidad y la aceleración de la esquina *F*.

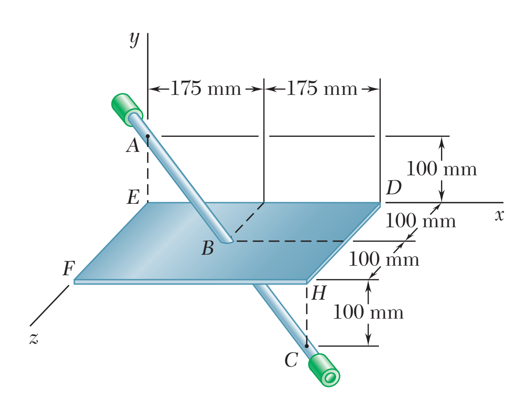


Figura P15.10

15.11 En el problema 15.10 determine la aceleración de la esquina *H*, suponiendo que la velocidad angular es de 9 rad/s y disminuye a razón de 18 rad/s^2.

15.12 La varilla doblada *ABCDE* gira alrededor de una línea que une los puntos *A* y *E* con una velocidad angular constante de 9 rad/s. Si se sabe que la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj según se observa desde *E*, determine la velocidad y aceleración de la esquina *C*.

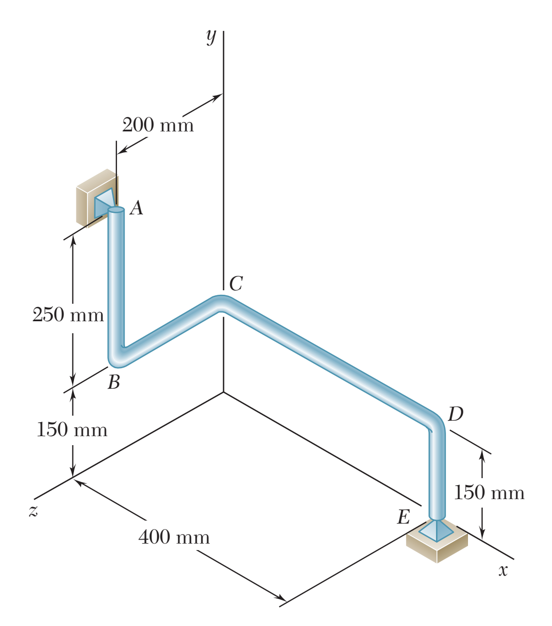


Figura P15.12

15.13 En el problema 15.12 determine la velocidad y aceleración de la esquina *B*, suponiendo que la velocidad angular es de 9 rad/s y que aumenta a razón de 45 rad/s^2.

15.14 Una placa triangular y dos placas rectangulares se sueldan a una barra recta AB. La unidad soldada gira completa alrededor del eje AB con una velocidad angular constante de 5 rad/s. Si se sabe que en el instante considerado la velocidad de la esquina E se dirige hacia abajo, determine la velocidad y la aceleración de la esquina D.

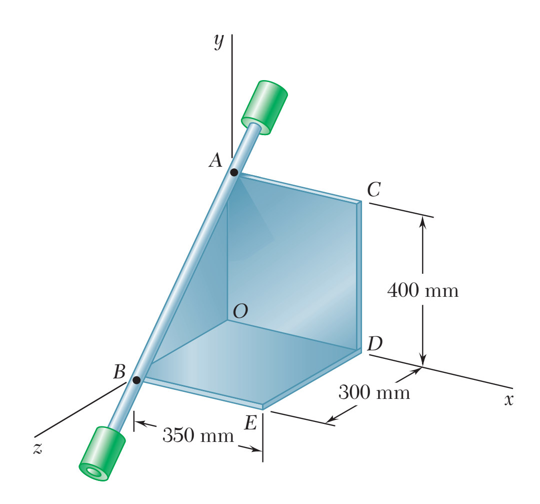


Figura *P15.14*

15.15 En el problema 15.14 determine la aceleración de la esquina D, suponiendo que la velocidad angular es de 5 rad/s y que disminuye a razón de 20 rad/s^2.

15.16 La Tierra realiza una revolución completa sobre su eje en 23 h 56 min. Si se sabe que el radio medio de la Tierra es de 3 960 mi, determine la velocidad lineal y la aceleración de un punto sobre la superficie de la Tierra *a*) en el ecuador, *b*) en Filadelfia, 40° latitud norte, *c*) en el polo norte.

15.17 La Tierra realiza una revolución completa alrededor del Sol en 365.24 días. Si se supone que la órbita de la Tierra es circular y que tiene un radio de 93 000 000 mi, determine la velocidad y aceleración de la Tierra.

15.18 La placa circular que se muestra en la figura está inicialmente en reposo. Si se sabe que $r = 200$ mm y que la placa tiene una aceleración angular constante de 0.3 rad/s^2, determine la magnitud de la aceleración total del punto B cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 2$ s, *c*) $t = 4$ s.

15.19 La aceleración angular de la placa circular de 600 mm de radio que se muestra en la figura, está definida por la relación $\alpha = \alpha_0 e^{-t}$. Si se sabe que la placa está en reposo cuando $t = 0$ y que $\alpha_0 = 10$ rad/s^2, determine la magnitud de la aceleración total del punto B cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 0.5$ s, *c*) $t = \infty$.

15.20 La placa circular de 250 mm de radio que se muestra en la figura, está inicialmente en reposo y tiene una aceleración angular definida por la relación $\alpha = \alpha_0 \cos(\pi t/T)$. Si se sabe que $T = 1.5$ s y $\alpha_0 = 10$ rad/s^2, determine la magnitud de la aceleración total del punto B cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = 0.5$ s, *c*) $t = 0.75$ s.

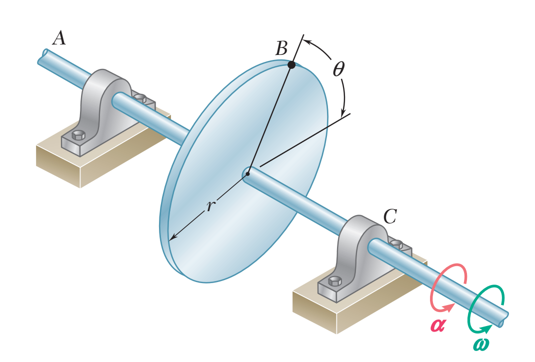


Figura P15.18, P15.19 y *P15.20*

15.21 Una serie de pequeños componentes de máquina se mueven por medio de una banda transportadora que pasa sobre una polea guía de 6 in. de radio. En el instante que se muestra, la velocidad del punto *A* es 15 in./s hacia la izquierda y su aceleración es de 9 in./s^2 hacia la derecha. Determine *a*) la velocidad angular y la aceleración angular de la polea guía y *b*) la aceleración total de los componentes de máquina en *B*.

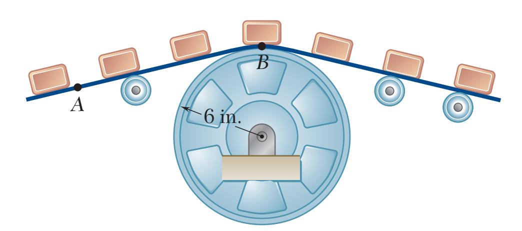


Figura P15.21 y P15.22

15.22 Una serie de pequeños componentes de máquina se mueven por medio de una banda transportadora que pasa sobre una polea guía de 6 in. de radio. En el instante que se muestra, la velocidad angular de la polea guía es de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la aceleración angular de la polea para la cual la magnitud de la aceleración total del componente de máquina en *B* es 120 in./s^2.

15.23 La lijadora de banda que se muestra en la figura se encuentra inicialmente en reposo. Si el tambor propulsor *B* tiene una aceleración angular constante de 120 rad/s^2 en sentido contrario de las manecillas del reloj, determine la magnitud de la aceleración de la banda en el punto *C* cuando *a*) $t = 0.5$ s, *b*) $t = 2$ s.

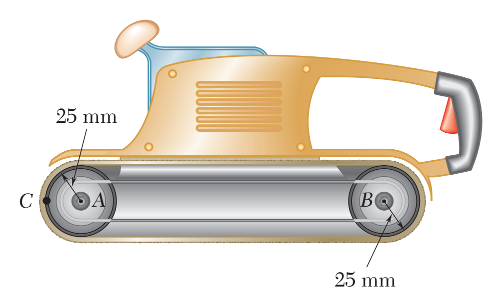


Figura *P15.23* y P15.24

15.24 La velocidad nominal del tambor *B* de la lijadora de banda que se muestra es de 2 400 rpm. Cuando se apaga, se observa que la lijadora sigue funcionando libremente desde su velocidad nominal hasta detenerse en 10 s. Si se supone movimiento uniformemente desacelerado, determine la velocidad y la aceleración del punto *C* de la banda, *a*) inmediatamente antes de ser apagada, *b*) 9 s después.

15.25 El anillo *C* tiene un radio interior de 55 mm y un radio exterior de 60 mm, se encuentra colocado entre dos ruedas *A* y *B*, cada una con 24 mm de radio exterior. Si se sabe que la rueda *A* gira con una velocidad angular constante de 300 rpm y que no se presenta deslizamiento, determine *a*) la velocidad angular del anillo *C* y de la rueda *B*, *b*) la aceleración de los puntos *A* y *B* que están en contacto con *C*.

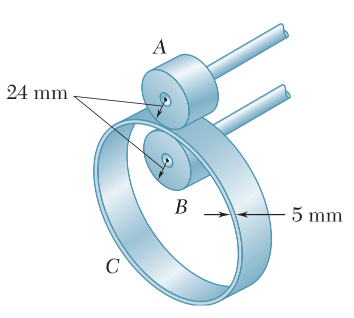


Figura P15.25

15.26 El anillo B tiene un radio interior r_2 y cuelga de un eje horizontal A en la forma indicada. Si la flecha A gira con una velocidad angular constante ω_A y no ocurre deslizamiento, obtenga una relación en términos de r_1, r_2, r_3 y ω_A para *a*) la velocidad angular del anillo B, y *b*) la aceleración de los puntos de la flecha A y del anillo B que están en contacto.

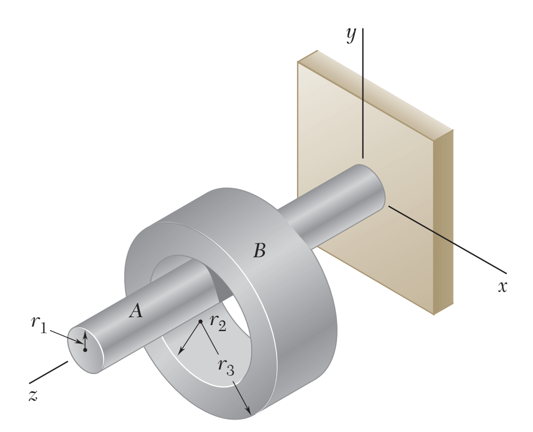


Figura *P15.26* y P15.27

15.27 El anillo B tiene un radio interior r_2 y cuelga de la flecha horizontal A en la forma que se indica. La flecha A gira con una velocidad angular constante de 25 rad/s y no ocurre deslizamiento. Si $r_1 = 12$ mm, $r_2 = 30$ mm y $r_3 = 40$ mm, determine *a*) la velocidad angular del anillo B, *b*) la aceleración de los puntos de la flecha A y del anillo B que están en contacto y *c*) la magnitud de la aceleración de un punto sobre la superficie exterior del anillo B.

15.28 El cilindro A desciende con una velocidad de 9 ft/s cuando se aplica de manera repentina el freno al tambor. Si el cilindro desciende 18 ft antes de detenerse y se supone movimiento uniformemente acelerado, determine *a*) la aceleración angular del tambor, *b*) el tiempo requerido para que el cilindro se detenga.

15.29 El sistema se mantiene en reposo mediante el sistema de freno y tambor que se ilustra en la figura. Después de que el freno se libera parcialmente en $t = 0$, se observa que el cilindro se mueve 16 ft en 5 s. Si se supone un movimiento uniformemente acelerado, determine *a*) la aceleración angular del tambor, *b*) la velocidad angular del tambor en $t = 4$ s.

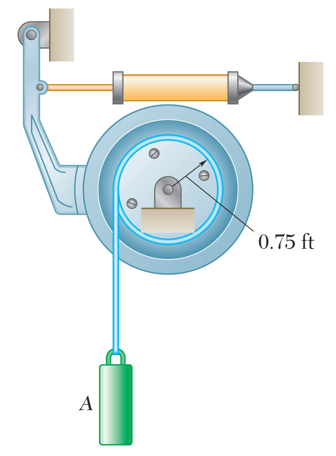


Figura P15.28 y P15.29

15.30 Una polea y dos cargas se conectan mediante cuerdas inextensibles como se muestra en la figura. La carga *A* tiene una aceleración constante de 300 mm/s^2 y una velocidad inicial de 240 mm/s, ambas dirigidas hacia arriba. Determine, *a*) el número de revoluciones ejecutadas por la polea en 3 s, *b*) la velocidad y la posición de la carga *B* después de 3 s, *c*) la aceleración del punto *D* sobre el aro de la polea en el tiempo $t = 0$.

15.31 Una polea y dos bloques se conectan mediante cuerdas inextensibles como se muestra en la figura. La polea parte desde el reposo en $t = 0$ y se acelera a una razón uniforme de 2.4 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj. En $t = 4$ s, determine la velocidad y posición de *a*) la carga *A*, *b*) la carga *B*.

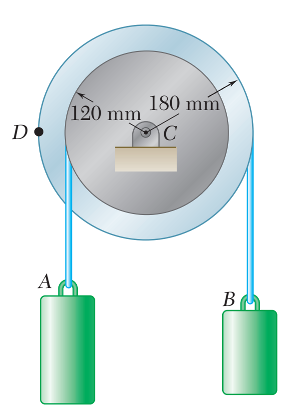


Figura P15.30 y P15.31

15.32 El disco *B* está en reposo cuando se pone en contacto con el disco *A* que gira libremente a 450 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Después de 6 s de deslizamiento, durante el cual cada disco tiene una aceleración angular constante, el disco *A* alcanza una velocidad angular final de 140 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la aceleración angular de cada disco durante el periodo de deslizamiento.

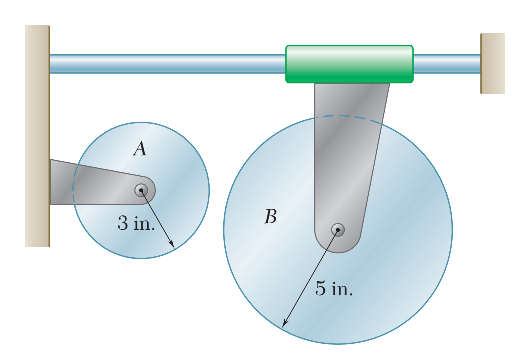


Figura P15.32 y P15.33

15.33 y *15.34* Un sistema de propulsión simple consiste en dos discos *A* y *B*. Inicialmente, el disco *A* tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 500 rpm, y el disco *B* se encuentra en reposo. Se sabe que el disco *A* quedará en reposo en 60 s. Sin embargo, en lugar de esperar hasta que ambos discos estén en reposo para unirlos, el disco *B* recibe una aceleración angular constante de 2.5 rad/s^2 en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) en qué tiempo pueden unirse los discos si no resbalan, *b*) la velocidad angular de cada disco cuando se hace el contacto.

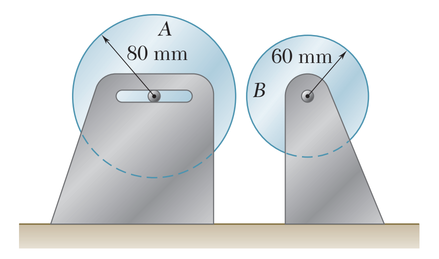
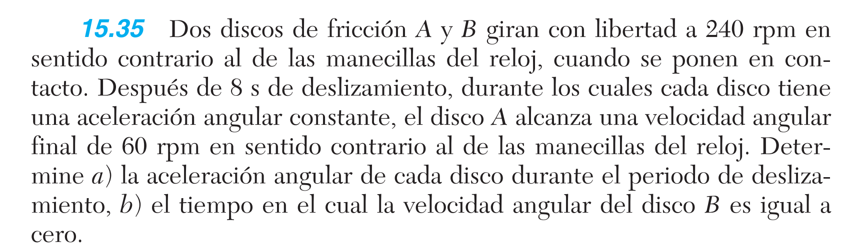


Figura *P15.34* y *P15.35*



15.35 Dos discos de fricción *A* y *B* giran con libertad a 240 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, cuando se ponen en contacto. Después de 8 s de deslizamiento, durante los cuales cada disco tiene una aceleración angular constante, el disco *A* alcanza una velocidad angular final de 60 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) la aceleración angular de cada disco durante el periodo de deslizamiento, *b*) el tiempo en el cual la velocidad angular del disco *B* es igual a cero.

***15.36** En un proceso de impresión continuo, las prensas tiran del papel a una velocidad constante *v*. Si se denota con *r* el radio del rodillo de papel en cualquier tiempo dado y con *b* el espesor del papel, obtenga una expresión para la aceleración angular del rollo de papel.

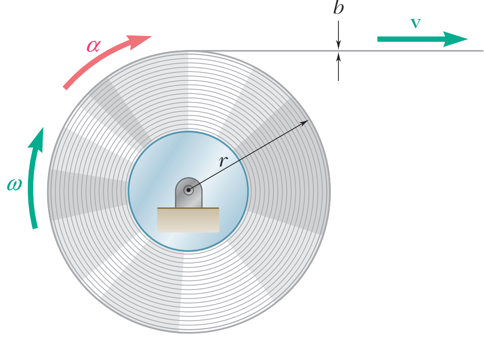


Figura P15.36

***15.37** Una cinta de grabación de televisión se rebobina en un carrete de una videograbadora que gira con una velocidad angular constante ω_0. Si se denota con r el radio del carrete en cualquier tiempo dado y con b el grosor de la cinta, obtenga una expresión para la aceleración de la cinta al aproximarse al carrete.

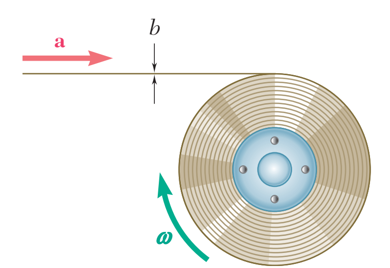


Figura P15.37

15.5. MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Tal como se indicó en la sección 15.1, el movimiento plano general es un movimiento plano que no es ni una traslación ni una rotación. Sin embargo, como se verá, *un movimiento plano general siempre puede considerarse como la suma de una traslación y una rotación.*

Considere, por ejemplo, una rueda que gira sobre una pista recta (figura 15.12). A lo largo de cierto intervalo, dos puntos dados A y B se habrán movido, respectivamente, desde A_1 hasta A_2 y desde B_1 hasta B_2. El mismo resultado podría obtenerse mediante una traslación que llevaría a A y a B hacia A_2 y B'_1 (la línea AB se mantiene vertical), seguida por una rotación alrededor de A que llevaría a B a B_2. Aunque el movimiento de giro original difiere de la combinación de traslación y rotación cuando estos movimientos se toman en forma sucesiva, el movimiento original puede duplicarse de manera exacta mediante una combinación de traslación y rotación simultáneas.

Otro ejemplo de movimiento plano lo proporciona la figura 15.13, la cual representa una varilla cuyos extremos se deslizan a lo largo de una pista horizontal y una vertical, respectivamente. Este movimiento

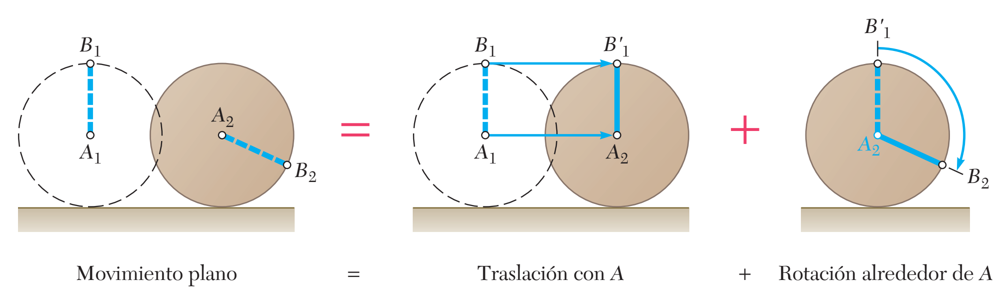


Figura 15.12

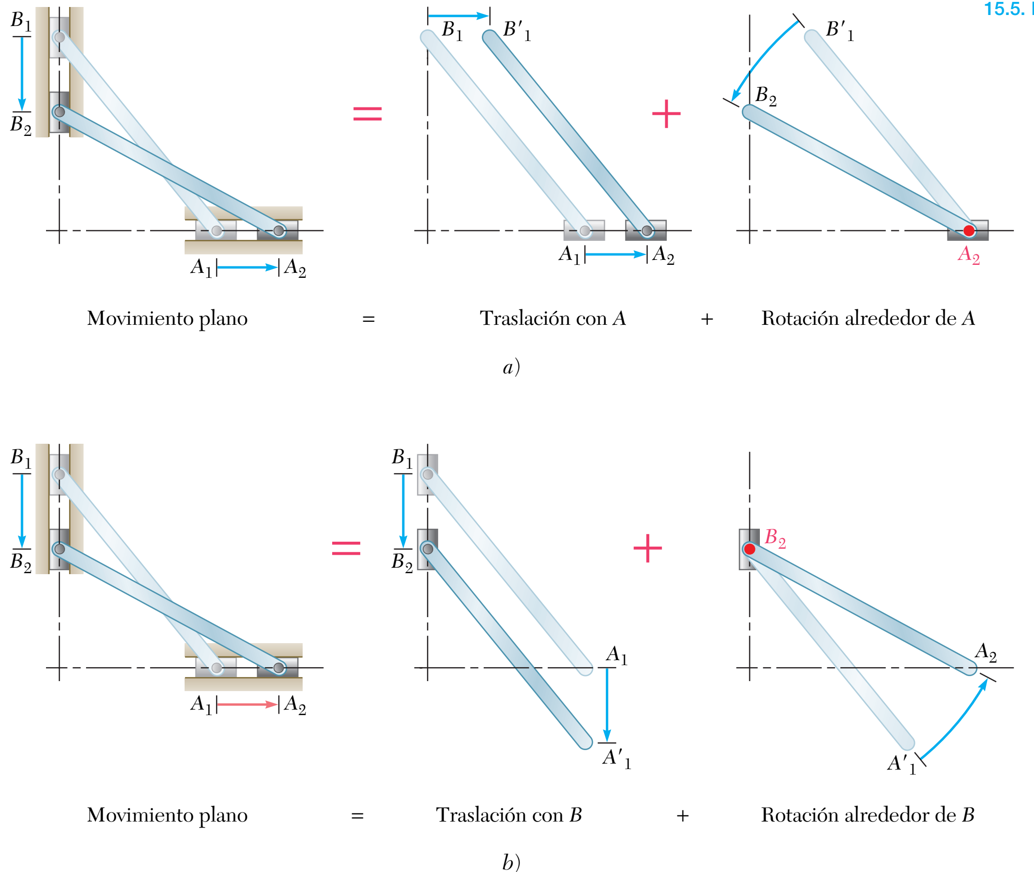


Figura 15.13

puede sustituirse por una traslación en una dirección horizontal y una rotación alrededor de A (figura 15.13a) o por una traslación en una dirección vertical y una rotación alrededor de B (figura 15.13b).

En el caso general de movimiento plano se consideró un pequeño desplazamiento que lleva a dos partículas A y B de una placa representativa, respectivamente, de A_1 y B_1 a A_2 y B_2 (figura 15.14). Este desplazamiento puede dividirse en dos partes: en una, las partículas se mueven hacia A_2 y B'_1 mientras la línea AB mantiene la misma dirección; en el otro, B se mueve hacia B_2 mientras A permanece fijo. La primera parte del movimiento es claramente una traslación y la segunda parte una rotación alrededor de A.

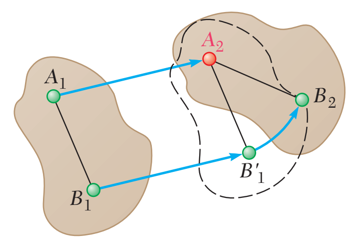


Figura 15.14

Si se recuerda de la sección 11.12 la definición de movimiento relativo de una partícula con respecto a un sistema de referencia móvil —lo que se opone a su movimiento absoluto con respecto a un sistema de referencia fijo— es posible enunciar del modo siguiente el resultado que se obtuvo antes: dadas dos partículas A y B de una placa rígida en movimiento plano, el movimiento relativo de B con respecto a un sistema de referencia unido a A y de orientación fija es una rotación. Para un observador que se mueve con A, pero que no gira, la partícula B parecerá describir un arco de un círculo centrado en A.



Fotografía 15.4 Los sistemas de engranes planetarios se usan a altas razones de reducción con espacio y peso mínimos. Los engranes pequeños realizan movimiento plano general.

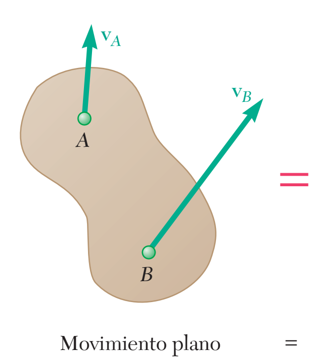
15.6. VELOCIDAD ABSOLUTA Y VELOCIDAD RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO

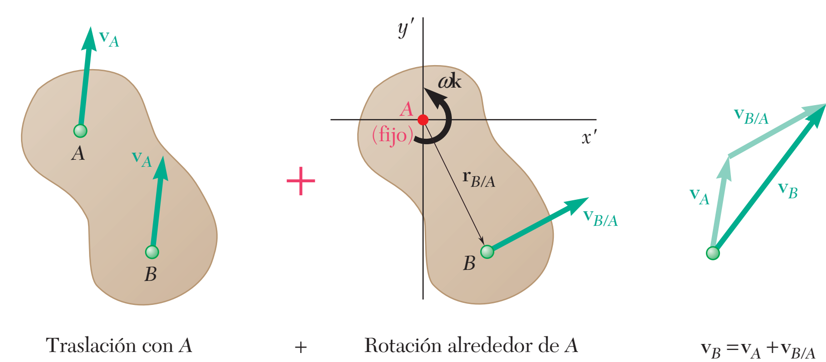
En la sección anterior se analizó que cualquier movimiento plano de una placa puede ser reemplazado por una traslación definida mediante el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y una rotación simultánea alrededor de A. La velocidad absoluta $\mathbf{v}_B$ de una partícula B de la cadena se obtiene de la fórmula de velocidad relativa que se obtuvo en la sección 11.12,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.17}$$

donde el miembro del lado derecho representa una suma vectorial. La velocidad $\mathbf{v}_A$ corresponde a la traslación de la placa con A, mientras que la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ se asocia con la rotación de la placa en torno a A y se mide con respecto a ejes centrados en A de orientación fija (figura 15.15). Al denotar mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, y por $\omega\mathbf{k}$ la velocidad angular de la placa con respecto a los ejes de orientación fija, se tiene de (15.10) y (15.10′)

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega \tag{15.18}$$





Movimiento plano = Traslación con A + Rotación alrededor de A $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$

Figura 15.15

donde r es la distancia de A a B. Sustituyendo $\mathbf{v}_{B/A}$ de (15.18) en (15.17), también se puede escribir

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.17′}$$

Como ejemplo, se necesita considerar otra vez la varilla AB de la figura 15.13. Suponiendo que se conoce la velocidad $\mathbf{v}_A$ del extremo A, se propone encontrar la velocidad $\mathbf{v}_B$ del extremo B y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la varilla, en términos de la velocidad $\mathbf{v}_A$, la longitud l y el ángulo θ. Al elegir A como un punto de referencia, se expresa que el movimiento dado es equivalente a la traslación con A y una rotación simultánea alrededor de A (figura 15.16). La velocidad absoluta de B debe entonces ser igual a la suma vectorial

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.17}$$

Advierta que mientras se conozca la dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$, su magnitud $l\omega$ es desconocida. Sin embargo, esto se compensa por el hecho de que se conoce la dirección $\mathbf{v}_B$. Por lo tanto, es posible completar el diagrama de la figura 15.16. Al despejar las magnitudes de v_B y ω se escribe

$$v_B = v_A \tan\theta \qquad \omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l\cos\theta} \tag{15.19}$$

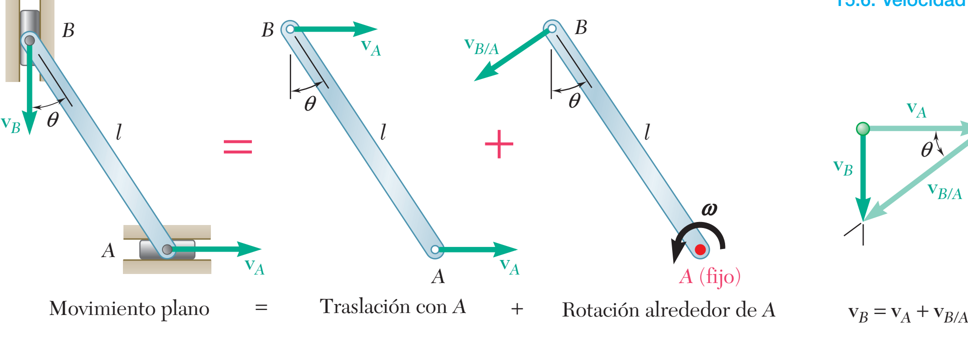


Figura 15.16

El mismo resultado se obtiene utilizando B como un punto de referencia. Al descomponer el movimiento dado en una traslación con B y una rotación simultánea alrededor de B (figura 15.17), se escribe la ecuación

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad (15.20)$$

que se representa de manera gráfica en la figura 15.17. Note que $\mathbf{v}_{A/B}$ y $\mathbf{v}_{B/A}$ tienen la misma magnitud $l\omega$ pero sentido opuesto. Por lo tanto, el sentido de la velocidad relativa depende del punto de referencia que se ha elegido y es necesario determinarlo de manera cuidadosa en el diagrama apropiado (figura 15.16 o 15.17).

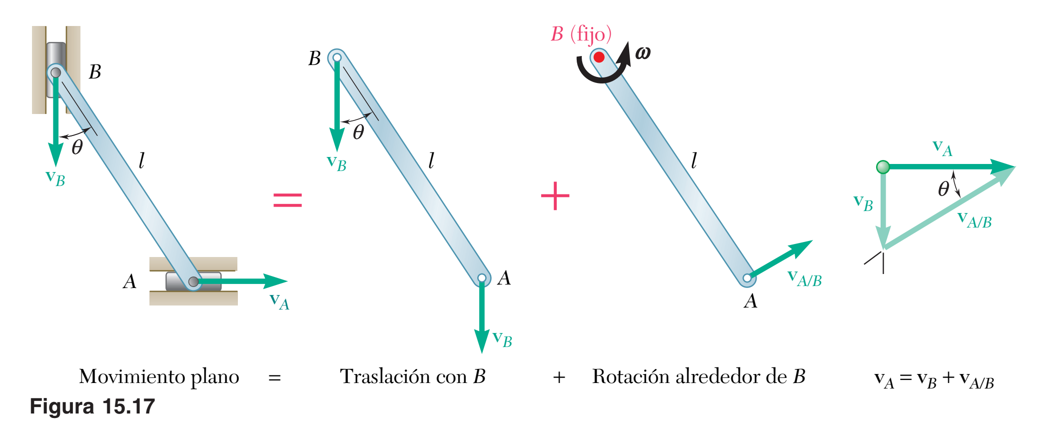
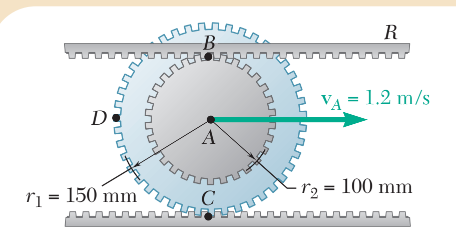


Figura 15.17

Por último, observe que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la varilla en su rotación alrededor de B es la misma que en su rotación en torno a A. En ambos casos se mide mediante la razón de cambio del ángulo θ. Este resultado es bastante general; por lo tanto, se debe tener presente que *la velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *de un cuerpo rígido en movimiento plano es independiente del punto de referencia.*

La mayoría de los mecanismos no consisten en una sino en *varias* partes móviles. Cuando las distintas partes de un mecanismo se unen mediante pasadores, el análisis del mecanismo puede efectuarse considerando cada parte como un cuerpo rígido, teniendo en cuenta que los puntos donde se unen dos partes deben tener la misma velocidad absoluta (véase el problema resuelto 15.3). Es posible utilizar un análisis similar cuando intervienen engranes, ya que los dientes en contacto también deben tener la misma velocidad absoluta. Sin embargo, cuando un mecanismo contiene partes que se deslizan entre sí, la velocidad relativa de las partes en contacto debe tomarse en cuenta (véanse las secciones 15.10 y 15.11).



PROBLEMA RESUELTO 15.2

El engrane doble que se muestra rueda sobre una cremallera estacionaria inferior; la velocidad de su centro A es 1.2 m/s dirigida hacia la derecha. Determine *a*) la velocidad angular del engrane, *b*) las velocidades de la cremallera superior R y del punto D del engrane.

SOLUCIÓN

***a*) Velocidad angular del engrane.** Puesto que el engrane rueda sobre la cremallera inferior, su centro A se mueve una distancia igual a la circunferencia exterior $2\pi r_1$ por cada revolución completa del engrane. Al observar que 1 rev = 2π rad y que cuando A se mueve hacia la derecha ($x_A > 0$) el engrane gira en el sentido de las manecillas del reloj ($\theta < 0$), se escribe

$$\frac{x_A}{2\pi r_1} = -\frac{\theta}{2\pi} \qquad x_A = -r_1\theta$$

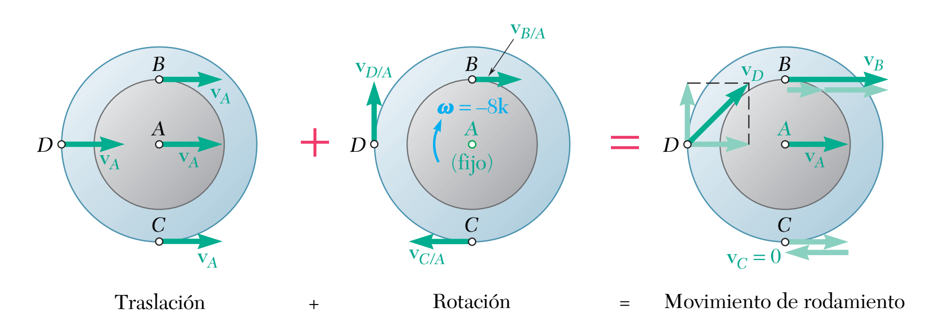
Al diferenciar con respecto al tiempo t y sustituir los valores conocidos v_A = 1.2 m/s y r_1 = 150 mm = 0.150 m, se obtiene

$$v_A = -r_1\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = -(0.150 \text{ m})\omega \qquad \omega = -8 \text{ rad/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = -(8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

donde **k** es un vector que apunta hacia fuera del papel.

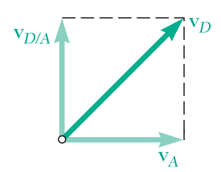
***b*) Velocidades.** El movimiento de rodamiento se transforma en dos movimientos componentes: una traslación con el centro A y una rotación alrededor del centro A. En la traslación, todos los puntos del engrane se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}_A$. En la rotación, cada punto P del engrane se mueve alrededor de A con una velocidad relativa $\mathbf{v}_{P/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{P/A}$, donde $\mathbf{r}_{P/A}$ es el vector de posición de P relativo a A.



Velocidad de la cremallera superior. La velocidad de la cremallera superior es igual a la velocidad del punto B; se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_R = \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (0.100 \text{ m})\mathbf{j} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.8 \text{ m/s})\mathbf{i} = (2 \text{ m/s})\mathbf{i} \end{aligned}$$

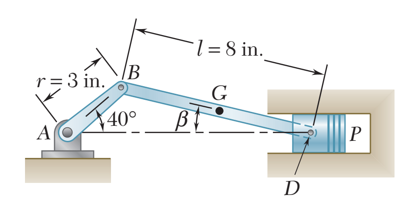
$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow \quad ◀$$



Velocidad del punto D.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{D/A} = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m})\mathbf{i} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.2 \text{ m/s})\mathbf{j} \end{aligned}$$

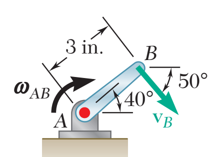
$$\mathbf{v}_D = 1.697 \text{ m/s} \measuredangle 45° \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 15.3

En el mecanismo mostrado, la manivela AB tiene una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj de 2 000 rpm. Para la posición indicada de la manivela, determine *a*) la velocidad angular de la biela BD, *b*) la velocidad del pistón P.

SOLUCIÓN



Movimiento de la manivela *AB*. La manivela AB gira alrededor del punto A. Al expresar $\boldsymbol{\omega}_{AB}$ en rad/s y escribir $v_B = r\omega_{AB}$ se obtiene

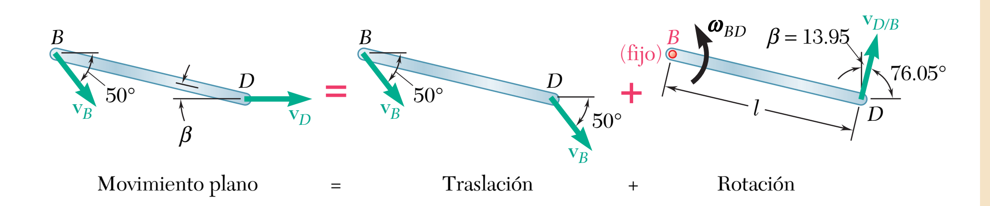
$$\omega_{AB} = \left(2\,000 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}\right) = 209.4\text{ rad/s}$$

$$v_B = (AB)\omega_{AB} = (3\text{ in.})(209.4\text{ rad/s}) = 628.3\text{ in./s}$$
$$\mathbf{v}_B = 628.3\text{ in./s} \searrow 50°$$

Movimiento de la biela *BD*. Este movimiento se considera como un movimiento plano general. Utilizando la ley de los senos, se calcula el ángulo β entre la biela y la horizontal:

$$\frac{\text{sen } 40°}{8\text{ in.}} = \frac{\text{sen } \beta}{3\text{ in.}} \qquad \beta = 13.95°$$

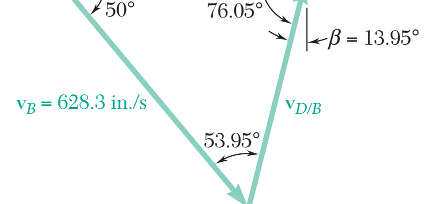
La velocidad $\mathbf{v}_D$ del punto D, donde la biela está unida al pistón, debe ser horizontal, en tanto que la velocidad del punto B es igual a la velocidad $\mathbf{v}_B$ que se obtuvo antes. Descomponiendo el movimiento de BD en una traslación con B y una rotación alrededor de B, se obtiene



Al expresar la relación entre las velocidades $\mathbf{v}_D$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_{D/B}$, se escribe

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$$

A continuación se dibuja el diagrama vectorial correspondiente a esta ecuación. Si se recuerda que $\beta = 13.95°$, se determinan los ángulos del triángulo y se escribe



$$\frac{v_D}{\text{sen } 53.95°} = \frac{v_{D/B}}{\text{sen } 50°} = \frac{628.3\text{ in./s}}{\text{sen } 76.05°}$$

$$v_{D/B} = 495.9\text{ in./s} \qquad \mathbf{v}_{D/B} = 495.9\text{ in./s} \measuredangle 76.05°$$
$$v_D = 523.4\text{ in./s} = 43.6\text{ ft/s} \qquad \mathbf{v}_D = 43.6\text{ ft/s} \rightarrow$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_D = 43.6\text{ ft/s} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Puesto que $v_{D/B} = l\omega_{BD}$, se obtiene

$$495.9\text{ in./s} = (8\text{ in.})\omega_{BD} \qquad \boldsymbol{\omega}_{BD} = 62.0\text{ rad/s} \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a analizar la velocidad de cuerpos en *movimiento plano general*. Se observó que un movimiento plano general siempre puede considerarse como la suma de los dos movimientos estudiados en esta lección, a saber, *una traslación y una rotación.*

Para resolver un problema en el que interviene la velocidad de un cuerpo en movimiento plano deben seguirse los siguientes pasos.

1. Determinar siempre que sea posible la velocidad de los puntos del cuerpo donde éste se encuentre conectado a otro cuerpo cuyo movimiento se conozca. Ese otro cuerpo tal vez sea un brazo o una manivela que gira con una velocidad angular determinada [problema resuelto 15.3].

2. A continuación, dibujar una "ecuación de diagrama" que se utilizará en la solución (figuras 15.15 y 15.16). Esta "ecuación" consistirá en los siguientes diagramas.

a) Diagrama de movimiento plano: Dibuje un diagrama del cuerpo que incluya todas las dimensiones y que muestre aquellos puntos para los que se conozca o se busque la velocidad.

b) Diagrama de traslación: Elija un punto de referencia A para el cual conozca la dirección y/o la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}_A$, y dibuje un segundo diagrama que muestre el cuerpo en traslación con todos sus puntos con la misma velocidad $\mathbf{v}_A$.

c) Diagrama de rotación: Considere el punto A como un punto fijo y dibuje un diagrama que muestre al cuerpo en rotación alrededor de A. Indique la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ del cuerpo y las velocidades relativas con respecto a A de los otros puntos, como la velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ de B relativa a A.

3. Escribir la fórmula de velocidad relativa

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Aunque es factible resolver esta ecuación vectorial en forma analítica al escribir las ecuaciones escalares correspondientes, usualmente usted encontrará más sencillo resolverla utilizando un triángulo de vectores (figura 15.16).

4. Es posible utilizar un punto de referencia diferente para obtener una solución equivalente. Por ejemplo, si se elige el punto B como el punto de referencia, la velocidad del punto A se expresa como

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

Advierta que las velocidades relativas $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{v}_{A/B}$ tienen la misma magnitud, pero sentido opuesto. Por lo tanto, las velocidades relativas dependen del punto de referencia que se ha seleccionado. Sin embargo, la velocidad angular es independiente de la elección del punto de referencia.

Problemas

15.38 El movimiento de la varilla AB es guiado por los pasadores en A y B, los cuales se deslizan en las ranuras mostradas. En el instante que se indica, $\theta = 40°$ y el pasador en B se mueve hacia arriba y a la izquierda con una velocidad constante de 6 in./s. Determine *a*) la velocidad angular de la varilla y *b*) la velocidad del pasador en el extremo A.

15.39 El movimiento de la varilla AB es guiado por los pasadores en A y B, los cuales se deslizan en las ranuras indicadas. En el instante mostrado, $\theta = 30°$ y el pasador en A se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 9 in./s. Determine *a*) la velocidad angular de la varilla y *b*) la velocidad del pasador en el extremo B.

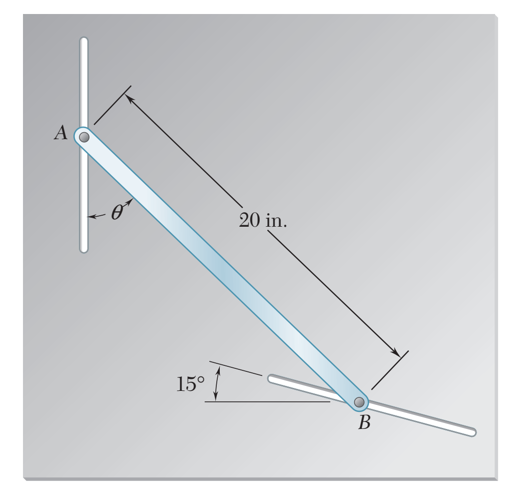


Figura P15.38 y P15.39

15.40 Se han unido unas pequeñas ruedas a los extremos de la varilla AB y ruedan libremente a lo largo de las superficies que se muestran. Si la rueda A se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 1.5 m/s, determine *a*) la velocidad angular de la varilla, *b*) la velocidad del extremo B de la varilla.

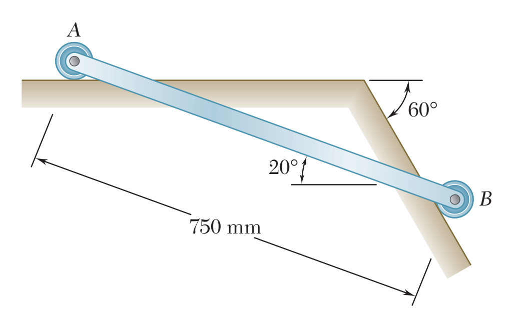


Figura P15.40

15.41 El collarín A se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 1.2 m/s. En el instante mostrado cuando $\theta = 25°$, determine *a*) la velocidad angular de la varilla AB, *b*) la velocidad del collarín B.

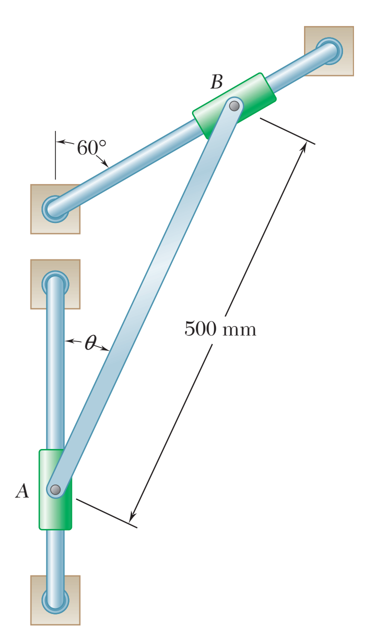


Figura P15.41 y *P15.42*

15.42 El collarín B se mueve hacia abajo y a la izquierda con una velocidad constante de 1.6 m/s. En el instante mostrado cuando $\theta = 40°$, determine *a*) la velocidad angular de la varilla AB, *b*) la velocidad del collarín A.

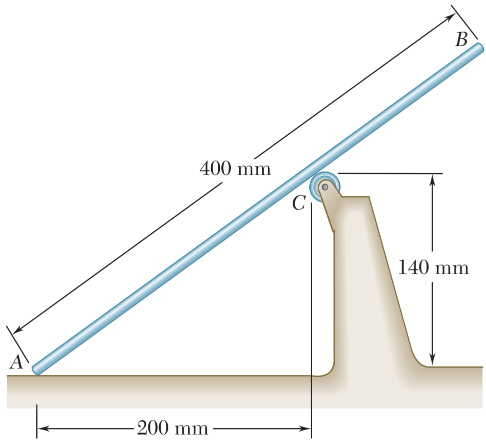


Figura P15.43

15.43 La varilla AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante de 500 mm/s. En el instante mostrado, determine *a*) la velocidad angular de la varilla y *b*) la velocidad del extremo B de la varilla.

15.44 La placa mostrada en la figura se mueve en el plano xy. Si $(v_A)_x = 12$ in./s, $(v_B)_x = -4$ in./s y $(v_C)_y = -24$ in./s, determine *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad del punto B.

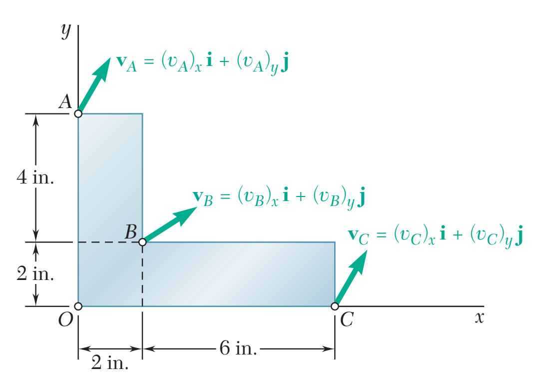


Figura P15.44

15.45 En el problema 15.44 determine *a*) la velocidad del punto A, *b*) el punto de la placa con velocidad cero.

15.46 La placa mostrada en la figura se mueve en el plano xy. Si $(v_A)_x = 120$ mm/s, $(v_B)_y = 300$ mm/s y $(v_C)_y = -60$ mm/s, determine *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad del punto A.

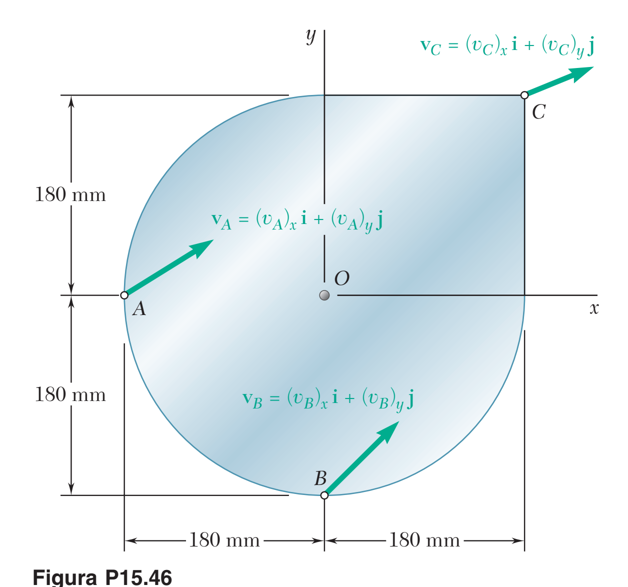


Figura P15.46

15.47 En el problema 15.46 determine *a*) la velocidad del punto B, *b*) el punto de la placa con velocidad cero.

15.48 En el sistema de engranes planetarios que se muestra en la figura, el radio de los engranes A, B, C y D es de 3 in. y el radio del engrane exterior E es de 9 in. Si se sabe que el engrane E tiene una velocidad angular de 120 rpm en el sentido de las manecillas del reloj y que el engrane central tiene una velocidad angular de 150 rpm en el mismo sentido, determine *a*) la velocidad angular de cada engrane planetario y *b*) la velocidad angular de la araña que conecta a los engranes planetarios.

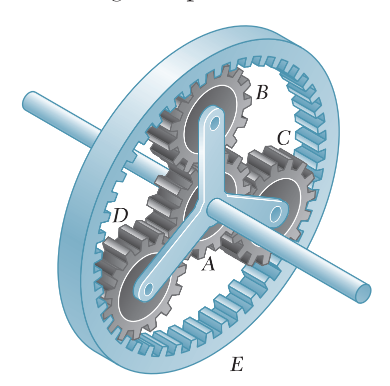


Figura P15.48 y P15.49

15.49 En el sistema de engranes planetarios que se muestra en la figura, el radio del engrane central A es a, el radio de los engranes planetarios es b y el radio del engrane exterior E es $a + 2b$. La velocidad angular del engrane A es ω_A en el sentido de las manecillas del reloj, y el engrane exterior es estacionario. Si la velocidad angular de la araña BCD debe ser $\omega_A/5$ en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a*) el valor requerido del cociente b/a y *b*) la correspondiente velocidad angular de cada engrane planetario.

15.50 El engrane A gira con una velocidad angular de 120 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Si se sabe que la velocidad angular del brazo AB es de 90 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular correspondiente del engrane B.

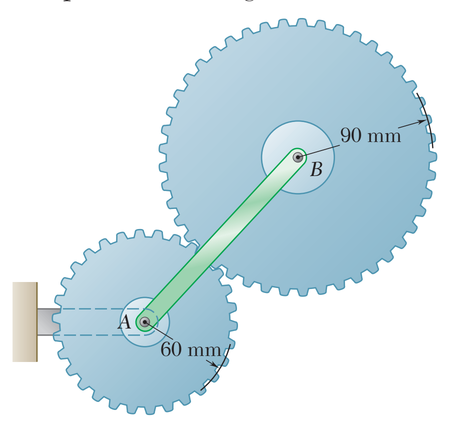


Figura P15.50 y P15.51

15.51 El brazo AB gira con una velocidad angular de 42 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la velocidad angular requerida del engrane A para la cual *a*) la velocidad angular del engrane B es de 20 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, *b*) el movimiento del engrane B es una traslación curvilínea.

15.52 El brazo AB gira con una velocidad angular de 20 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si se sabe que el engrane exterior C es estacionario, determine *a*) la velocidad angular del engrane B, *b*) la velocidad del diente del engrane localizado en el punto D.

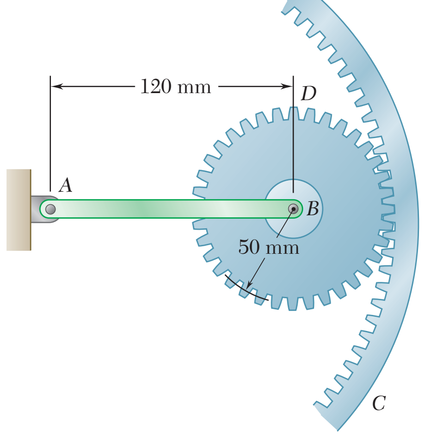


Figura P15.52

15.53 y 15.54 El brazo ACB gira alrededor del punto C con una velocidad angular de 40 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por medio de pasadores insertados en sus centros, dos discos de fricción A y B se montan sobre el brazo ACB como se muestra en la figura. Si los dos discos ruedan sin deslizarse en las superficies de contacto, determine la velocidad angular de *a*) el disco A, *b*) el disco B.

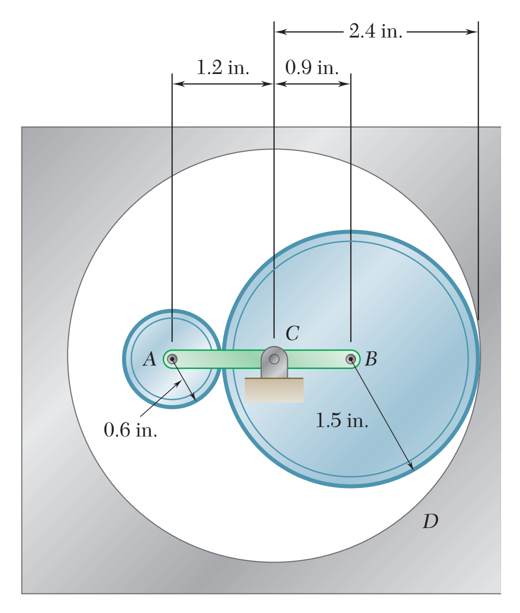


Figura *P15.53*

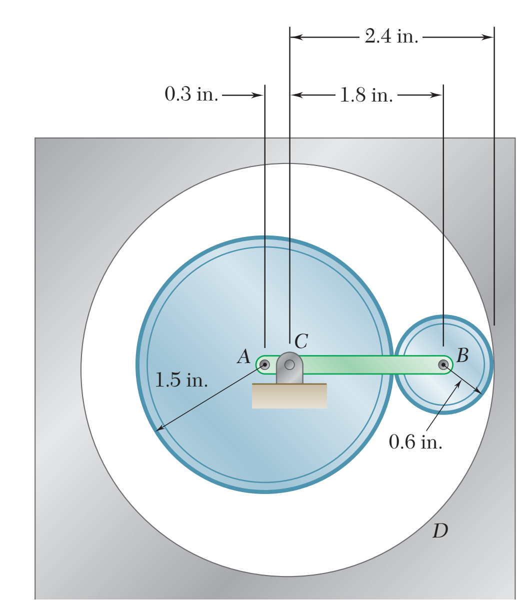


Figura *P15.54*

15.55 Si la manivela AB tiene una velocidad angular constante de 160 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular de la varilla BD y la velocidad del collarín D cuando *a*) $\theta = 0$, *b*) $\theta = 90°$.

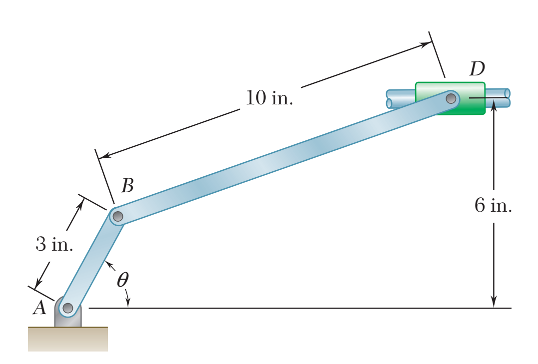


Figura P15.55 y P15.56

15.56 Si la manivela AB tiene una velocidad angular constante de 160 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular de la varilla BD y la velocidad del collarín D cuando $\theta = 60°$.

15.57 En el mecanismo mostrado, l = 160 mm y b = 60 mm. Si la manivela AB gira con una velocidad angular constante de 1 000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del pistón P y la velocidad angular de la biela cuando *a*) $\theta = 0$ y *b*) $\theta = 90°$.

15.58 En el mecanismo que se muestra en la figura P15.57 y P15.58, l = 160 mm y b = 60 mm. Si la manivela AB gira con una velocidad angular constante de 1 000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del pistón P y la velocidad angular de la biela cuando $\theta = 60°$.

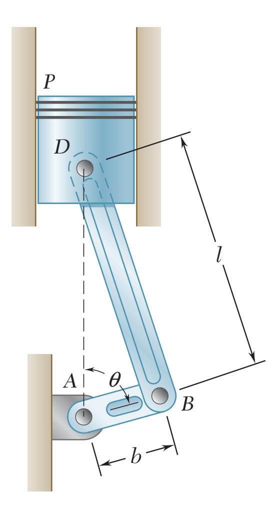


Figura P15.57 y P15.58

15.59 Una cremallera recta descansa sobre un engrane de radio r y está fija a un bloque B en la forma que se indica. Si se denota con ω_D la velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj del engrane D y con θ el ángulo que forma la cremallera y la horizontal, obtenga expresiones para la velocidad del bloque B y la velocidad angular de la cremallera en términos de r, θ y ω_D.

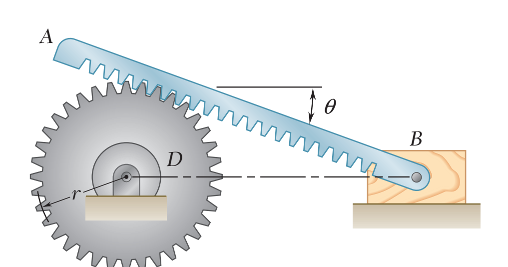


Figura *P15.59*, P15.60 y P15.61

15.60 Una cremallera recta descansa sobre un engrane de radio r = 75 mm y está fija a un bloque B en la forma que se indica. Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular del engrane D es de 15 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj y que $\theta = 20°$, determine *a*) la velocidad del bloque B, *b*) la velocidad angular de la cremallera.

15.61 Una cremallera recta descansa sobre un engrane de radio r = 60 mm y está fija a un bloque B en la forma que se indica. Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad del bloque B es de 200 mm/s hacia la derecha y que $\theta = 25°$, determine *a*) la velocidad angular del engrane D, *b*) la velocidad angular de la cremallera.

15.62 En la rueda excéntrica que se muestra, un disco de 2 in. de radio gira alrededor del eje O que se ubica a 0.5 in. del centro A del disco. La distancia entre el centro A del disco y el pasador en B es de 8 in. Si la velocidad angular del disco es de 900 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del bloque cuando $\theta = 30°$.

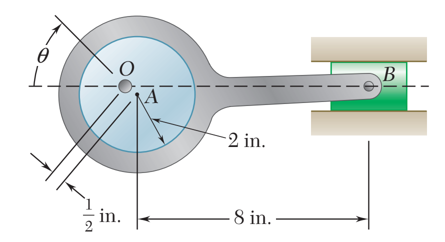


Figura *P15.62*

15.63 a 15.65 En la posición mostrada, la barra AB tiene una velocidad angular de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la velocidad angular de las barras BD y DE.

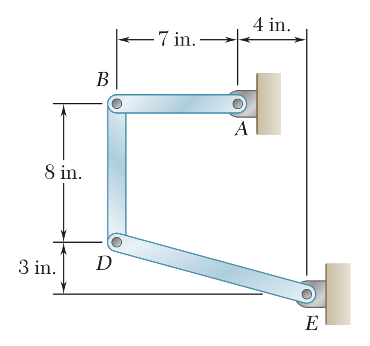


Figura P15.63

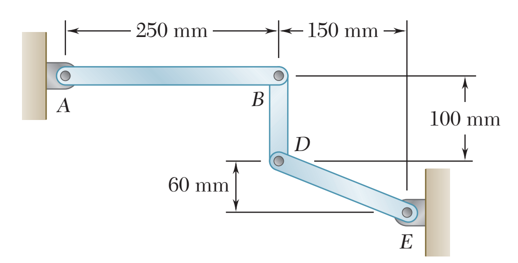


Figura P15.64

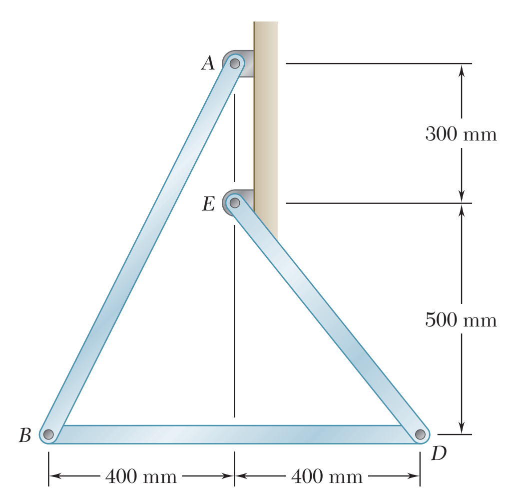


Figura P15.65

15.66 En la posición mostrada, la barra DE tiene una velocidad angular constante de 10 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Si h = 500 mm, determine *a*) la velocidad angular de la barra FBD, *b*) la velocidad del punto F.

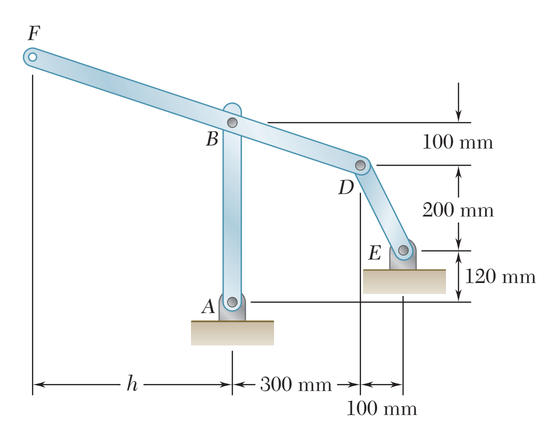


Figura *P15.66* y *P15.67*

15.67 En la posición mostrada, la barra DE tiene una velocidad angular constante de 10 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determine *a*) la distancia h para la cual la velocidad del punto F es vertical, *b*) la velocidad correspondiente del punto F.

15.68 En la posición mostrada, la barra AB tiene aceleración angular nula y una velocidad angular constante de 20 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) la velocidad angular del elemento BDH, *b*) la velocidad del punto G.

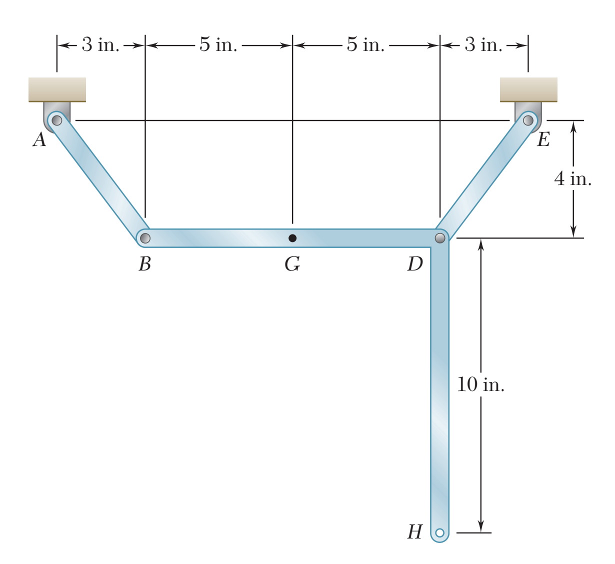


Figura P15.68 y P15.69

15.69 En la posición mostrada, la barra AB tiene aceleración angular nula y una velocidad angular constante de 20 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) la velocidad angular del elemento BDH, *b*) la velocidad del punto H.

15.70 Un automóvil viaja hacia la derecha a una rapidez constante de 48 mi/h. Si el diámetro del neumático es de 22 in., determine las velocidades de los puntos B, C, D y E en el borde del mismo.

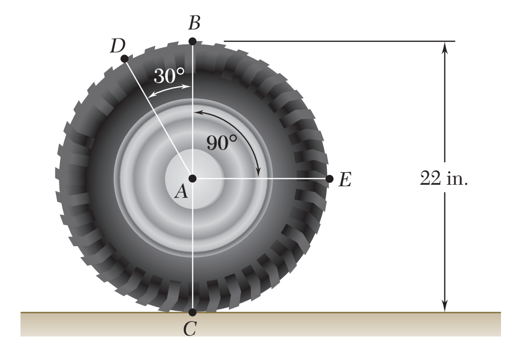


Figura P15.70

15.71 La rueda de 80 mm de radio que se muestra en la figura, gira hacia la izquierda con una velocidad de 900 mm/s. Si la distancia AD es de 50 mm, determine la velocidad del collarín y la velocidad angular de la varilla AB cuando a) $\beta = 0$ y b) $\beta = 90°$.

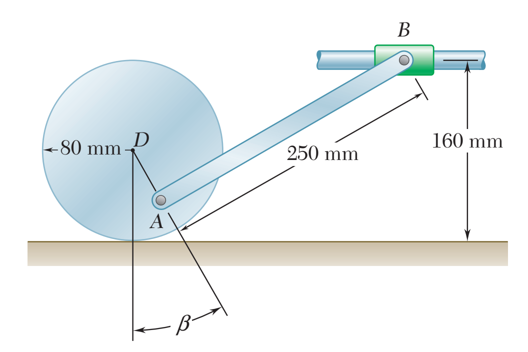


Figura P15.71

***15.72** Para el arreglo de engranes que se muestra en la figura, obtenga una expresión para la velocidad angular ω_C del engrane C y demuestre que ω_C es independiente del radio del engrane B. Suponga que el punto A está fijo y denote las velocidades angulares de la barra ABC y del engrane A con ω_{ABC} y ω_A, respectivamente.

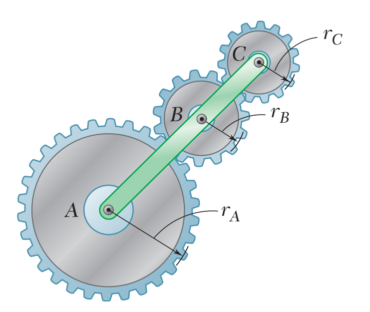
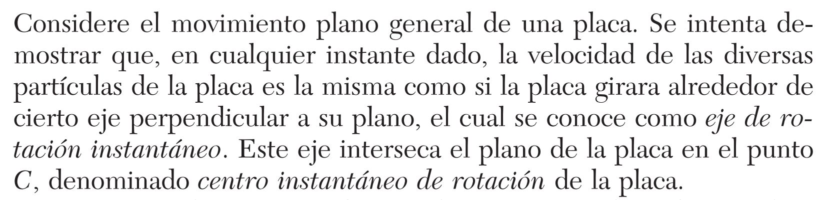


Figura P15.72

15.7. CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN EN EL MOVIMIENTO PLANO



Fotografía 15.5 Si los neumáticos de este automóvil ruedan sin deslizamiento, el centro instantáneo de rotación de una llanta es el punto de contacto entre el camino y el neumático.



Considere el movimiento plano general de una placa. Se intenta demostrar que, en cualquier instante dado, la velocidad de las diversas partículas de la placa es la misma como si la placa girara alrededor de cierto eje perpendicular a su plano, el cual se conoce como *eje de rotación instantáneo*. Este eje interseca el plano de la placa en el punto C, denominado *centro instantáneo de rotación* de la placa.

En primer lugar, recuerde que el movimiento plano de una placa siempre puede sustituirse mediante una traslación definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y mediante una rotación en torno a A. En cuanto a las velocidades, la traslación se caracteriza por la velocidad $\mathbf{v}_A$ del punto de referencia A, y la rotación se caracteriza por la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la placa (que es independiente de la elección de A). De este modo, la velocidad $\mathbf{v}_A$ del punto A y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la placa definen por completo las velocidades de todas las demás partículas de la placa (figura 15.18a). A continuación suponga que se conocen $\mathbf{v}_A$ y $\boldsymbol{\omega}$ y que ambas son diferentes de cero.

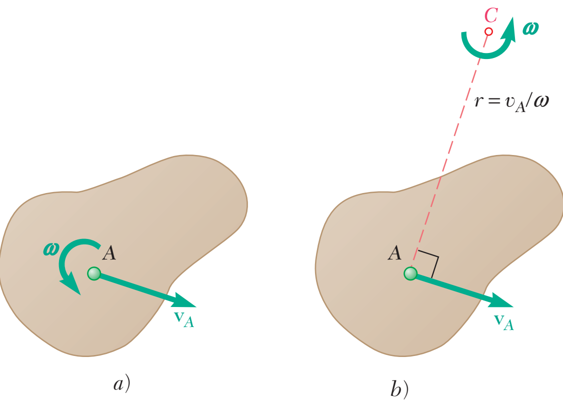


Figura 15.18

(Si $\mathbf{v}_A = 0$, el mismo punto A es el centro instantáneo de rotación y si $\boldsymbol{\omega} = 0$, todas las partículas tienen la misma velocidad $\mathbf{v}_A$.) Estas velocidades podrían obtenerse dejando que la placa gire con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del punto C ubicado sobre la perpendicular a $\mathbf{v}_A$ a una distancia $r = v_A/\omega$ de A, como se indica en la figura 15.18*b*. Se verifica que la velocidad de A sería perpendicular a AC y que su magnitud sería $r\omega = (v_A/\omega)\omega = v_A$. De esta manera, las velocidades de todas las demás partículas de la placa serían las mismas que se definieron originalmente. Por lo tanto, *en cuanto a lo que se refiere a las velocidades, la placa parece girar alrededor del centro instantáneo C* en el instante considerado.

La posición del centro instantáneo puede definirse de otras dos formas. Si se conocen las direcciones de las velocidades de las dos partículas A y B de la placa y si éstas son diferentes, el centro instantáneo C se obtiene dibujando la perpendicular a $\mathbf{v}_A$ a través de A y la perpendicular a $\mathbf{v}_B$ a través de B y determinando el punto en el cual se intersecan estas dos líneas (figura 15.19*a*). Si las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de las dos partículas A y B son perpendiculares a la línea AB y si se conocen sus magnitudes, el centro instantáneo puede encontrarse intersecando la línea AB con la línea que une los extremos de los vectores $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ (figura 15.19*b*). Advierta que si $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ fueran paralelas en la figura 15.19*a* o si $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ tuvieran la misma magnitud en la figura 15.19*b*,

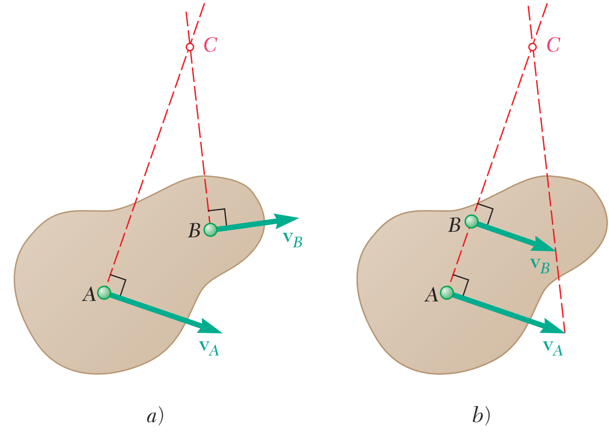


Figura 15.19

el centro instantáneo C estaría a una distancia infinita y $\boldsymbol{\omega}$ sería cero. Todos los puntos de la placa tendrían la misma velocidad.

Para observar cómo es posible poner en práctica el concepto de centro instantáneo de rotación considere de nuevo la varilla de la sección 15.6. Al dibujar la perpendicular a $\mathbf{v}_A$ a través de A y la perpendicular a $\mathbf{v}_B$ a través de B (figura 15.20), se obtiene el centro instantáneo C. En el instante considerado, las velocidades de todas las partículas de la varilla

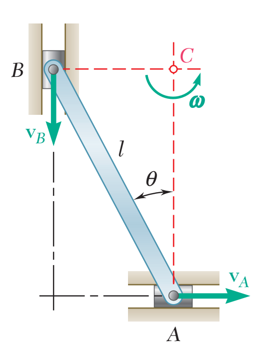


Figura 15.20

son las mismas, como si esta última girara en torno a C. Ahora bien, si se conoce la magnitud v_A de la velocidad A, la magnitud ω de la velocidad angular de la varilla puede obtenerse al escribir

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

La magnitud de la velocidad de B se obtiene entonces al escribir

$$v_B = (BC)\omega = l \operatorname{sen} \theta \frac{v_A}{l \cos \theta} = v_A \tan \theta$$

Advierta que sólo las *velocidades absolutas* intervienen en el cálculo.

El centro instantáneo de la placa en el movimiento plano se localiza en la placa o fuera de la misma. Si ocurriera lo primero, la partícula C que coincide con el centro instantáneo en un instante dado t debe tener velocidad cero en ese instante. Sin embargo, debe notarse que el centro de rotación instantáneo sólo es válido en un instante determinado. De tal modo, la partícula C de la placa que coincide con el centro instantáneo en el tiempo t generalmente no coincidirá con el centro instantáneo en el tiempo $t + \Delta t$; si bien su velocidad es cero en el tiempo t, probablemente será diferente de cero en el tiempo $t + \Delta t$. Lo anterior significa que, en general, la partícula C *no tiene aceleración cero* y, por lo tanto, que las *aceleraciones* de las diversas partículas de la placa *no pueden* determinarse como si la placa estuviera girando alrededor de C.

Conforme avance el movimiento de la placa, el centro instantáneo se mueve en el espacio. Sin embargo, se señaló que la posición del centro instantáneo de la placa se mantiene sin cambio. Por consiguiente, el centro instantáneo describe una curva en el espacio, llamada *centroda espacial*, y otra curva en la placa, llamada *centroda corporal* (figura 15.21). Es posible demostrar que en cualquier instante, estas dos curvas son tangentes en C y que cuando la placa se mueve, la centroda corporal *rodará* sobre la centroda espacial.

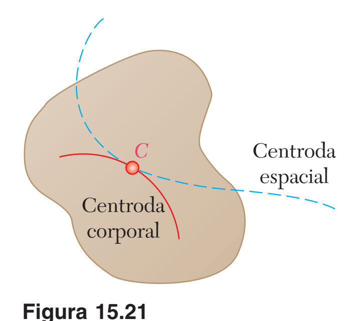
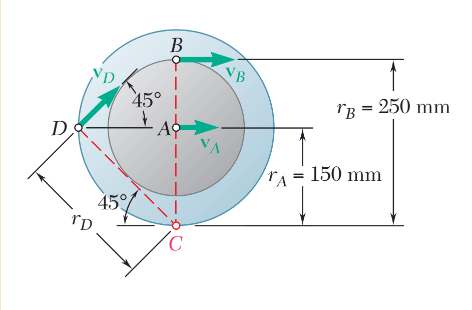


Figura 15.21

PROBLEMA RESUELTO 15.4

Resuelva el problema resuelto 15.2 con el método del centro instantáneo de rotación.

SOLUCIÓN



***a)* Velocidad angular del engrane.** Puesto que el engrane rueda sobre la cremallera inferior estacionaria, el punto de contacto C del engrane con la cremallera no tiene velocidad; el punto C es en consecuencia el centro instantáneo de rotación. Se escribe

$$v_A = r_A\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = (0.150 \text{ m})\omega$$

$$\boldsymbol{\omega} = 8 \text{ rad/s} \downarrow \quad ◀$$

***b)* Velocidades.** En lo que se refiere a las velocidades, todos los puntos del engrane parecen girar alrededor del centro instantáneo.

Velocidad de la cremallera superior. Si se recuerda que $v_R = v_B$, se escribe

$$v_R = v_B = r_B\omega \qquad v_R = (0.250 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 2 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow \quad ◀$$

Velocidad del punto D. Puesto que $r_D = (0.150 \text{ m})\sqrt{2} = 0.2121$ m, se escribe

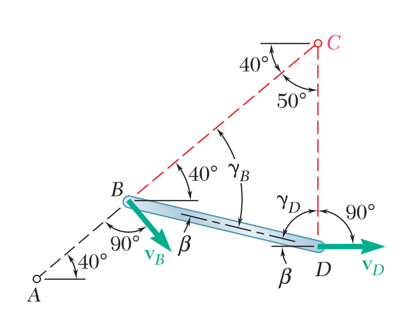
$$v_D = r_D\omega \qquad v_D = (0.2121 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 1.697 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_D = 1.697 \text{ m/s} \measuredangle 45° \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 15.5

Resuelva el problema resuelto 15.3 con el método del centro instantáneo de rotación.

SOLUCIÓN



Movimiento de la manivela *AB*. Con referencia al problema resuelto 15.3, se obtiene la velocidad del punto B; $\mathbf{v}_B = 628.3$ in./s $\searrow$ 50°.

Movimiento de la biela *BD*. Se localiza primero el centro instantáneo C dibujando líneas perpendiculares a las velocidades absolutas $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_D$. Al recordar del problema resuelto 15.3 que $\beta = 13.95°$ y que $BD = 8$ in., se resuelve el triángulo BCD.

$$\gamma_B = 40° + \beta = 53.95° \qquad \gamma_D = 90° - \beta = 76.05°$$

$$\frac{BC}{\text{sen } 76.05°} = \frac{CD}{\text{sen } 53.95°} = \frac{8 \text{ in.}}{\text{sen } 50°}$$

$$BC = 10.14 \text{ in.} \qquad CD = 8.44 \text{ in.}$$

Puesto que la biela BD parece girar alrededor del punto C, se escribe

$$v_B = (BC)\omega_{BD}$$
$$628.3 \text{ in./s} = (10.14 \text{ in.})\omega_{BD}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = 62.0 \text{ rad/s} \circlearrowleft \quad ◀$$

$$v_D = (CD)\omega_{BD} = (8.44 \text{ in.})(62.0 \text{ rad/s})$$
$$= 523 \text{ in./s} = 43.6 \text{ ft/s}$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_D = 43.6 \text{ ft/s} \rightarrow \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentó el *centro instantáneo de rotación* en un movimiento plano. Esto proporcionó una manera alternativa de resolver problemas en los que intervienen *velocidades* de diversos puntos de un cuerpo en movimiento plano.

Como su nombre sugiere, el *centro instantáneo de rotación* es el punto alrededor del cual es posible suponer que un cuerpo está girando en un instante dado, al determinar las velocidades de los puntos del cuerpo en ese instante.

A. Para determinar el centro instantáneo de rotación del cuerpo en movimiento plano, es necesario utilizar uno de los siguientes procedimientos.

1. Si se conocen tanto la velocidad $\mathbf{v}_A$ del punto A como la velocidad angular ω del cuerpo (figura 15.18):

a) Dibujar un bosquejo del cuerpo, en el que se muestre el punto A, su velocidad $\mathbf{v}_A$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo.

b) A partir de A dibujar una línea perpendicular a $\mathbf{v}_A$ del lado $\mathbf{v}_A$ desde donde se ve que esta velocidad tiene *el mismo sentido que* $\boldsymbol{\omega}$.

c) Localizar el centro instantáneo C sobre esta línea, a una distancia $r = v_A/\omega$ desde el punto A.

2. Si las direcciones de las velocidades de los dos puntos A y B se conocen y son diferentes (figura 15.19*a*):

a) Dibujar un bosquejo del cuerpo en el que se muestren los puntos A y B y sus velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$.

b) Desde A y B dibujar líneas perpendiculares a $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente. El centro instantáneo C se ubica en el punto donde se intersectan las dos líneas.

c) Si se conoce la velocidad de uno de los dos puntos es posible determinar la velocidad angular del cuerpo. Por ejemplo, si se conoce v_A, se puede escribir $\omega = v_A/AC$, donde AC es la distancia desde el punto A hasta el centro instantáneo C.

3. Si se conocen las velocidades de los dos puntos A y B y ambas son perpendiculares a la línea AB (figura 15.19*b*):

a) Dibujar un bosquejo del cuerpo en el que se muestren los puntos A y B con sus velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ *dibujadas a escala.*

b) Dibujar una línea a través de los puntos A y B y otra línea a través de las puntas de los vectores $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$. El centro instantáneo C se localiza en los puntos donde se cortan las dos líneas.

c) La velocidad angular del cuerpo se obtiene al dividir $\mathbf{v}_A$ entre AC o $\mathbf{v}_B$ entre BC.

d) Si las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ tienen la misma magnitud, las dos líneas que se dibujaron en la parte *b* no se intersectan; el centro instantáneo *C* está a una distancia infinita. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es cero y *el cuerpo está en traslación.*

B. Una vez que se ha determinado el centro instantáneo y la velocidad angular del cuerpo, se puede determinar la velocidad $\mathbf{v}_P$ de cualquier punto *P* del cuerpo de la siguiente manera:

1. Dibujar un bosquejo del cuerpo en el que se muestre el punto *P*, el centro instantáneo de rotación *C* y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

2. Dibujar una línea desde P hasta el centro instantáneo C y medir o calcular la distancia desde *P* hasta *C*.

3. La velocidad $\mathbf{v}_P$ es un vector perpendicular a la línea PC, del mismo sentido que $\boldsymbol{\omega}$, y de magnitud $v_P = (PC)\omega$.

Por último, tenga presente que el centro instantáneo de rotación *sólo* se puede utilizar para determinar velocidades. *No es posible emplearlo para determinar aceleraciones.*

Problemas

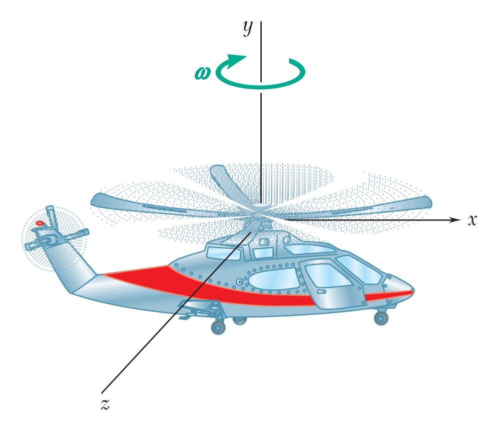


Figura P15.74

15.73 Una viga *AE* de 10 ft se baja por medio de dos grúas viajeras. En el instante que se muestra la velocidad del punto *D* es de 24 in./s hacia abajo y la velocidad en el punto *E* es de 36 in./s hacia abajo. Determine *a*) el centro instantáneo de rotación de la viga y *b*) la velocidad del punto *A*.

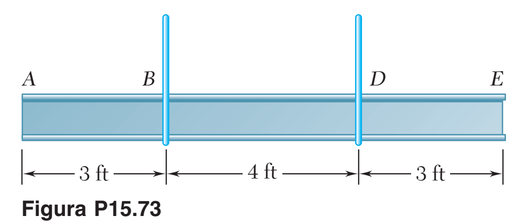


Figura P15.73

15.74 Un helicóptero se mueve horizontalmente en la dirección *x* a una rapidez de 120 mi/h. Si se sabe que las aspas principales giran en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de 180 rpm, determine el eje de rotación instantáneo de las aspas principales.

15.75 El carrete de cinta que se muestra y el armazón en el que está montado se jalan hacia arriba a una rapidez v_A = 750 mm/s. Si el carrete de 80 mm de radio tiene una velocidad angular de 15 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y en el instante mostrado el grosor total de la cinta en el carrete es de 20 mm, determine *a*) el centro instantáneo de rotación del carrete, *b*) las velocidades de los puntos *B* y *D*.

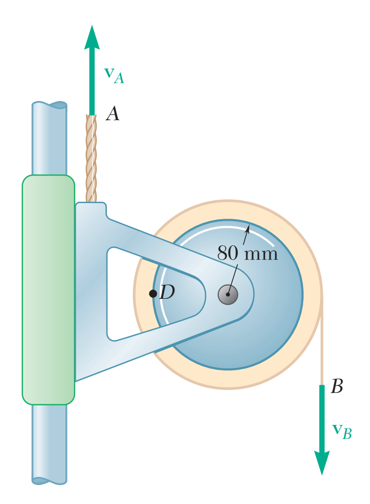


Figura P15.75 y P15.76

15.76 El carrete de cinta que se muestra y el armazón en el que está montado se jalan hacia arriba a una rapidez v_A = 100 mm/s. Si el extremo *B* de la cinta se jala hacia abajo con una velocidad de 300 mm/s y en el instante mostrado el grosor total de la cinta en el carrete es de 20 mm, determine *a*) el centro instantáneo de rotación del carrete, *b*) la velocidad del punto *D* del carrete.

15.77 Retome el problema resuelto 15.2, y ahora suponga que la cremallera inferior no es estacionaria sino que se mueve a la izquierda con una velocidad de 0.6 m/s.

15.78 Una polea doble se fija a un bloque corredizo mediante un pasador en *A*. La polea interna de 30 mm de radio se une rígidamente a otra polea exterior de 60 mm de radio. Si cada una de las dos cuerdas se jala a una rapidez constante en la forma indicada, determine *a*) el centro instantáneo de rotación de la doble polea, *b*) la velocidad del bloque corredizo y *c*) el número de milímetros de cuerda enrollada o desenrollada de cada polea por segundo.

15.79 Retome el problema 15.78, y ahora suponga que la cuerda *E* se jala hacia arriba con una rapidez de 160 mm/s y la cuerda *F* se jala hacia abajo a una rapidez de 200 mm/s.

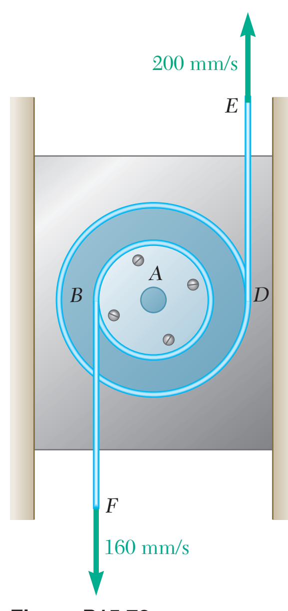


Figura P15.78

15.80* y *15.81 Un tambor de 3 in. de radio se une de manera rígida a un tambor de 5 in. de radio en la forma que se indica. Uno de los tambores rueda sin deslizarse sobre la superficie mostrada y una cuerda se enrolla alrededor del otro tambor. Si se sabe que el extremo *E* de la cuerda se jala hacia la izquierda con una velocidad de 6 in./s, determine *a*) la velocidad angular de los tambores, *b*) la velocidad del centro de los tambores y *c*) la longitud de la cuerda enrollada o desenrollada por segundo.

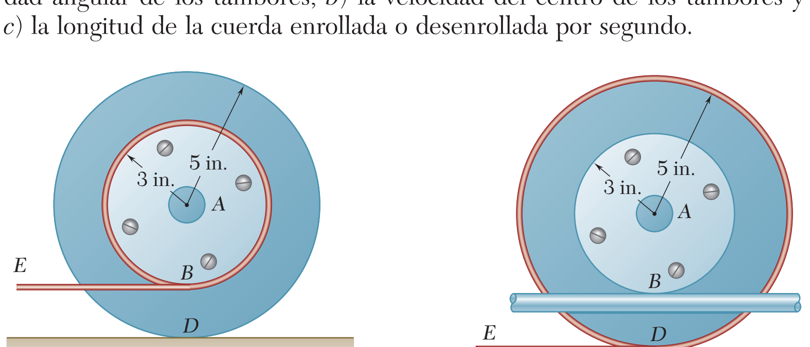


Figura *P15.80*

Figura *P15.81*

15.82 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular de la varilla *AB* es de 15 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a*) la velocidad angular de la varilla *BD*, *b*) la velocidad del punto medio de la varilla *BD*.

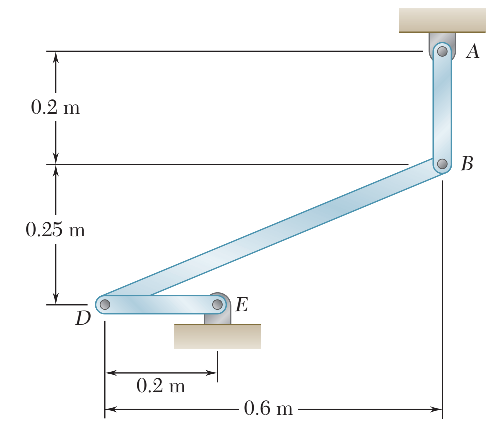


Figura P15.82 y P15.83

15.83 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad del punto *D* es de 2.4 m/s hacia arriba, determine *a*) la velocidad angular de la barra *AB*, *b*) la velocidad del punto medio de la barra *BD*.

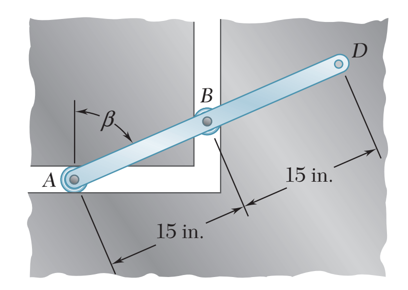


Figura P15.84

15.84 Las ruedas en A y B giran sobre los carriles horizontal y vertical indicados y guían a la varilla ABD. Si en el instante que se muestra $\beta = 60°$ y la velocidad de la rueda B es de 40 in./s hacia abajo, determine *a*) la velocidad angular de la varilla y *b*) la velocidad del punto D.

15.85 Una puerta levadiza se guía mediante dos ruedas en A y B que giran sobre las correderas horizontal y vertical que se muestran en la figura. Si cuando $\theta = 40°$ la velocidad de la rueda B es de 1.5 ft/s hacia arriba, determine *a*) la velocidad angular de la puerta y *b*) la velocidad del extremo D de la puerta.

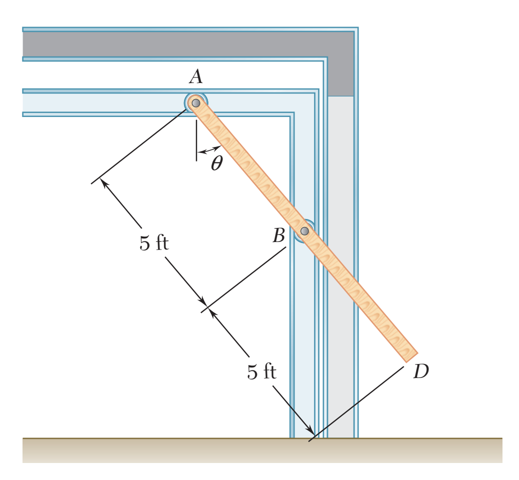


Figura P15.85

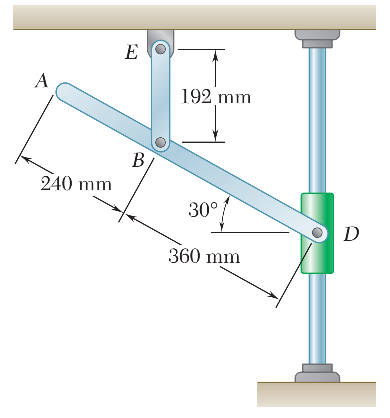


Figura *P15.86* y *P15.87*

15.86 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular de la varilla BE es de 4 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) la velocidad angular de la varilla AD, *b*) la velocidad del collarín D, *c*) la velocidad del punto A.

15.87 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular del collarín D es 1.6 m/s hacia arriba, determine *a*) la velocidad angular de la varilla AD, *b*) la velocidad del punto B, *c*) la velocidad del punto A.

15.88 La barra AB puede deslizarse libremente a lo largo del piso y el plano inclinado. Si se denota con $\mathbf{v}_A$ la velocidad del punto A, obtenga una expresión para *a*) la velocidad angular de la barra, *b*) la velocidad del extremo B.

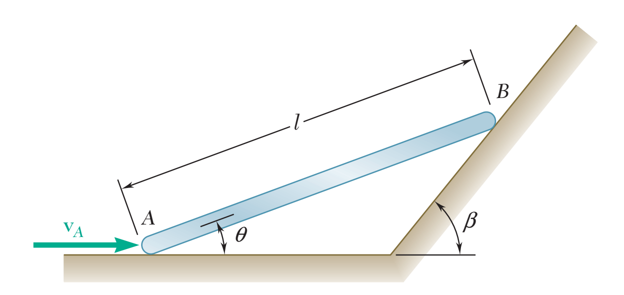


Figura *P15.88* y P15.89

15.89 La barra AB puede deslizarse libremente a lo largo del piso y el plano inclinado. Si se sabe que $\theta = 20°$, $\beta = 50°$, $l = 0.6$ m y $v_A = 3$ m/s, determine *a*) la velocidad angular de la barra, *b*) la velocidad del extremo B.

15.90 El brazo ABD se une mediante pasadores a un collarín en B y a la manivela DE. Si la velocidad del collarín B es de 400 mm/s hacia arriba, determine *a*) la velocidad angular del brazo ABD, *b*) la velocidad del punto A.

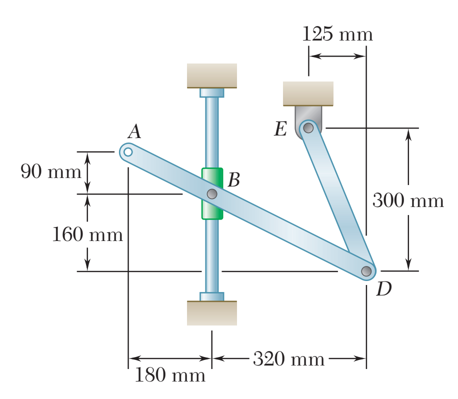


Figura P15.90 y *P15.91*

15.91 El brazo ABD se une mediante pasadores a un collarín en B y a la manivela DE. Si la velocidad angular de la manivela DE es de 1.2 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) la velocidad angular del brazo ABD, *b*) la velocidad del punto A.

15.92 En la placa FG se han cortado dos ranuras y la placa se ha colocado de manera que en las ranuras entren dos pasadores fijos A y B. Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular de la manivela DE es de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a*) la velocidad del punto F, *b*) la velocidad del punto G.

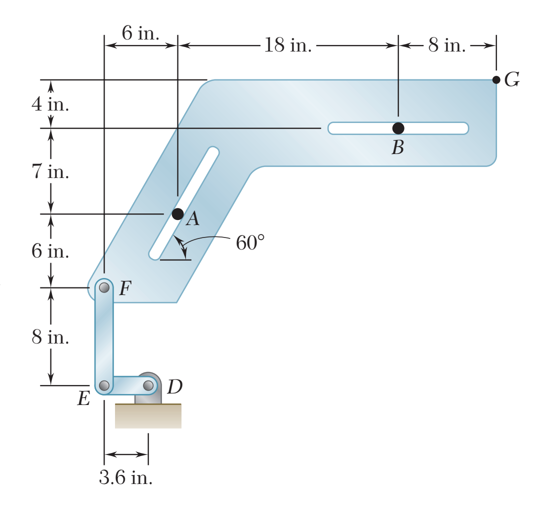


Figura P15.92

15.93 Dos varillas idénticas ABF y DBE se unen mediante un pasador en B. Si en el instante indicado la velocidad del punto D es de 10 in./s hacia arriba, determine la velocidad de *a*) el punto E y *b*) el punto F.

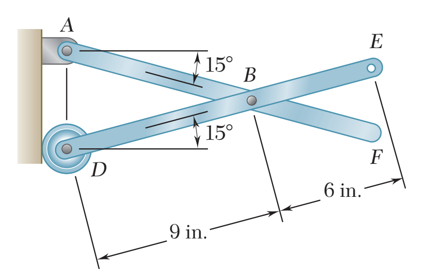


Figura P15.93

15.94 La barra AB está unida a un collarín en A y está acoplado con una pequeña rueda en B. Si se sabe que cuando $\theta = 60°$ la velocidad del collarín es de 250 mm/s hacia arriba, determine *a*) la velocidad angular de la barra AB, *b*) la velocidad del punto B.

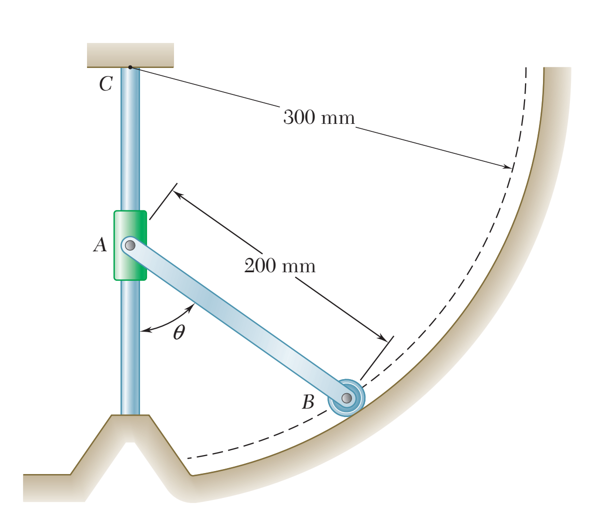


Figura *P15.94*

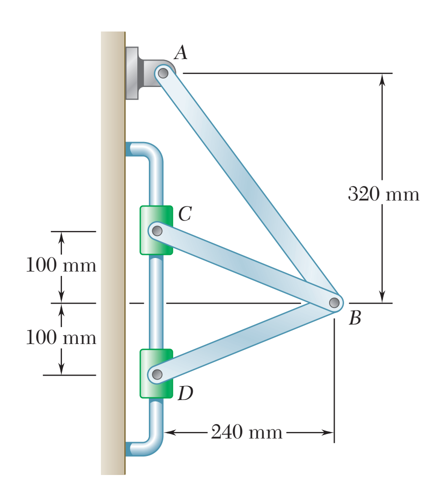


Figura P15.95

15.95 Dos collarines C y D se mueven a lo largo de la varilla vertical que se muestra en la figura. Si se sabe que la velocidad del collarín C es de 660 mm/s hacia abajo, determine *a*) la velocidad del collarín D, *b*) la velocidad angular del elemento AB.

15.96 Dos varillas de 500 mm están conectadas mediante un pasador en D como lo indica la figura. Si el punto B se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 360 mm/s, determine para el instante mostrado *a*) la velocidad angular de cada varilla y *b*) la velocidad de E.

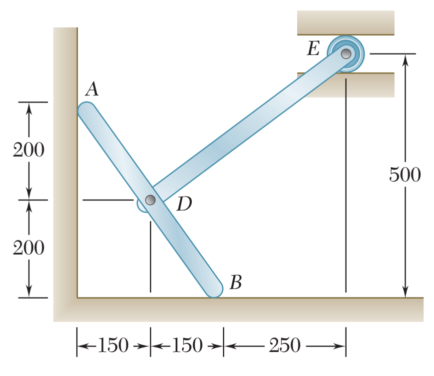


Figura P15.96

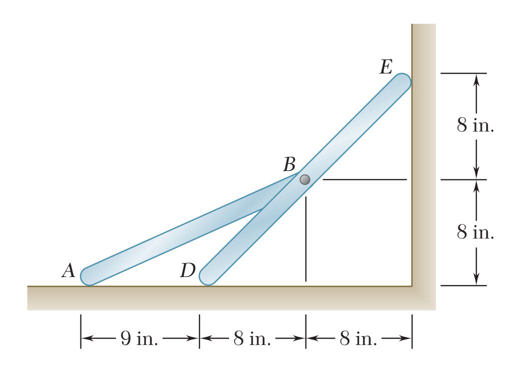


Figura P15.97

15.97 Dos varillas AB y DE están conectadas como se indica en la figura. Si el punto D se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 40 in./s, determine *a*) la velocidad angular de cada varilla y *b*) la velocidad del punto A.

15.98 Dos varillas AB y DE están conectadas como se indica en la figura. Si el punto B se mueve hacia abajo con una velocidad de 60 in./s, determine *a*) la velocidad angular de cada varilla y *b*) la velocidad del punto E.

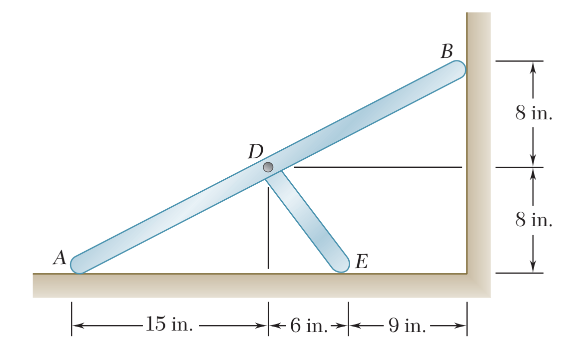


Figura P15.98

15.99 Describa la centroda espacial y la centroda corporal de la varilla ABD del problema 15.84. (*Sugerencia*: La centroda corporal no tiene que estar en la parte física de la varilla.)

15.100 Describa la centroda espacial y la centroda corporal del engrane del problema resuelto 15.2, cuando gira sobre una cremallera horizontal estacionaria.

15.101 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.62.

15.102 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.64.

15.103 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.65.

15.104 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.70.

15.8. ACELERACIONES ABSOLUTA Y RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO

En la sección 15.5 se analizó que cualquier movimiento plano puede sustituirse por una traslación definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y una rotación simultánea alrededor de A. Esta propiedad se utilizó en la sección 15.6 para determinar la velocidad de los diferentes puntos de la placa en movimiento. La misma propiedad se utilizará ahora para determinar la aceleración de los puntos de la placa.

Hay que recordar primero que la aceleración absoluta $\mathbf{a}_B$ de una partícula de la placa puede obtenerse de la fórmula de la aceleración relativa que se dedujo en la sección 11.12,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad (15.21)$$



Fotografía 15.6 El engrane central gira alrededor de un eje fijo y está conectado mediante pasadores a tres barras que realizan movimiento plano general.

donde el miembro del lado derecho representa una suma vectorial. La aceleración $\mathbf{a}_A$ corresponde a la traslación de la placa con A, en tanto que la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ se asocia con la rotación de la placa en torno a A y se mide con respecto a los ejes centrados en A y de orientación fija. Hay que recordar de la sección 15.3 que la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ puede descomponerse en dos componentes, una *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ perpendicular a la línea AB, y una *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ dirigida hacia A (figura 15.22). Denotando por $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A y, respectivamente, mediante $\omega\mathbf{k}$ y $\alpha\mathbf{k}$ la velocidad angular y la aceleración angular de la placa con respecto a los ejes de orientación fija, se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{B/A})_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad & (a_{B/A})_t &= r\alpha \\ (\mathbf{a}_{B/A})_n &= -\omega^2\mathbf{r}_{B/A} \qquad & (a_{B/A})_n &= r\omega^2 \end{aligned} \qquad (15.22)$$

donde r es la distancia desde A hasta B. Al sustituir en (15.21) las expresiones que se obtienen para las componentes tangencial y normal de $\mathbf{a}_{B/A}$, también se puede escribir

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A} \qquad (15.21')$$

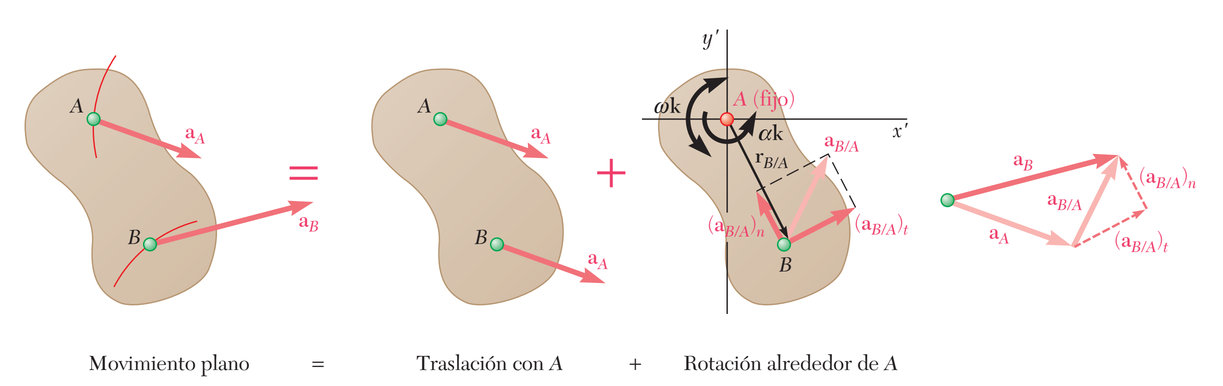


Figura 15.22

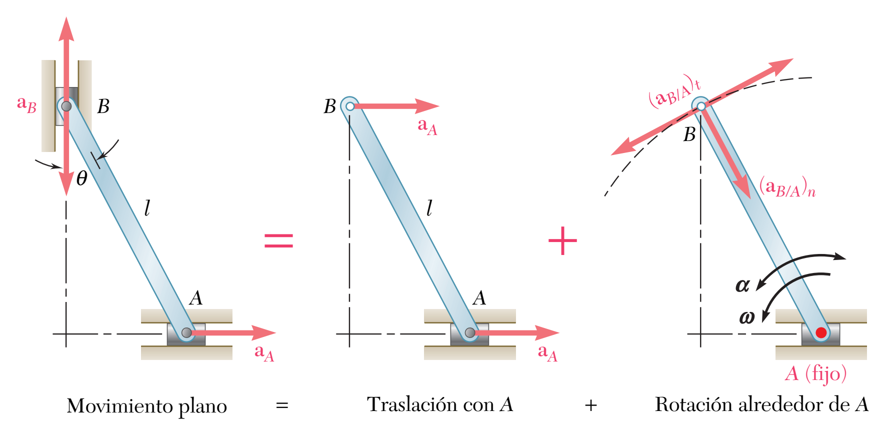
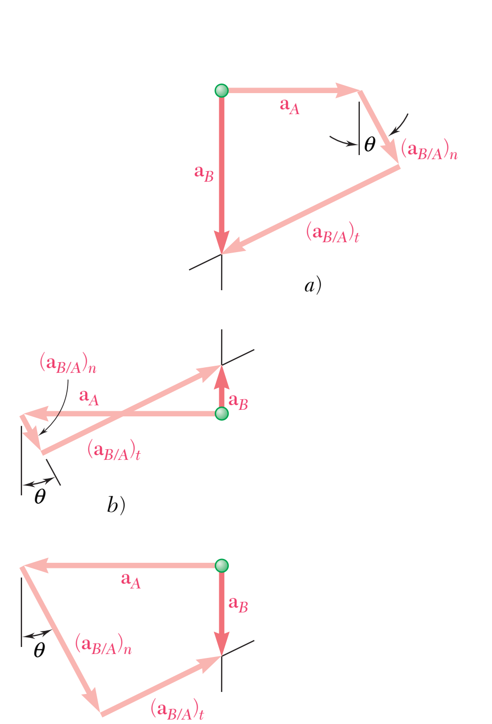


Figura 15.23



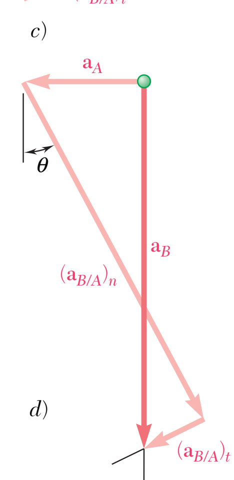


Figura 15.24

Como ejemplo, hay que considerar otra vez la varilla *AB* cuyos extremos se deslizan, respectivamente, a lo largo de una corredera horizontal y una vertical (figura 15.23). Si se supone que se conocen la velocidad $\mathbf{v}_A$ y la aceleración $\mathbf{a}_A$ de *A*, se determina la aceleración $\mathbf{a}_B$ de *B* y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la varilla. Al elegir *A* como un punto de referencia, se expresa que el movimiento dado es equivalente a una traslación con *A* y a una rotación alrededor de *A*. La aceleración absoluta de *B* debe ser igual a la suma

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ &= \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t\end{aligned} \tag{15.23}$$

donde $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ tiene la magnitud $l\omega^2$ y está *dirigida hacia A*, en tanto que $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ tiene la magnitud $l\alpha$ y es perpendicular a *AB*. Se advertirá que no hay forma de indicar si la componente tangencial $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ está dirigida hacia la izquierda o hacia la derecha y, por lo tanto, ambas direcciones posibles para esta componente se indican en la figura 15.23. De modo similar, se indican ambos sentidos posibles para $\mathbf{a}_B$, ya que no se sabe si el punto *B* se acelera hacia arriba o hacia abajo.

La ecuación (15.23) se ha expresado de manera geométrica en la figura 15.24. Es posible obtener cuatro polígonos vectoriales diferentes, dependiendo del sentido de $\mathbf{a}_A$ y de la magnitud relativa de a_A y $(a_{B/A})_n$. Si se va a determinar a_B y α de uno de estos diagramas, no sólo se debe conocer a_A y θ, sino también $\boldsymbol{\omega}$. Por consiguiente, la velocidad angular de la varilla debe determinarse por separado mediante uno de los métodos indicados en las secciones 15.6 y 15.7. Los valores de a_B y α pueden obtenerse de ese modo considerando de manera sucesiva las componentes *x* y *y* de los vectores mostrados en la figura 15.24. En el caso de un polígono *a*, por ejemplo, se escribe

$$\overset{+}{\rightarrow} \text{ componentes } x: \qquad 0 = a_A + l\omega^2 \operatorname{sen} \theta - l\alpha \cos \theta$$

$$+\uparrow \text{ componentes } y: \qquad -a_B = -l\omega^2 \cos \theta - l\alpha \operatorname{sen} \theta$$

y se resuelve para a_B y α. Las dos incógnitas también se obtienen mediante la medición directa sobre el polígono vectorial. En ese caso, debe tenerse cuidado para dibujar primero los vectores conocidos $\mathbf{a}_A$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$.

Resulta bastante evidente que la determinación de las aceleraciones es considerablemente más complicada que la determinación de las velocidades. Sin embargo, en el ejemplo que se considera aquí, los ex-

tremos A y B de la varilla se estaban moviendo a lo largo de correderas rectas, y los diagramas dibujados eran relativamente simples. Si A y B se hubieran movido a lo largo de correderas curvas, habría sido necesario descomponer las aceleraciones $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ en las componentes normal y tangencial y la solución del problema habría implicado seis vectores diferentes.

Cuando un mecanismo consta de varias partes móviles que están conectadas mediante pasadores, el análisis del mecanismo puede efectuarse considerando cada parte como un cuerpo rígido, teniendo presente que los puntos en los cuales se conectan las dos partes deben tener la misma aceleración absoluta (véase el problema resuelto 15.7). En el caso de engranes dentados, las componentes tangenciales de la aceleración de los dientes en contacto son iguales, aunque sus componentes normales son diferentes.

*15.9. ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO PLANO EN TÉRMINOS DE UN PARÁMETRO

En el caso de ciertos mecanismos, es posible expresar las coordenadas x y y de todos los puntos importantes del mecanismo por medio de expresiones analíticas simples que contienen un solo parámetro. En estos casos a veces es ventajoso determinar de manera directa la velocidad absoluta y la aceleración absoluta de los diferentes puntos del mecanismo, ya que las componentes de la velocidad y de la aceleración de un punto dado pueden obtenerse diferenciando las coordenadas x y y de ese punto.

Hay que considerar otra vez la varilla AB cuyos extremos se deslizan, de manera respectiva, en una corredera horizontal y en una vertical (figura 15.25). Las coordenadas x_A y y_B de los extremos de la varilla pueden expresarse en términos del ángulo θ que forman la varilla con la vertical

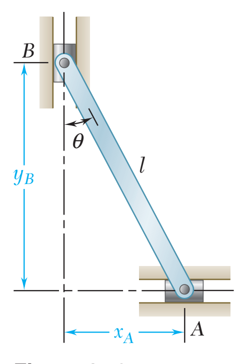


Figura 15.25

$$x_A = l \text{ sen } \theta \qquad y_B = l \cos \theta \tag{15.24}$$

Al diferenciar las ecuaciones (15.24) dos veces con respecto a t, se escribe

$$\begin{aligned} v_A &= \dot{x}_A = l\dot{\theta} \cos \theta \\ a_A &= \ddot{x}_A = -l\dot{\theta}^2 \text{ sen } \theta + l\ddot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$

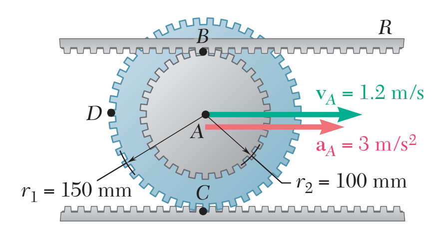
$$\begin{aligned} v_B &= \dot{y}_B = -l\dot{\theta} \text{ sen } \theta \\ a_B &= \ddot{y}_B = -l\dot{\theta}^2 \cos \theta - l\ddot{\theta} \text{ sen } \theta \end{aligned}$$

Si se recuerda que $\dot{\theta} = \omega$ y $\ddot{\theta} = \alpha$, se obtiene

$$v_A = l\omega \cos \theta \qquad v_B = -l\omega \text{ sen } \theta \tag{15.25}$$

$$a_A = -l\omega^2 \text{ sen } \theta + l\alpha \cos \theta \qquad a_B = -l\omega^2 \cos \theta - l\alpha \text{ sen } \theta \tag{15.26}$$

Hay que observar que el signo positivo de v_A o a_A indica que la velocidad $\mathbf{v}_A$ o la aceleración $\mathbf{a}_A$ está dirigida hacia la derecha; un signo positivo para v_B o a_B indica que $\mathbf{v}_B$ o $\mathbf{a}_B$ apunta hacia arriba. Las ecuaciones (15.25) pueden utilizarse para determinar, por ejemplo, v_B y ω cuando se conocen v_A y θ. Al sustituir ω en (15.26), se puede determinar entonces a_B y α si se conoce a_A.



PROBLEMA RESUELTO 15.6

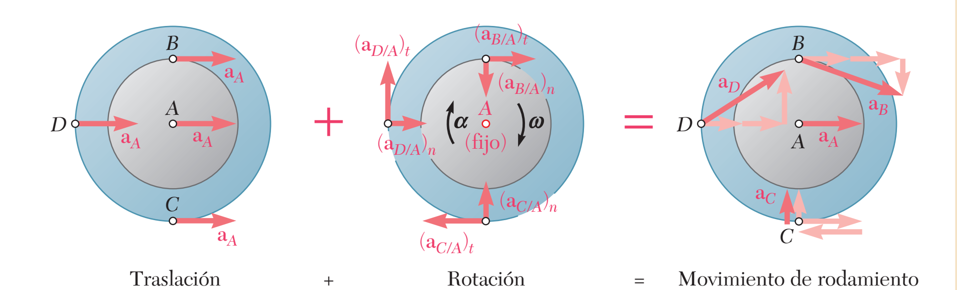
El centro del engrane doble del problema resuelto 15.2 tiene una velocidad de 1.2 m/s hacia la derecha y una aceleración de 3 m/s^2 hacia la derecha. Recordando que la cremallera inferior es estacionaria, determine *a*) la aceleración angular del engrane, *b*) la aceleración de los puntos *B*, *C* y *D* del engrane.

SOLUCIÓN

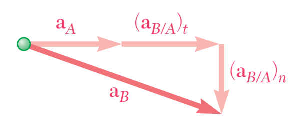
***a*) Aceleración angular del engrane.** En el problema resuelto 15.2, $x_A = -r_1\theta$ y $v_A = -r_1\omega$. Diferenciando la última ecuación con respecto al tiempo, se obtiene $a_A = -r_1\alpha$.

$$v_A = -r_1\omega \qquad 1.2 \text{ m/s} = -(0.150 \text{ m})\omega \qquad \omega = -8 \text{ rad/s}$$
$$a_A = -r_1\alpha \qquad 3 \text{ m/s}^2 = -(0.150 \text{ m})\alpha \qquad \alpha = -20 \text{ rad/s}^2$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = -(20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \quad ◀$$

***b*) Aceleraciones.** El movimiento de rodamiento del engrane se descompone en una traslación con *A* y una rotación alrededor de *A*.

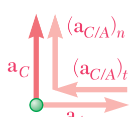


Traslación + Rotación = Movimiento de rodamiento



Aceleración del punto B. Al sumar vectorialmente las aceleraciones correspondientes a la traslación y a la rotación, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \\ &= \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (0.100 \text{ m})\mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2(0.100 \text{ m})\mathbf{j} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (2 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (6.40 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}\end{aligned}$$
$$\mathbf{a}_B = 8.12 \text{ m/s}^2 \measuredangle 52.0° \quad ◀$$



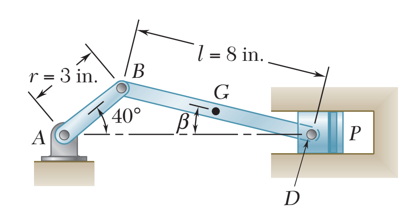
Aceleración del punto C

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{C/A} = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega^2\mathbf{r}_{C/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m})\mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2(-0.150 \text{ m})\mathbf{j} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (9.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}\end{aligned}$$
$$\mathbf{a}_C = 9.60 \text{ m/s}^2 \uparrow \quad ◀$$

Aceleración del punto D

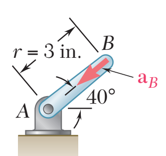
$$\begin{aligned}\mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{D/A} = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A} - \omega^2\mathbf{r}_{D/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})^2(-0.150 \text{ m})\mathbf{i} \\ &= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (9.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}\end{aligned}$$
$$\mathbf{a}_D = 12.95 \text{ m/s}^2 \measuredangle 13.4° \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 15.7



La manivela AB del mecanismo del problema resuelto 15.3 tiene una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj de 2 000 rpm. Para la posición que se muestra de la manivela, determine la aceleración angular de la biela BD y la aceleración del punto D.

SOLUCIÓN



Movimiento de la manivela *AB*. Puesto que la manivela gira alrededor de A con una velocidad angular constante $\omega_{AB} = 2\,000$ rpm $= 209.4$ rad/s, se tiene $\alpha_{AB} = 0$. Por lo tanto, la aceleración de B está dirigida hacia A y tiene una magnitud

$$a_B = r\omega_{AB}^2 = (\tfrac{3}{12}\text{ ft})(209.4\text{ rad/s})^2 = 10\,962\text{ ft/s}^2$$
$$\mathbf{a}_B = 10\,962\text{ ft/s}^2 \measuredangle\, 40°$$

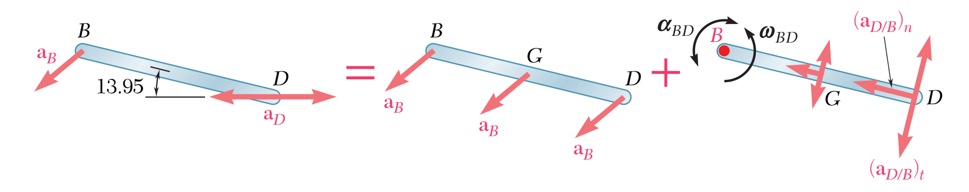
Movimiento de la biela *BD*. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{BD}$ y el valor de β se obtuvieron en el problema resuelto 15.3:

$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = 62.0\text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \beta = 13.95°$$

El movimiento de BD se descompone en una traslación con B y una rotación alrededor de B. La aceleración relativa $\mathbf{a}_{D/B}$ se descompone en las componentes normal y tangencial:

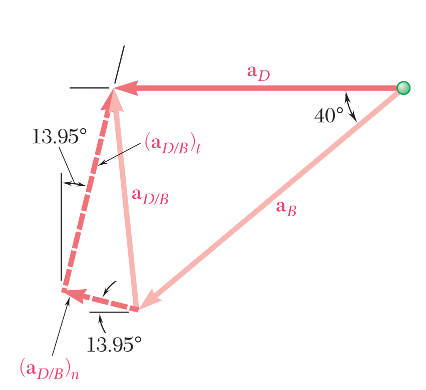
$$(a_{D/B})_n = (BD)\omega_{BD}^2 = (\tfrac{8}{12}\text{ ft})(62.0\text{ rad/s})^2 = 2\,563\text{ ft/s}^2$$
$$(\mathbf{a}_{D/B})_n = 2\,563\text{ ft/s}^2 \measuredangle\, 13.95°$$
$$(a_{D/B})_t = (BD)\alpha_{BD} = (\tfrac{8}{12})\alpha_{BD} = 0.6667\alpha_{BD}$$
$$(\mathbf{a}_{D/B})_t = 0.6667\alpha_{BD} \measuredangle\, 76.05°$$

Si bien $(\mathbf{a}_{D/B})_t$ debe ser perpendicular a BD, no se conoce su sentido.



Movimiento plano = Traslación + Rotación

Al advertir que la aceleración $\mathbf{a}_D$ debe ser horizontal, se escribe



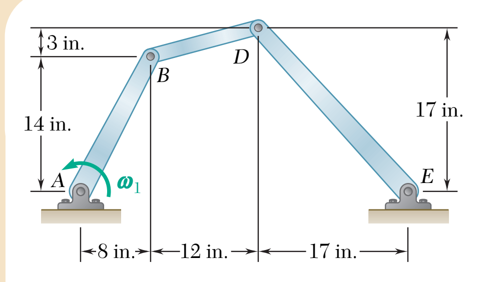
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{D/B})_n + (\mathbf{a}_{D/B})_t$$
$$[a_D \leftrightarrow] = [10\,962 \measuredangle\, 40°] + [2\,563 \measuredangle\, 13.95°] + [0.6667\alpha_{BD} \measuredangle\, 76.05°]$$

Al igualar las componentes x y y, se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$\xrightarrow{+}$ componentes x:
$$-a_D = -10\,962\cos 40° - 2\,563\cos 13.95° + 0.6667\alpha_{BD}\text{ sen } 13.95°$$
$+\uparrow$ componentes y:
$$0 = -10\,962\text{ sen } 40° + 2\,563\text{ sen } 13.95° + 0.6667\alpha_{BD}\cos 13.95°$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones, se obtiene $\alpha_{BD} = +9\,940$ rad/s^2 y $a_D = +9\,290$ ft/s^2. Los signos positivos indican que los sentidos mostrados sobre el polígono vectorial son correctos; se escribe

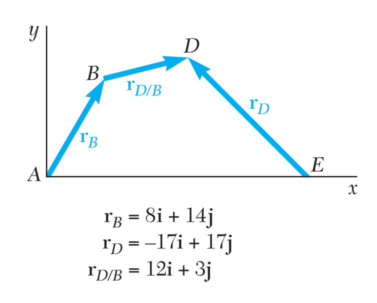
$$\boldsymbol{\alpha}_{BD} = 9\,940\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \quad \blacktriangleleft$$
$$\mathbf{a}_D = 9\,290\text{ ft/s}^2 \leftarrow \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 15.8

El varillaje *ABDE* se mueve en el plano vertical. Si se sabe que en la posición mostrada la manivela *AB* tiene una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 20 rad/s en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine las velocidades angulares y las aceleraciones angulares de la barra acopladora *BD* y de la manivela *DE*.

SOLUCIÓN



Este problema podría resolverse mediante el método que se utilizó en el problema resuelto 15.7. En este caso, sin embargo, se usará el método vectorial. Los vectores de posición $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_D$ y $\mathbf{r}_{D/B}$ se eligen como se muestra en el bosquejo.

Velocidades. Puesto que el movimiento de cada elemento del varillaje está contenido en el plano de la figura, se tiene

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\mathbf{k} = (20 \text{ rad/s})\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{BD} = \omega_{BD}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{DE} = \omega_{DE}\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{k}$ es un vector unitario que apunta hacia fuera del papel. A continuación se escribe

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$$
$$\omega_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D = \omega_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B + \omega_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B}$$
$$\omega_{DE}\mathbf{k} \times (-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) = 20\mathbf{k} \times (8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}) + \omega_{BD}\mathbf{k} \times (12\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$
$$-17\omega_{DE}\mathbf{j} - 17\omega_{DE}\mathbf{i} = 160\mathbf{j} - 280\mathbf{i} + 12\omega_{BD}\mathbf{j} - 3\omega_{BD}\mathbf{i}$$

Al igualar los coeficientes de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, se obtienen las siguientes dos ecuaciones escalares:

$$-17\omega_{DE} = -280 - 3\omega_{BD}$$
$$-17\omega_{DE} = +160 + 12\omega_{BD}$$
$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = -(29.33 \text{ rad/s})\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{DE} = (11.29 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

Aceleraciones. Al notar que en el instante considerado la manivela *AB* tiene una velocidad angular constante, se escribe

$$\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 0 \qquad \boldsymbol{\alpha}_{BD} = \alpha_{BD}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = \alpha_{DE}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} \qquad (1)$$

Cada término de la ecuación (1) se evalúa por separado:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_D &= \alpha_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D - \omega_{DE}^2\mathbf{r}_D\\ &= \alpha_{DE}\mathbf{k} \times (-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) - (11.29)^2(-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j})\\ &= -17\alpha_{DE}\mathbf{j} - 17\alpha_{DE}\mathbf{i} + 2\,170\mathbf{i} - 2\,170\mathbf{j}\\ \mathbf{a}_B &= \alpha_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_B = 0 - (20)^2(8\mathbf{i} + 14\mathbf{j})\\ &= -3\,200\mathbf{i} - 5\,600\mathbf{j}\\ \mathbf{a}_{D/B} &= \alpha_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2\mathbf{r}_{D/B}\\ &= \alpha_{BD}\mathbf{k} \times (12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (29.33)^2(12\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\\ &= 12\alpha_{BD}\mathbf{j} - 3\alpha_{BD}\mathbf{i} - 10\,320\mathbf{i} - 2\,580\mathbf{j}\end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (1) e igualar los coeficientes de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, se obtiene

$$-17\alpha_{DE} + 3\alpha_{BD} = -15\,690$$
$$-17\alpha_{DE} - 12\alpha_{BD} = -6\,010$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{BD} = -(645 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = (809 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó a la determinación de las *aceleraciones* de los puntos de un *cuerpo rígido en movimiento plano.* Como se hizo previamente para velocidades, se considerará de nuevo el movimiento plano de un cuerpo rígido como la suma de dos movimientos, a saber, *una traslación y una rotación.*

Para resolver un problema que implica aceleraciones en movimiento plano es necesario seguir estos pasos:

1. Determinar la velocidad angular del cuerpo. Para encontrar $\boldsymbol{\omega}$ es posible

a) Considerar el movimiento del cuerpo como la suma de la traslación y la rotación, como se hizo en la sección 15.6, o

b) Utilizar el centro instantáneo de rotación del cuerpo como en la sección 15.7. Sin embargo, *recuerde que no es posible utilizar el centro instantáneo para determinar aceleraciones.*

2. Iniciar dibujando una "ecuación de diagrama" que usará en su solución: esta "ecuación" incluirá los siguientes diagramas (figura 15.44):

a) Diagrama de movimiento plano. Elabore un bosquejo del cuerpo que incluya todas las dimensiones, así como la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Muestre la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ con su magnitud y sentido si es que los conoce. También indique aquellos puntos para los cuales conoce o busca las aceleraciones, indicando todo lo que se sepa acerca de las mismas.

b) Diagrama de traslación. Elija un punto de referencia A para el que conozca la dirección, la magnitud o una componente de la aceleración $\mathbf{a}_A$. Dibuje un segundo diagrama que muestre el cuerpo en traslación en el que cada punto tenga la misma aceleración que el punto A.

c) Diagrama de rotación. Considerando el punto A como un punto de referencia fijo, dibuje un tercer diagrama que muestre al cuerpo en rotación alrededor de A. Indique las componentes normal y tangencial de las aceleraciones relativas de los otros puntos, del mismo modo que las componentes $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ de la aceleración del punto B con respecto al punto A.

3. Escribir la fórmula de la aceleración relativa

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t$$

Los problemas resueltos ilustran tres formas diferentes de utilizar esta ecuación vectorial:

(*continúa*)

a) Si α se da o puede determinarse con facilidad, es posible utilizar esta ecuación para determinar las aceleraciones de diferentes puntos del cuerpo [problema resuelto 15.6].

b) Si α no se puede determinar con facilidad, elija para el punto B otro punto en el que usted conozca la dirección, la magnitud o una componente de la aceleración $\mathbf{a}_B$ y dibuje un diagrama vectorial de la ecuación. Empezando en el mismo punto, dibuje todas las componentes conocidas de la aceleración siguiendo el procedimiento de principio a fin para cada miembro de la ecuación. Complete el diagrama dibujando los dos vectores restantes en las direcciones apropiadas, de manera tal que las dos sumas de vectores terminen en un punto común.

Las magnitudes de los dos vectores restantes pueden determinarse gráfica o analíticamente. Por lo común una solución analítica requerirá la solución de dos ecuaciones simultáneas [problema resuelto 15.7]. Sin embargo, si primero se consideran las componentes de diferentes vectores en una dirección perpendicular a uno de los vectores incógnita, resulta factible obtener una ecuación con una sola incógnita.

Uno de los dos vectores obtenido mediante el método que acaba de describirse será $(\mathbf{a}_{B/A})_t$, del cual es posible calcular α. Una vez que se determina α, la ecuación vectorial se utiliza para determinar la aceleración de cualquier otro punto del cuerpo.

c) Un procedimiento vectorial completo también es viable para resolver la ecuación vectorial. Éste se ilustra en el problema resuelto 15.8.

4. El análisis del movimiento plano en términos de un parámetro completó esta lección. Este método debe utilizarse *sólo si es posible* expresar las coordenadas x y y de todos los puntos importantes del cuerpo en términos de un solo parámetro (sección 15.9). Al diferenciar dos veces con respecto a t las coordenadas x y y de un punto dado, pueden determinarse las componentes rectangulares de la velocidad absoluta y la aceleración absoluta de ese punto.

Problemas

15.105 Una barra de 900 mm descansa sobre una mesa horizontal. Una fuerza **P** aplicada como se muestra en la figura, produce las siguientes aceleraciones: $\mathbf{a}_A = 3.6 \text{ m/s}^2$ hacia la derecha, $\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba. Determine la aceleración *a*) del punto *G*, *b*) del punto *B*.

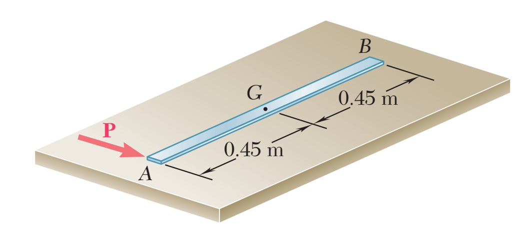


Figura P15.105 y P15.106

15.106 En el problema 15.105, determine el punto de la barra que *a*) no tiene aceleración, *b*) tiene una aceleración de 2.4 m/s^2 hacia la derecha.

15.107 Una viga de acero de 10 ft se baja mediante dos cables que se desenrollan a la misma rapidez en dos grúas viajeras. Cuando la viga se acerca al suelo, los operadores de las grúas aplican los frenos para retardar el movimiento de desenrollado. En el instante considerado la desaceleración del cable fijo en *A* es de 12 ft/s^2, mientras que la del cable fijo en *B* es de 5 ft/s^2. Determine *a*) la aceleración angular de la viga, *b*) la aceleración del punto *C*.

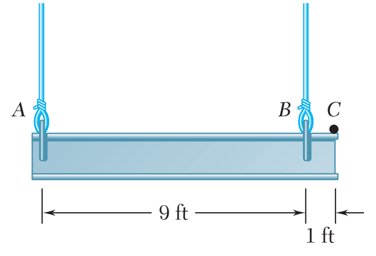


Figura P15.107 y P15.108

15.108 La aceleración del punto *C* es de 1 ft/s^2 hacia abajo y la aceleración angular de la viga es de 0.8 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj. Si se sabe que la velocidad angular de la viga es cero en el instante considerado, determine la aceleración de cada cable.

15.109 y 15.110 La barra *BDE* está unida a dos eslabones *AB* y *CD*. Si en el instante que se muestra el eslabón *AB* tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular de 3 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración *a*) del punto *D* y *b*) del punto *E*.

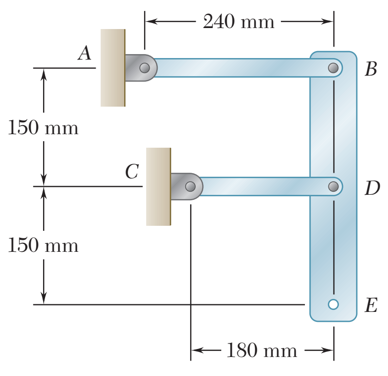


Figura P15.109

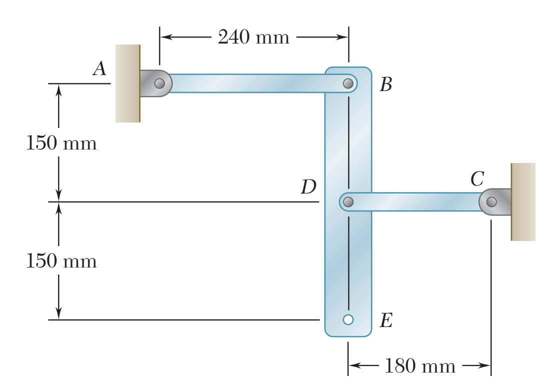


Figura P15.110

15.111 Un automóvil se desplaza hacia la izquierda a una velocidad constante de 48 mi/h. Si el diámetro de la rueda es de 22 in., determine la aceleración *a*) del punto *B*, *b*) del punto *C*, *c*) del punto *D*.

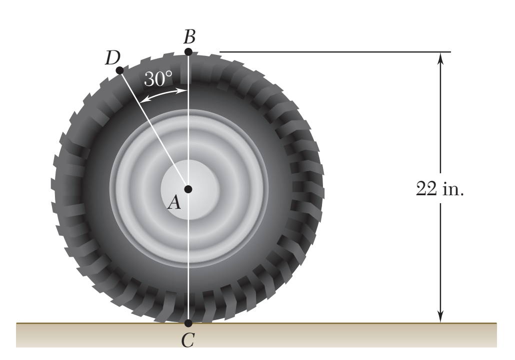


Figura P15.111

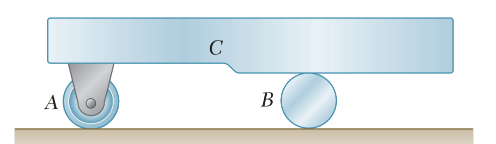


Figura P15.112

15.112 Un carrito *C* está soportado por una rueda móvil *A* y un cilindro *B*, cada uno con 50 mm de diámetro. Si en el instante mostrado, el carrito tiene una aceleración de 2.4 m/s^2 y una velocidad de 1.5 m/s, ambas dirigidas hacia la izquierda, determine *a*) las aceleraciones angulares de la rueda móvil y del cilindro, *b*) las aceleraciones de los centros de la rueda móvil y del cilindro.

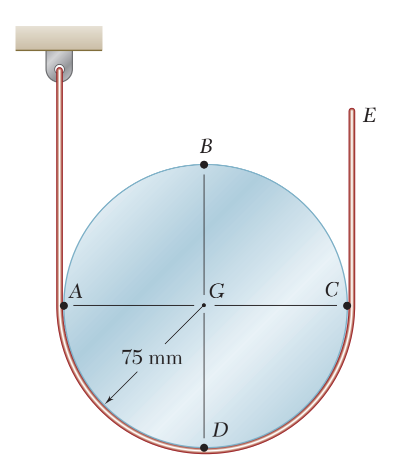


Figura P15.113 y *P15.114*

15.113 El movimiento del cilindro de 75 mm de radio se controla mediante la cuerda que se muestra en la figura. Si se sabe que el extremo *E* de la cuerda tiene una velocidad de 300 mm/s y una aceleración de 480 mm/s^2, ambas dirigidas hacia arriba, determine la aceleración *a*) del punto *A*, *b*) del punto *B*.

15.114 El movimiento del cilindro de 75 mm de radio se controla mediante la cuerda que se muestra en la figura. Si se sabe que el extremo *E* de la cuerda tiene una velocidad de 300 mm/s y una aceleración de 480 mm/s^2, ambas dirigidas hacia arriba, determine las aceleraciones de los puntos *C* y *D* del cilindro.

15.115 y 15.116 Un tambor de 3 in. de radio está rígidamente unido a otro tambor de 5 in. de radio en la forma que se indica. Uno de los tambores rueda sin deslizarse sobre la superficie mostrada, y se enrolla a una cuerda alrededor del otro tambor. Si en el instante que se ilustra el extremo *D* de la cuerda tiene una velocidad de 8 in./s y una aceleración de 30 in./s^2, ambas dirigidas hacia la izquierda, determine las aceleraciones de los puntos *A*, *B* y *C* de los tambores.

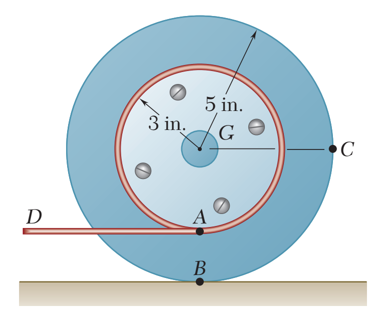


Figura P15.115

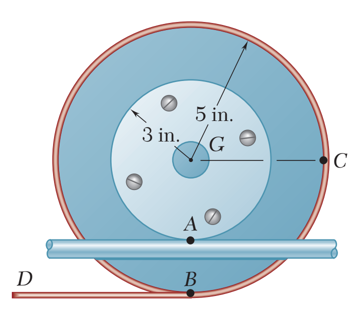


Figura P15.116

15.117 El tambor de 150 mm de radio rueda sin deslizarse sobre una banda que se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 300 mm/s. En el instante en el que la velocidad y la aceleración del centro *D* del tambor son como se muestra, determine las aceleraciones de los puntos *A*, *B* y *C* del tambor.

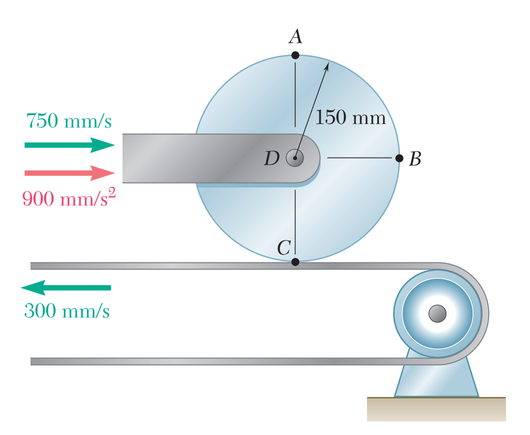


Figura *P15.117*

15.118 El volante de 18 in. de radio está rígidamente unido a una flecha de 1.5 in. de radio que puede rodar a lo largo de rieles paralelos. Si en el instante que se muestra el centro de la flecha tiene una velocidad de 1.2 in./s y una aceleración de 0.5 in./s^2, ambas dirigidas hacia abajo y hacia la izquierda, determine la aceleración *a*) del punto *A* y *b*) del punto *B*.

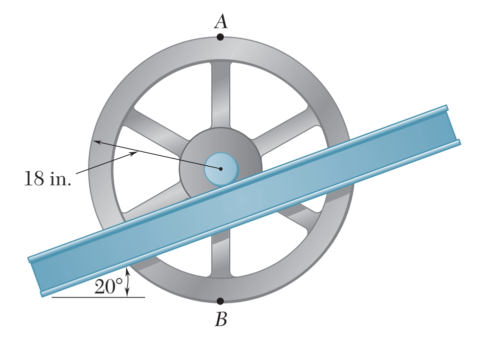


Figura P15.118

15.119 En el sistema de engranes planetarios que se muestra, los radios de los engranes *A*, *B*, *C* y *D* son de 3 in. y el radio del engrane exterior *E* es de 9 in. Si el engrane *A* tiene una velocidad angular constante de 150 rpm en el sentido de las manecillas del reloj y el engrane exterior *E* es estacionario, determine la magnitud de la aceleración de los dientes del engrane *D* que están en contacto *a*) con el engrane *A*, *b*) con el engrane *E*.

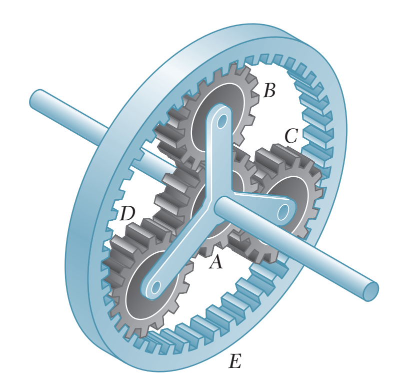


Figura P15.119

15.120 El disco mostrado tiene una velocidad angular constante de 500 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si se sabe que la barra *BD* tiene 250 mm de longitud, determine la aceleración del collarín *D* cuando *a*) $\theta = 90°$, *b*) $\theta = 180°$.

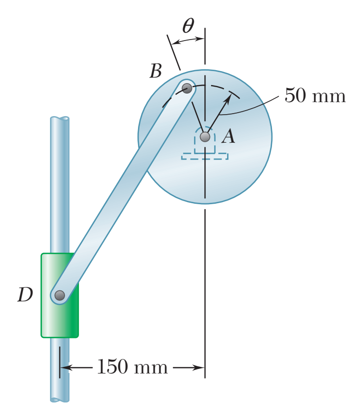


Figura P15.120

15.121 En el compresor de aire con dos cilindros que se muestra en la figura las bielas *BD* y *BE* tienen una longitud de 190 mm y la manivela *AB* gira alrededor del punto fijo *A* con una velocidad angular constante de 1 500 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la aceleración de cada pistón cuando $\theta = 0$.

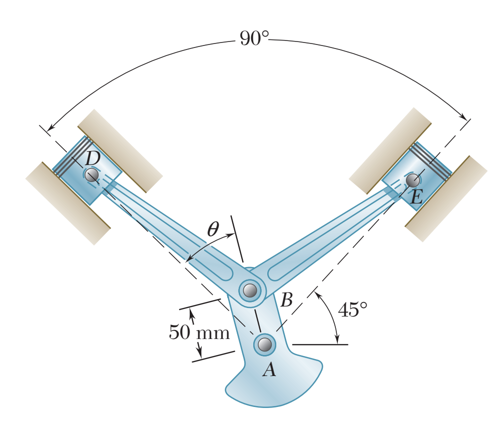


Figura P15.121

15.122 El brazo AB tiene una velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el instante en el que $\theta = 0$, determine la aceleración *a*) del collarín D y *b*) del punto medio G de la barra BD.

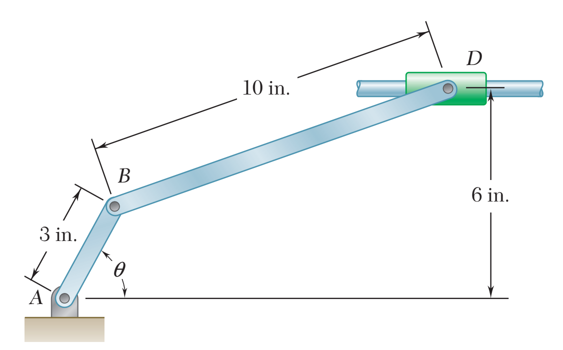
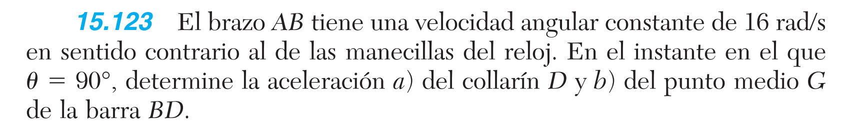


Figura P15.122, *P15.123* y *P15.124*



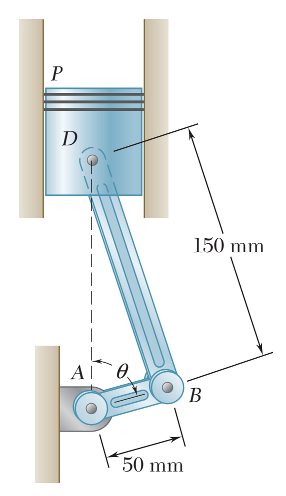


Figura P15.125 y P15.126

15.123 El brazo AB tiene una velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el instante en el que $\theta = 90°$, determine la aceleración *a*) del collarín D y *b*) del punto medio G de la barra BD.

15.124 El brazo AB tiene una velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el instante en el que $\theta = 60°$, determine la aceleración del collarín D.

15.125 Si la manivela AB gira alrededor del punto A con una velocidad angular constante de 900 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración del pistón P cuando $\theta = 60°$.

15.126 Si la manivela AB gira alrededor del punto A con una velocidad angular constante de 900 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración del pistón P cuando $\theta = 120°$.

15.127 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular constante de 15 rad/s, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) la aceleración angular del brazo DE y *b*) la aceleración del punto D.

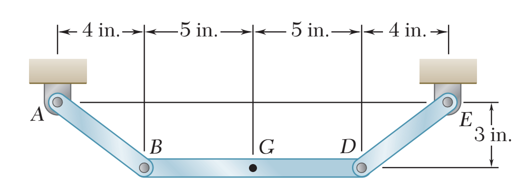


Figura P15.127 y P15.128

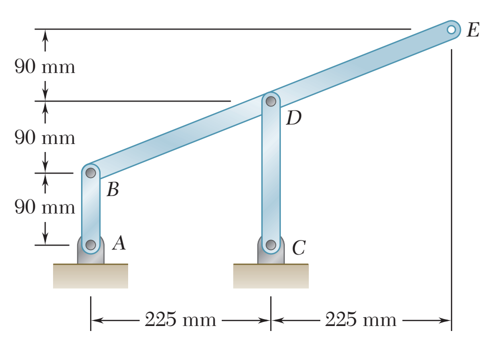


Figura P15.129 y P15.130

15.128 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular de 15 rad/s, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) la aceleración angular del elemento BD y *b*) la aceleración del punto G.

15.129 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una velocidad angular constante de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración del punto D.

15.130 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una velocidad angular constante de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a*) la aceleración angular del elemento BDE y *b*) la aceleración del punto E.

15.131 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular ω_0 en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a*) la aceleración angular del brazo DE y *b*) la aceleración del punto D.

15.132 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular de 8 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y que $l = 0.3$ m, determine la aceleración del punto medio C del elemento BD.

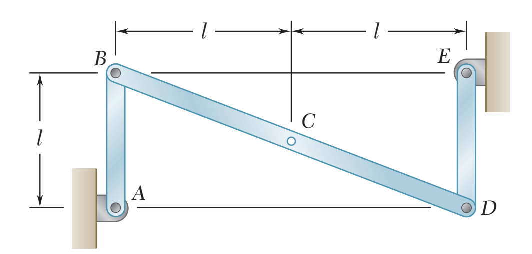


Figura *P15.131* y P15.132

15.133 y *15.134* Si en el instante mostrado la barra AB tiene una velocidad angular constante de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular *a*) de la barra BD y *b*) de la barra DE.

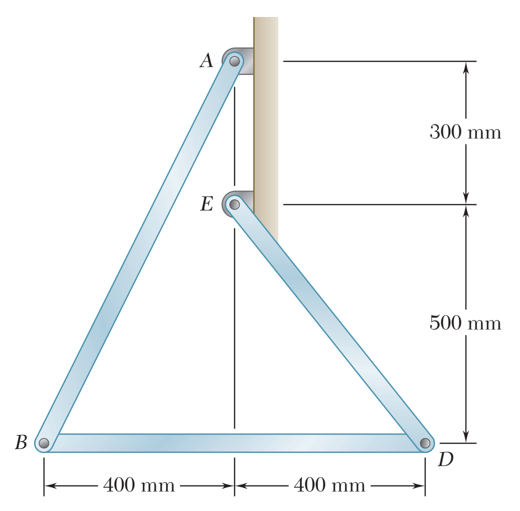


Figura P15.133 y P15.135

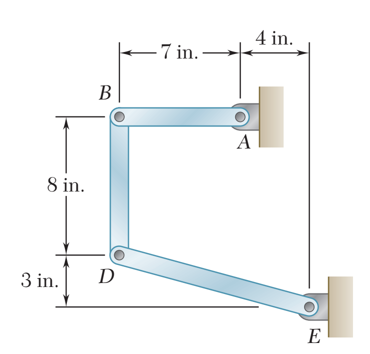
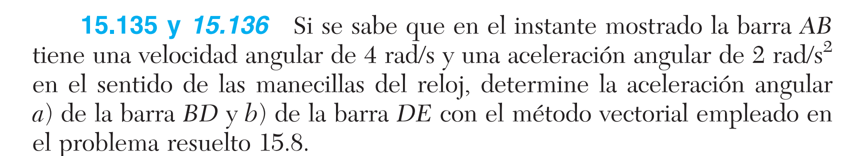


Figura *P15.134* y *P15.136*



15.135 y *15.136* Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una velocidad angular de 4 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular *a*) de la barra BD y *b*) de la barra DE con el método vectorial empleado en el problema resuelto 15.8.

15.137 Si se denota mediante $\mathbf{r}_A$ el vector de posición del punto A de una placa rígida que se encuentra en movimiento plano, demuestre que *a*) el vector de posición $\mathbf{r}_C$ del centro instantáneo de rotación es

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa y $\mathbf{v}_A$ es la velocidad del punto A, *b*) la aceleración del centro de rotación instantáneo es cero si, y sólo si,

$$\mathbf{a}_A = \frac{\alpha}{\omega}\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ es la aceleración angular de la placa.

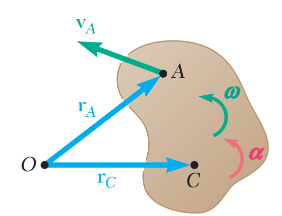


Figura P15.137

***15.138** Se han unido unas pequeñas ruedas a los extremos de la varilla AB y ruedan libremente a lo largo de las superficies que se muestran. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener una expresión para la velocidad angular de la varilla en términos de v_B, θ, l y β.

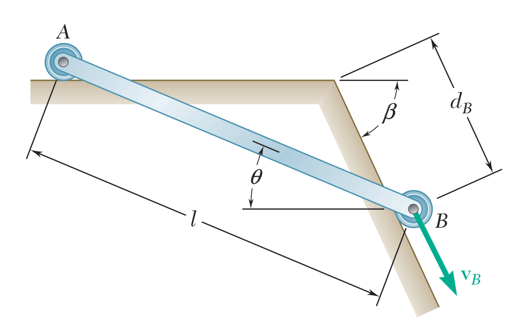


Figura P15.138 y P15.139

***15.139** Se han unido unas pequeñas ruedas a los extremos de la varilla AB y ruedan libremente a lo largo de las superficies que se muestran. Utilice el método de la sección 15.9 y considere que la aceleración de la rueda B es cero a fin de obtener una expresión para la aceleración angular de la varilla en términos de v_B, θ, l y β.

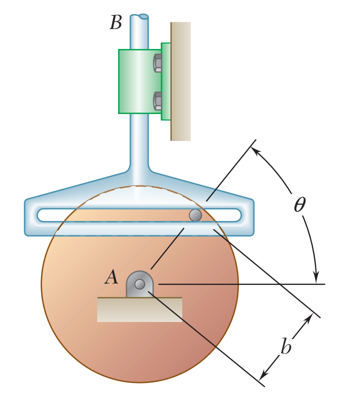


Figura P15.140

***15.140** El disco propulsor del mecanismo de cruceta Scotch que se muestra tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, dirigidas en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener expresiones para la velocidad y la aceleración del punto B.

***15.141** La varilla AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante $\mathbf{v}_A$. Con el método de la sección 15.9, deduzca expresiones para la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla.

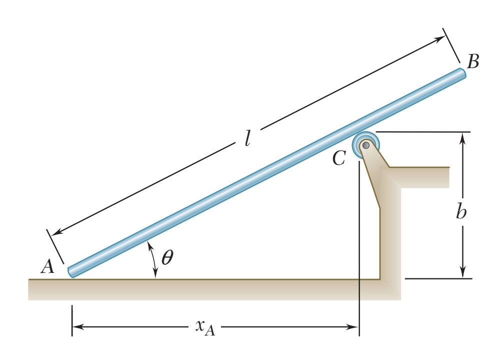


Figura P15.141 y *P15.142*

******15.142*** La varilla AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante $\mathbf{v}_A$. Con el método de la sección 15.9, deduzca expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad del punto B.

***15.143** Un disco de radio r rueda hacia la derecha con una velocidad constante $\mathbf{v}$. Si se denota con P el punto del borde en contacto con el suelo en $t = 0$, deduzca expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad de P en cualquier momento t.

***15.144** En el instante mostrado, la varilla AB gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, dirigidas en el sentido de las manecillas del reloj. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener expresiones para la velocidad y la aceleración del punto C.

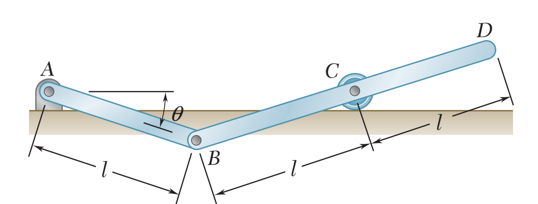


Figura *P15.144* y *P15.145*

***15.145** En el instante mostrado, la varilla AB gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, dirigidas en el sentido de las manecillas del reloj. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad y la aceleración del punto D.

***15.146** La posición de la varilla AB se controla por medio de un disco de radio r que se une a la horquilla CD. Si se sabe que la horquilla se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$, deduzca una expresión para la aceleración angular de la varilla AB.

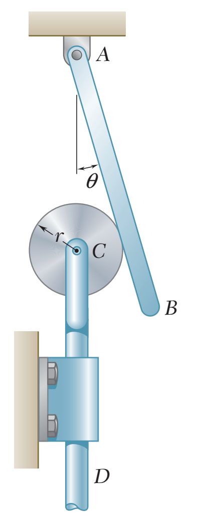


Figura *P15.146*

***15.147** En el problema 15.146, obtenga una expresión para la aceleración angular de la varilla AB.

***15.148** Una rueda de radio r gira sin deslizarse a lo largo del interior de un cilindro fijo de radio R con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Al denotar con P el punto de la rueda en contacto con el cilindro en $t = 0$, obtenga expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad de P en cualquier momento t. (La curva que describe el punto P es una *hipocicloide*.)

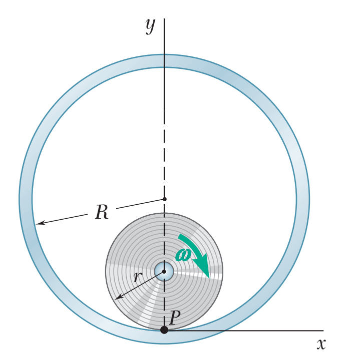
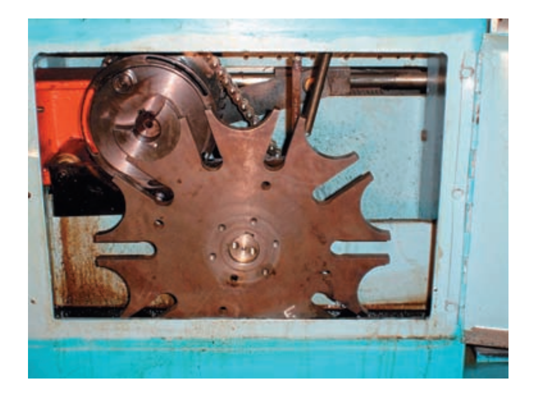


Figura *P15.148*

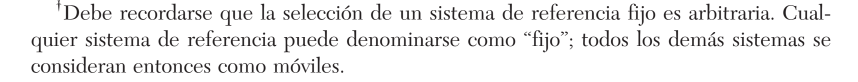
***15.149** En el problema 15.148, demuestre que la trayectoria de P es una línea recta vertical cuando $r = R/2$. Obtenga expresiones para la velocidad y la aceleración correspondientes en cualquier momento t.

15.10. RAZÓN DE CAMBIO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN

En la sección 11.10 se analizó que la razón de cambio de un vector es la misma respecto a un sistema de referencia fijo y respecto a un sistema de referencia en traslación. En esta sección se considerarán las razones de cambio de un vector $\mathbf{Q}$ respecto a un sistema de referencia fijo y a un sistema de referencia rotatorio.† Se aprenderá a determinar la razón de cambio de $\mathbf{Q}$ respecto a un sistema de referencia cuando $\mathbf{Q}$ se define mediante sus componentes en otro sistema de referencia.



Fotografía 15.7 Un mecanismo de Ginebra se usa para convertir movimiento giratorio en movimiento intermitente.



†Debe recordarse que la selección de un sistema de referencia fijo es arbitraria. Cualquier sistema de referencia puede denominarse como "fijo"; todos los demás sistemas se consideran entonces como móviles.

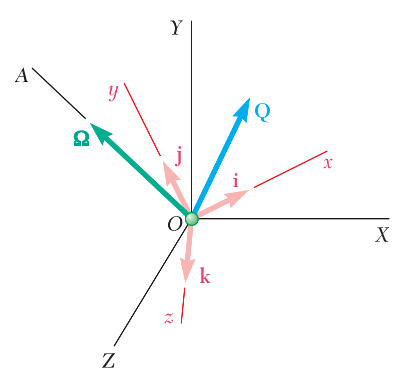


Figura 15.26

Considere dos sistemas de referencias centrados en O, un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y un sistema de referencia $Oxyz$ que giran alrededor del eje fijo OA; deje que $\mathbf{\Omega}$ denote la velocidad angular del sistema de referencia $Oxyz$ en un instante dado (figura 15.26). Considere ahora una función vectorial $\mathbf{Q}(t)$ representada por el vector $\mathbf{Q}$ fijo en O; cuando el tiempo t varía, cambian tanto la dirección como la magnitud de $\mathbf{Q}$. Puesto que la variación de $\mathbf{Q}$ es vista diferencialmente por un observador que utiliza $OXYZ$ como un sistema de referencia y por un observador que recurre a $Oxyz$, se debe esperar que la tasa de cambio de $\mathbf{Q}$ dependa del sistema de referencia que se ha elegido. Por lo tanto, la razón de cambio de $\mathbf{Q}$ con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se denotará por medio de $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ y la razón de cambio de $\mathbf{Q}$ con respecto al sistema de referencia rotatorio $Oxyz$ se denotará mediante $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$. La propuesta es determinar la relación que existe entre estas dos razones de cambio.

Primero se descompone el vector $\mathbf{Q}$ en componentes a lo largo de los ejes x, y y z del sistema de referencia rotatorio. Al denotar por medio de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ los correspondientes vectores unitarios, se escribe

$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k} \tag{15.27}$$

Al diferenciar (15.27) con respecto a t y considerar fijos los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, se obtiene la razón de cambio de $\mathbf{Q}$ *con respecto al sistema de referencia rotatorio Oxyz*:

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} = \dot{Q}_x\mathbf{i} + \dot{Q}_y\mathbf{j} + \dot{Q}_z\mathbf{k} \tag{15.28}$$

Para obtener la razón de cambio de $\mathbf{Q}$ *con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ*, se deben considerar los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ como variables cuando se realiza la diferenciación (15.27). Por lo tanto, se escribe

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = \dot{Q}_x\mathbf{i} + \dot{Q}_y\mathbf{j} + \dot{Q}_z\mathbf{k} + Q_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{15.29}$$

Al recordar (15.28), se observa que la suma de los primeros tres términos en el miembro del lado derecho de (15.29) representa la razón de cambio $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$. Se nota, por otro lado, que la razón de cambio $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ se reduciría a los últimos tres términos (15.29) si el vector $\mathbf{Q}$ estuviera fijo dentro del sistema de referencia $Oxyz$, ya que $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ sería entonces cero. Pero en ese caso $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ representaría la velocidad de la partícula ubicada en la punta de $\mathbf{Q}$ y correspondería a un cuerpo rígidamente unido al sistema de referencia $Oxyz$. De tal modo, los últimos tres términos en (15.29) representan la velocidad de esa partícula; puesto que el sistema de referencia $Oxyz$ tiene una velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ con respecto a $OXYZ$ en el instante considerado, se escribe, mediante (15.5),

$$Q_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.30}$$

Al sustituir (15.28) y (15.30) en (15.29), se obtiene la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

La conclusión es que la razón de cambio del vector $\mathbf{Q}$ con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se compone de dos partes: la primera representa la razón de cambio de $\mathbf{Q}$ con respecto al sistema de referencia rotatorio $Oxyz$; la segunda parte, $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q}$, se induce por la rotación del sistema de referencia $Oxyz$.

El uso de la relación (15.31) simplifica la determinación de la razón de cambio del vector **Q** con respecto a un sistema de referencia fijo *OXYZ* cuando el vector **Q** se define mediante sus componentes a lo largo de los ejes de un sistema de referencia rotatorio *Oxyz*, ya que esta relación no requiere el cálculo separado de las derivadas de los vectores unitarios que definen la orientación del sistema de referencia rotatorio.

15.11. MOVIMIENTO PLANO DE UNA PARTÍCULA RELATIVA A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN. ACELERACIÓN DE CORIOLIS

Considere dos sistemas de referencia, ambos centrados en *O* y en el plano de la figura, un sistema de referencia fijo *OXY* y un sistema de referencia en rotación *Oxy* (figura 15.27). Sea *P* una partícula que se mueve en el plano de la figura. El vector de posición **r** de *P* es el mismo en ambos sistemas de referencia, aunque su razón de cambio depende del sistema de referencia que se ha elegido.

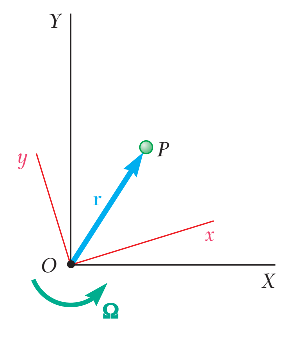


Figura 15.27

La velocidad absoluta $\mathbf{v}_P$ de la partícula se define como la velocidad observada desde el sistema de referencia fijo *OXY* y es igual a la razón de cambio $(\dot{\mathbf{r}})_{OXY}$ de **r** con respecto a ese sistema de referencia. Sin embargo, es posible expresar $\mathbf{v}_P$ en términos de la tasa de cambio $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ que se observa desde el sistema de referencia en rotación si recurrimos a la ecuación (15.31). Denotando mediante $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema de referencia *Oxy* con respecto a *OXY* en el instante que se considera, se escribe

$$\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{OXY} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} \tag{15.32}$$

Pero $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ define la velocidad de la partícula *P* relativa al sistema de referencia en rotación *Oxy*. Al denotar el sistema de referencia en rotación mediante $\mathcal{F}$ se representa la velocidad $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ de *P* relativa al sistema de referencia por $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Imagine que una placa rígida se ha unido al sistema de referencia en rotación. En ese caso $v_{P/\mathcal{F}}$ representa la velocidad de *P* a lo largo de la trayectoria que éste describe sobre la placa (figura 15.28), y el término $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ en (15.32) representa la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ del punto *P′* de la placa —o del sistema de referencia en rotación— que coincide con *P* en el instante que se está considerando. De tal modo, se tiene

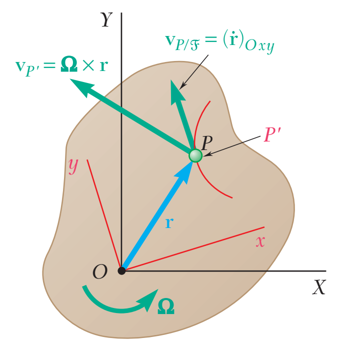


Figura 15.28

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.33}$$

donde $\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de la partícula *P*
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad de punto *P′* del sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ coincidiendo con *P*
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de *P* relativa al sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de la partícula se define como la razón de cambio de $\mathbf{v}_P$ con respecto al sistema de referencia fijo *OXY*. Al calcular las razones de cambio con respecto a *OXY* de los términos en (15.32), se escribe

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] \tag{15.34}$$

donde todas las derivadas se definen con respecto a *OXY*, excepto donde se indica de otro modo. Con referencia a la ecuación (15.31), se advierte que el último término en (15.34) puede expresarse como

$$\frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] = (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} + \boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

Por otro lado, $\dot{\mathbf{r}}$ representa la velocidad $\mathbf{v}_P$ y puede sustituirse por el miembro del lado derecho de la ecuación (15.32). Después de completar estas dos sustituciones en (15.34), se escribe

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} \qquad (15.35)$$

Con referencia a la expresión (15.8) que se obtuvo en la sección 15.3 para la aceleración de una partícula en un cuerpo rígido rotatorio alrededor de un eje fijo, se nota que la suma de los primeros dos términos representa la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' del sistema de referencia en rotación que coincide con P en el instante en que se ha considerado. Por otro lado, el último término define la aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ de P relativa al sistema de referencia en rotación. Si no fuera por el tercer término, el cual no se ha tomado en cuenta, podría haberse escrito una relación similar a (15.33) para las aceleraciones y $\mathbf{a}_P$ podría expresarse como la suma de $\mathbf{a}_{P'}$ y $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$. Sin embargo, es claro que *una relación de este tipo sería incorrecta* y debemos incluir el término adicional. Este término, que se denotará por $\mathbf{a}_c$, se denomina *aceleración complementaria,* o *aceleración de Coriolis,* en honor al matemático francés De Coriolis (1792-1843). Se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.36)$$

donde $\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativo al sistema de referencia $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleración complementaria, o de Coriolis†

Al observar que el punto P' se mueve en un círculo alrededor del origen O, su aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ tiene, en general, dos componentes: una componente $(\mathbf{a}_{P'})_t$ tangente al círculo y una componente $(\mathbf{a}_{P'})_n$ dirigida hacia O. De manera similar, la aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ por lo general cuenta con dos componentes: una componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_t$ tangente a la trayectoria que describe P sobre la placa en rotación, y una componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_n$ dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Además advierta que puesto que el vector $\mathbf{\Omega}$ es perpendicular al plano de movimiento y, en consecuencia, a $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$, la magnitud de la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ es igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$, y su dirección se puede obtener al girar el vector $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ 90° en el sentido de rotación del sistema de referencia en movimiento (figura 15.29). La aceleración de Coriolis se reduce a cero cuando ya sea $\mathbf{\Omega}$ o $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ es cero.

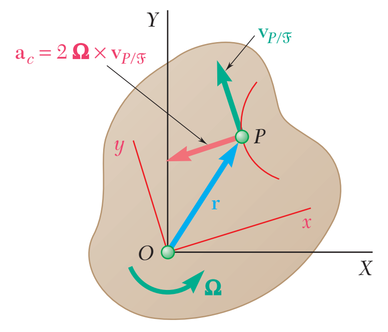


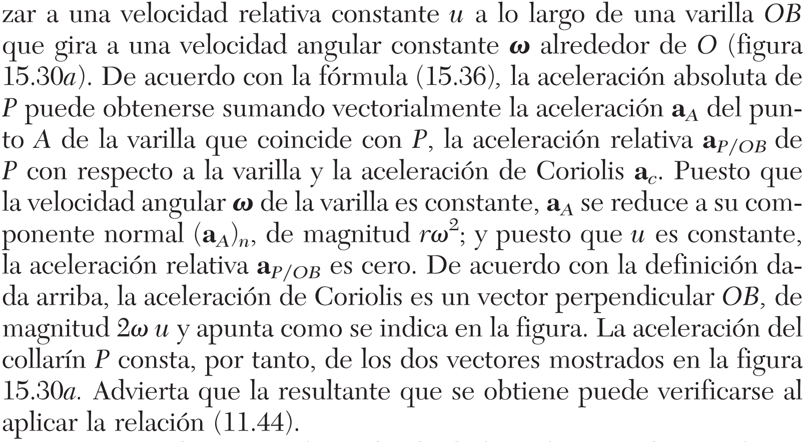
Figura 15.29

El siguiente ejemplo ayudará a comprender el significado físico de la aceleración de Coriolis. Considere un collarín P que se hace desli-

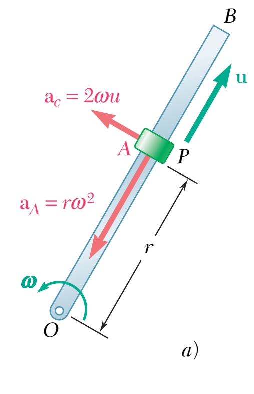
†Es importante notar la diferencia entre la ecuación (15.36) y la ecuación (15.21) de la sección 15.8. Cuando se escribió

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad (15.21)$$

en la sección 15.8, se expresó la aceleración absoluta del punto B como la suma de su aceleración $\mathbf{a}_{B/A}$ relativa a un *sistema de referencia en traslación* y la aceleración $\mathbf{a}_A$ de un punto de ese sistema de referencia. Ahora se trata de relacionar la aceleración absoluta del punto P con su aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ relativa a un *sistema de referencia en rotación* $\mathcal{F}$ y a la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' de ese sistema de referencia que coincide con P; la ecuación (15.36) muestra que debido a que el sistema de referencia está en rotación, es necesario incluir un término adicional que representa la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c$.



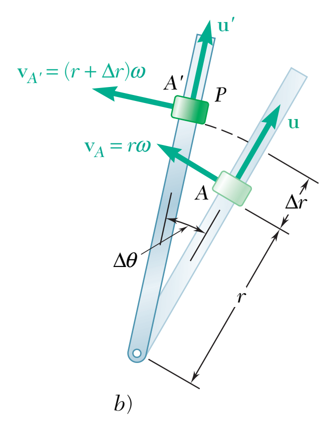
zar a una velocidad relativa constante u a lo largo de una varilla OB que gira a una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de O (figura 15.30*a*). De acuerdo con la fórmula (15.36), la aceleración absoluta de P puede obtenerse sumando vectorialmente la aceleración $\mathbf{a}_A$ del punto A de la varilla que coincide con P, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ de P con respecto a la varilla y la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c$. Puesto que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la varilla es constante, $\mathbf{a}_A$ se reduce a su componente normal $(\mathbf{a}_A)_n$, de magnitud $r\omega^2$; y puesto que u es constante, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ es cero. De acuerdo con la definición dada arriba, la aceleración de Coriolis es un vector perpendicular OB, de magnitud $2\omega u$ y apunta como se indica en la figura. La aceleración del collarín P consta, por tanto, de los dos vectores mostrados en la figura 15.30*a*. Advierta que la resultante que se obtiene puede verificarse al aplicar la relación (11.44).



a)

Para entender mejor el significado de la aceleración de Coriolis, se considera la velocidad absoluta de P en el tiempo t y en el tiempo $t + \Delta t$ (figura 15.30*b*). La velocidad en el tiempo t puede descomponerse en sus componentes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}_A$; la velocidad en el tiempo $t + \Delta t$ se descompone en sus componentes $\mathbf{u}'$ y $\mathbf{v}_{A'}$. Dibujando estas componentes desde el mismo origen (figura 15.30*c*), se nota que el cambio en la velocidad durante el tiempo Δt puede representarse por medio de la suma de tres vectores, $\overrightarrow{RR'}$, $\overrightarrow{TT''}$, y $\overrightarrow{T''T'}$. El vector $\overrightarrow{TT''}$ mide el cambio en la dirección de la velocidad $\mathbf{v}_A$, y el cociente $\overrightarrow{TT''}/\Delta t$ representa la aceleración $\mathbf{a}_A$ cuando Δt tiende a cero. Se verifica que la dirección de $\overrightarrow{TT''}$ es la de $\mathbf{a}_A$ cuando Δt se aproxima a cero y que

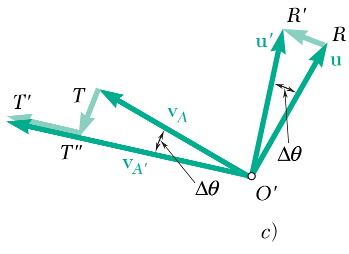
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{TT''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_A \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega\omega = r\omega^2 = a_A$$



b)

El vector $\overrightarrow{RR'}$ mide el cambio en la dirección de $\mathbf{u}$ debido a la rotación de la varilla; el vector $\overrightarrow{T''T'}$ mide el cambio en magnitud de $\mathbf{v}_A$ debido al movimiento de P sobre la varilla. Los vectores $\overrightarrow{RR'}$ y $\overrightarrow{T''T'}$ son el resultado del *efecto combinado* del movimiento relativo de P y de la rotación de la barra; se anularían si *cualquiera* de estos dos movimientos se interrumpieran. Se verifica con facilidad que la suma de estos dos vectores define la aceleración de Coriolis. Su dirección es la de $\mathbf{a}_c$ cuando Δt tiende a cero, y puesto que $RR' = u\,\Delta\theta$ y $T''T' = v_{A'} - v_A = (r + \Delta r)\omega - r\omega = \omega\,\Delta r$, se confirma que $\mathbf{a}_c$ es igual a

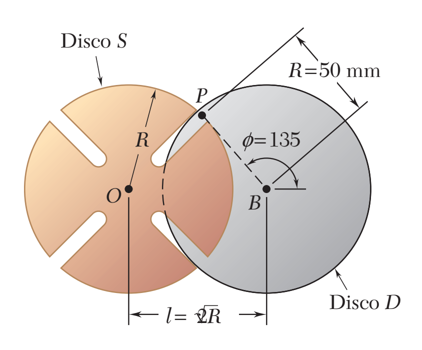
$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{RR'}{\Delta t} + \frac{T''T'}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(u\frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \omega\frac{\Delta r}{\Delta t}\right) = u\omega + \omega u = 2\omega u$$



c)

Figura 15.30

Las fórmulas (15.33) y (15.36) se pueden usar para analizar el movimiento de mecanismos que contienen partes que se deslizan una respecto a otras. Posibilitan, por ejemplo, relacionar movimientos absolutos y relativos de pasadores y collarines deslizantes (véanse los problemas resueltos 15.9 y 15.10). El concepto de aceleración de Coriolis también es muy útil en el estudio de proyectiles de largo alcance y de otros cuerpos cuyos movimientos resultan afectados de manera apreciable por la rotación de la Tierra. Como se señaló en la sección 12.2, un sistema de ejes unidos a la Tierra no constituye en verdad un sistema de referencia newtoniano; un sistema de ejes de este tipo en realidad debe considerarse como rotatorio. Las fórmulas que se obtuvieron en esta sección facilitarán consecuentemente el estudio del movimiento de cuerpos con respecto a ejes fijos a la Tierra.

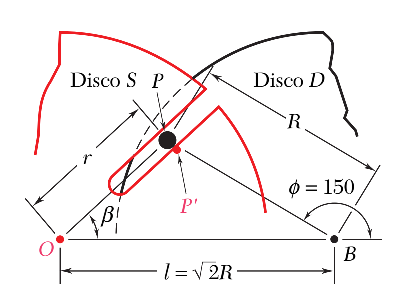


PROBLEMA RESUELTO 15.9

El mecanismo de Ginebra o Cruz de Malta que se muestra se utiliza en muchos instrumentos de conteo y en otras aplicaciones donde se requiere un movimiento giratorio intermitente. El disco D gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_D$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de 10 rad/s. Un pasador P se coloca en el disco D y desliza a lo largo de varias ranuras que se cortan en el disco S. Es deseable que la velocidad angular del disco S sea cero cuando el pasador entra y sale de cada ranura; en el caso de cuatro ranuras, esto ocurrirá si la distancia entre los centros de los discos es $l = \sqrt{2}\,R$.

En el instante en el que $\phi = 150°$, determine *a*) la velocidad angular del disco S, *b*) la velocidad del pasador P relativa al disco S.

SOLUCIÓN



Se resuelve el triángulo OPB, el cual corresponde a la posición $\phi = 150°$. Utilizando la ley de los cosenos, se escribe

$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cos 30° = 0.551R^2 \qquad r = 0.742R = 37.1 \text{ mm}$$

De la ley de los senos,

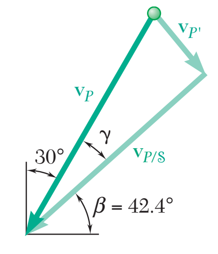
$$\frac{\text{sen}\,\beta}{R} = \frac{\text{sen}\,30°}{r} \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{\text{sen}\,30°}{0.742} \qquad \beta = 42.4°$$

Puesto que el pasador P está unido al disco D, y en vista de que D gira alrededor del punto B, la magnitud de la velocidad absoluta de P es

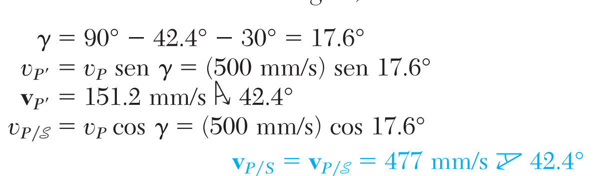
$$v_P = R\omega_D = (50 \text{ mm})(10 \text{ rad/s}) = 500 \text{ mm/s}$$
$$\mathbf{v}_P = 500 \text{ mm/s} \measuredangle 60°$$

Hay que considerar ahora el movimiento del pasador P a lo largo de la ranura en el disco S. Al denotar por P' el punto del disco S que coincide con P en el instante que se considera y al seleccionar un sistema de referencia en rotación $\mathcal{S}$ unido al disco S, se escribe

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$$



Al notar que $\mathbf{v}_{P'}$ es perpendicular al radio OP y que $\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$ está dirigida a lo largo de la ranura, se dibuja el triángulo de la velocidad correspondiente a la ecuación anterior. De acuerdo con el triángulo, se calcula



$$\gamma = 90° - 42.4° - 30° = 17.6°$$
$$v_{P'} = v_P \text{ sen } \gamma = (500 \text{ mm/s}) \text{ sen } 17.6°$$
$$\mathbf{v}_{P'} = 151.2 \text{ mm/s} \searrow 42.4°$$
$$v_{P/\mathcal{S}} = v_P \cos \gamma = (500 \text{ mm/s}) \cos 17.6°$$
$$\mathbf{v}_{P/S} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \measuredangle 42.4° \quad ◀$$

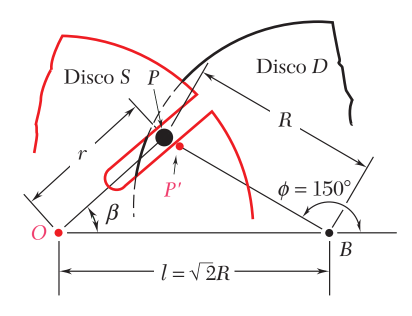
Puesto que $\mathbf{v}_{P'}$ es perpendicular al radio OP, se escribe

$$v_{P'} = r\omega_{\mathcal{S}} \qquad 151.2 \text{ mm/s} = (37.1 \text{ mm})\omega_{\mathcal{S}}$$
$$\boldsymbol{\omega}_S = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} = 4.08 \text{ rad/s} \circlearrowright \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 15.10

En el mecanismo de Ginebra o Cruz de Malta del problema resuelto 15.9, el disco D gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_D$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj y de magnitud igual a 10 rad/s. En el instante en que $\phi = 150°$, determine la aceleración angular del disco S.

SOLUCIÓN



Si se recurre al problema resuelto 15.9, se obtiene la velocidad angular del sistema de referencia $\mathcal{S}$ unido al disco S y la velocidad del pasador relativa a $\mathcal{S}$:

$$\omega_{\mathcal{S}} = 4.08 \text{ rad/s} \downarrow$$
$$\beta = 42.4° \qquad \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \angle 42.4°$$

Puesto que el pasador P se mueve con respecto al sistema de referencia $\mathcal{S}$, se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c \qquad (1)$$

Cada término de esta ecuación vectorial se investiga por separado.

Aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$. Puesto que el disco D gira con una velocidad angular constante, la aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ se dirige hacia B. Se tiene

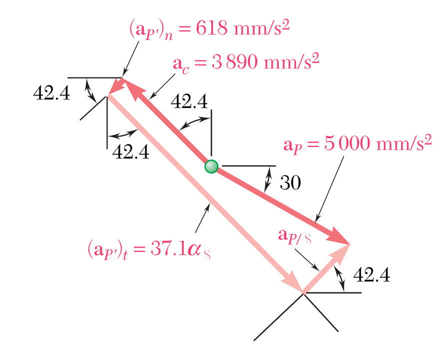
$$a_P = R\omega_D^2 = (500 \text{ mm})(10 \text{ rad/s})^2 = 5\,000 \text{ mm/s}^2$$
$$\mathbf{a}_P = 5\,000 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 30°$$

Aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto coincidente P'. La aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' del sistema de referencia $\mathcal{S}$ que coincide con P en el instante considerado se descompone en las componentes normal y tangencial. (Recuerde del problema resuelto 15.9 que $r = 37.1$ mm.)

$$(a_{P'})_n = r\omega_{\mathcal{S}}^2 = (37.1 \text{ mm})(4.08 \text{ rad/s})^2 = 618 \text{ mm/s}^2$$
$$(\mathbf{a}_{P'})_n = 618 \text{ mm/s}^2 \angle 42.4°$$
$$(a_{P'})_t = r\alpha_{\mathcal{S}} = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} \qquad (\mathbf{a}_{P'})_t = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} \measuredangle 42.4°$$

Aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$. Puesto que el pasador P se mueve en una ranura recta cortada en el disco S, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$ debe ser paralela a la ranura; esto es, su dirección debe ser $\angle$ 42.4°.

Aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c$. Si se hace girar la velocidad relativa $\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$ 90° en el sentido de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}}$ obtenemos la dirección de la componente de Coriolis de la aceleración $\measuredangle$ 42.4°. Se escribe



$$a_c = 2\omega_{\mathcal{S}} v_{P/\mathcal{S}} = 2(4.08 \text{ rad/s})(477 \text{ mm/s}) = 3\,890 \text{ mm/s}^2$$
$$\mathbf{a}_c = 3\,890 \text{ mm/s}^2 \measuredangle 42.4°$$

Se reescribe la ecuación (1) y se sustituyen las aceleraciones encontradas antes:

$$\mathbf{a}_P = (\mathbf{a}_{P'})_n + (\mathbf{a}_{P'})_t + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c$$
$$[5\,000 \measuredangle 30°] = [618 \angle 42.4°] + [37.1\alpha_{\mathcal{S}} \measuredangle 42.4°] + [a_{P/\mathcal{S}} \angle 42.4°] + [3\,890 \measuredangle 42.4°]$$

Al igualar las componentes en la dirección perpendicular a la ranura,

$$5\,000 \cos 17.6° = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} - 3\,890$$
$$\boldsymbol{\alpha}_S = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{S}} = 233 \text{ rad/s}^2 \downarrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudió la razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación, y luego se aplicó lo aprendido al análisis del movimiento plano de una partícula relativa a un sistema de referencia rotatorio.

1. Razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia fijo y con respecto a un sistema de referencia rotatorio. Al denotar por $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ la razón de cambio de un vector $\mathbf{Q}$ con respecto a un sistema de referencia fijo *OXYZ* y por $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ su razón de cambio con respecto a un sistema de referencia en rotación *Oxyz*, se obtuvo la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

donde $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de referencia en rotación.

Esta relación fundamental se aplicará ahora a la solución de problemas bidimensionales.

2. Movimiento plano de una partícula relativo a un sistema de referencia rotatorio. Utilizando la relación fundamental anterior y designando por medio de $\mathcal{F}$ el sistema de referencia rotatorio, se obtuvieron las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula *P*:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.33}$$
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.36}$$

En estas ecuaciones:

a) El subíndice P se refiere al movimiento absoluto de la partícula *P*, esto es, a su movimiento con respecto a un sistema de referencia fijo *OXY*.

b) El subíndice P′ se refiere al movimiento del punto *P′* del sistema rotatorio $\mathcal{F}$ que coincide con *P* en el instante que se considera.

c) El subíndice $P/\mathcal{F}$ se refiere al movimiento de la partícula *P* relativo al sistema de referencia de rotación $\mathcal{F}$.

d) El término $\mathbf{a}_c$ representa la aceleración de Coriolis del punto P. Su magnitud es $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ y su dirección se encuentra al rotar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ 90° en el sentido de rotación del sistema de referencia $\mathcal{F}$.

No hay que olvidar que la aceleración de Coriolis debe tomarse en cuenta si una parte del mecanismo que se analiza se mueve con respecto a otra parte que está girando. Los problemas de esta lección incluyen collarines que se deslizan sobre varillas rotatorias, plumas que se extienden sobre grúas rotatorias en un plano vertical, etcétera.

Al resolver un problema que implica un sistema de referencia en rotación, se encontrará conveniente dibujar diagramas vectoriales que representen, respectivamente, las ecuaciones (15.33) y (15.36) y utilizarlos para obtener la solución analítica o la solución gráfica.

Problemas

15.150 y 15.151 Dos varillas giratorias se conectan por medio del bloque deslizante P. La varilla unida en A gira con una velocidad angular constante ω_A. Con los datos siguientes, determine para la posición que se muestra *a*) la velocidad angular de la varilla unida en B, *b*) la velocidad relativa del bloque deslizante P con respecto a la varilla sobre la cual se desliza.

15.150 $b = 8$ in., $\omega_A = 6$ rad/s.
15.151 $b = 300$ mm, $\omega_A = 10$ rad/s.

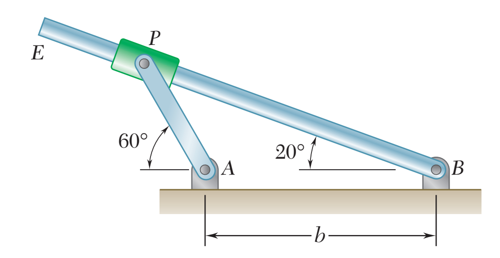


Figura P15.150 y P15.152

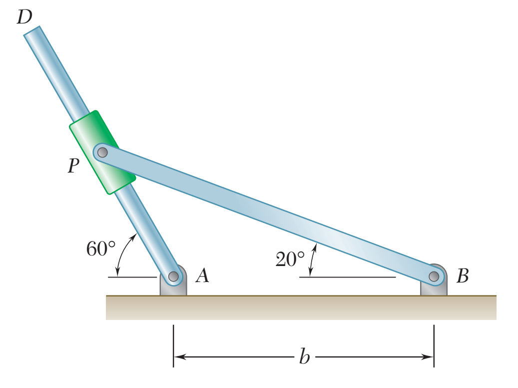


Figura P15.151 y P15.153

15.152 y 15.153 Dos varillas giratorias se conectan por medio del bloque deslizante P. La velocidad $\mathbf{v}_0$ del bloque deslizante relativa a la varilla es constante y dirigida hacia fuera. Para los datos dados, determine la velocidad angular de cada varilla en la posición mostrada.

15.152 $b = 300$ mm, $v_0 = 480$ mm/s.
15.153 $b = 8$ in., $v_0 = 9$ in./s.

15.154 y 15.155 El pasador P está unido al collarín que se muestra en la figura; una ranura cortada en la varilla BD y el collarín que se desliza sobre la varilla AE guían el movimiento del pasador. Si en el instante considerado las varillas giran en el sentido de las manecillas del reloj con velocidades angulares constantes, determine para los siguientes datos la velocidad del pasador P.

15.154 $\boldsymbol{\omega}_{AE} = 4$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 1.5$ rad/s.
15.155 $\boldsymbol{\omega}_{AE} = 3.5$ rad/s, $\boldsymbol{\omega}_{BD} = 2.4$ rad/s.

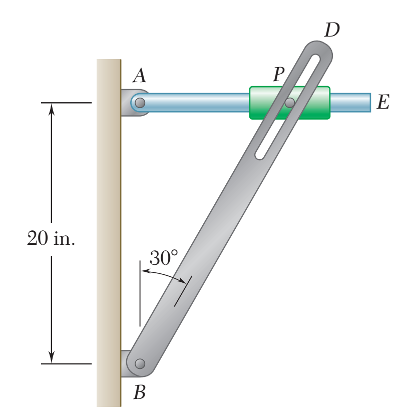


Figura *P15.154* y *P15.155*

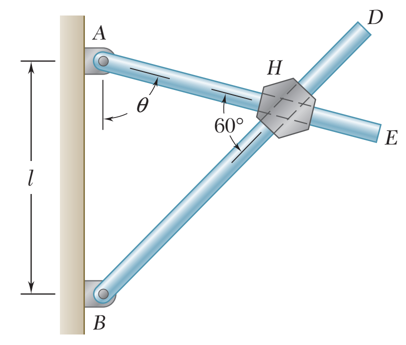


Figura P15.156 y P15.157

15.156 y 15.157 Dos varillas *AE* y *BD* pasan a través de orificios perforados en un bloque hexagonal. (Los orificios están taladrados en diferentes planos de manera que las varillas no se toquen entre sí.) Si en el instante considerado la varilla *AE* gira en contra de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante **ω**, determine para los datos dados, la velocidad relativa del bloque con respecto a cada varilla.

15.156 *a*) $\theta = 90°$, *b*) $\theta = 60°$.

15.157 $\theta = 45°$.

15.158 Cuatro pasadores se deslizan en cuatro ranuras independientes cortadas en una placa circular como se muestra en la figura. Cuando la placa está en reposo, cada pasador tiene una velocidad dirigida en la forma que se indica y de la misma magnitud constante *u*. Si cada pasador mantiene la misma velocidad relativa a la placa cuando ésta gira alrededor de *O* con una velocidad angular constante **ω** en contra de las manecillas del reloj, determine la aceleración de cada pasador.

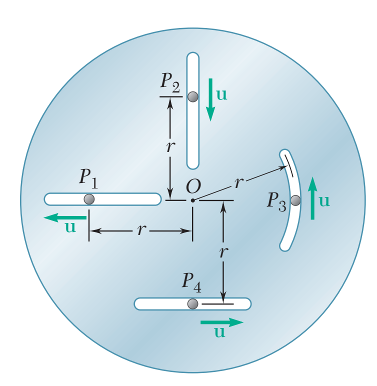


Figura *P15.158*

15.159 Retome el problema 15.158, y ahora suponga que la placa gira alrededor de *O* con una velocidad angular constante **ω** en el sentido de las manecillas del reloj.

15.160 En el instante que se muestra la longitud de la pluma *AB* se *reduce* a una velocidad constante de 0.2 m/s, y la pluma desciende a razón constante de 0.08 rad/s. Determine *a*) la velocidad del punto *B*, *b*) la aceleración del punto *B*.

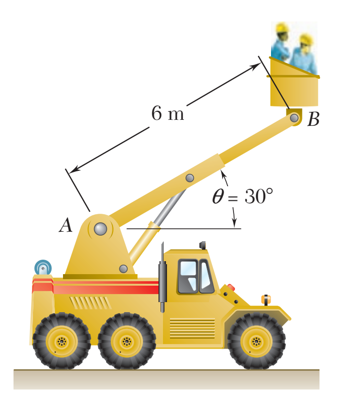


Figura P15.160 y P15.161

15.161 En el instante que se muestra la longitud de la pluma *AB* se *incrementa* a una velocidad constante de 0.2 m/s, y la pluma desciende a razón constante de 0.08 rad/s. Determine *a*) 1a velocidad del punto *B*, *b*) la aceleración del punto *B*.

15.162 y 15.163 La manga BC está soldada a un brazo que gira alrededor de A con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. En la posición mostrada la varilla DF está siendo movida hacia la izquierda a una velocidad constante $u = 16$ in./s relativa a la manga. Para la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ dada, determine la aceleración *a*) del punto D, *b*) del punto de la varilla DF que coincide con el punto E.

15.162 $\boldsymbol{\omega} = (3 \text{ rad/s})\mathbf{i}$.
15.163 $\boldsymbol{\omega} = (3 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

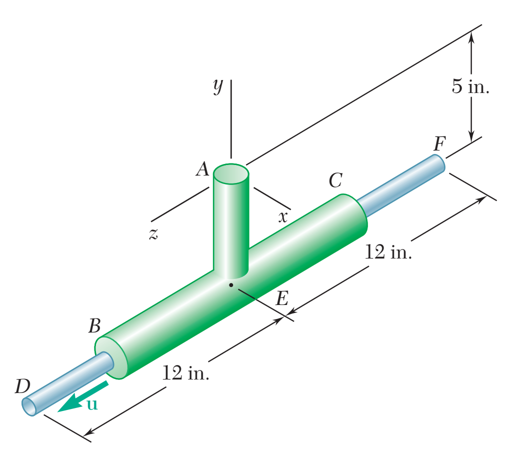


Figura P15.162 y P15.163

15.164 La jaula del elevador de una mina desciende a una velocidad constante de 40 ft/s. Determine la magnitud y dirección de la aceleración de Coriolis de la jaula si el elevador se localiza *a*) en el ecuador, *b*) en la latitud 40° norte y *c*) en la latitud 40° sur.

15.165 Un trineo de propulsión se somete a una prueba en una pista recta que se construye a lo largo de un meridiano. Si se sabe que la pista se ubica en una latitud 40° norte, determine la aceleración de Coriolis del trineo cuando se mueve hacia el norte a una velocidad de 900 km/h.

15.166 El brazo AB controla el movimiento de la manguera D. En el instante que se indica, el brazo gira en contra de las manecillas del reloj a razón constante $\omega = 2.4$ rad/s y la extensión BC se alarga a razón constante $u = 10$ in./s con respecto al brazo. Para cada uno de los arreglos que se muestran, determine la aceleración de la manguera D.

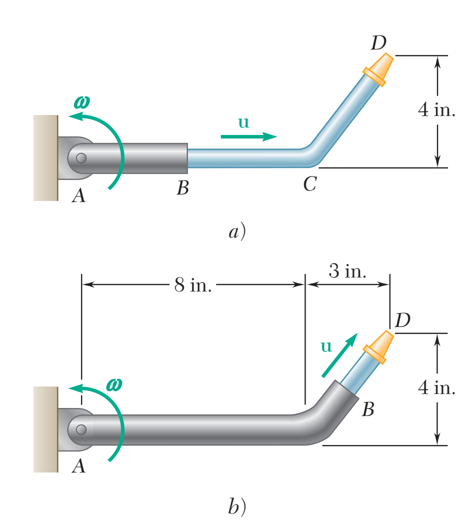


Figura P15.166

15.167 Retome el problema 15.166, y ahora suponga que la dirección de la velocidad relativa u se invierte de manera que la porción BD se retraiga.

15.168 y 15.169 Una cadena se enrolla alrededor de dos engranes de 40 mm de radio que giran libremente con respecto al brazo AB de 320 mm. La cadena se mueve alrededor del brazo AB en el sentido de las manecillas del reloj a razón constante relativa al brazo de 80 mm/s. Si en la posición que se indica el brazo AB gira en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de A a razón constante $\omega = 0.75$ rad/s, determine la aceleración de los eslabones de la cadena que se indican a continuación.

15.168 Eslabones 1 y 2.
15.169 Eslabones 3 y 4.

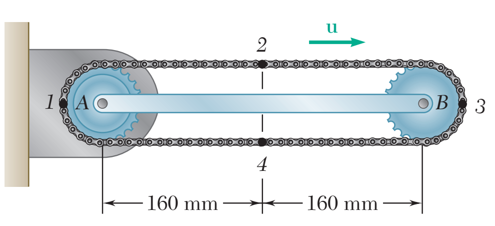


Figura P15.168 y P15.169

15.170 La varilla AB de longitud R gira alrededor de A con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ *en el sentido de las manecillas del reloj*. Al mismo tiempo, la varilla BD de longitud r gira alrededor de B con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* con respecto a la varilla AB. Demuestre que si $\boldsymbol{\omega}_2 = 2\boldsymbol{\omega}_1$, la aceleración del punto D pasa por el punto A. Además muestre que este resultado es independiente de R, r y θ.

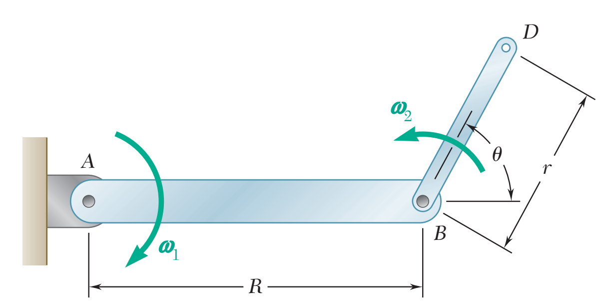


Figura *P15.170* y P15.171

15.171 La varilla AB de longitud $R = 15$ in. gira alrededor de A con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 5 rad/s *en el sentido de las manecillas del reloj*. Al mismo tiempo, la varilla BD de longitud $r = 8$ in. gira alrededor de B con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ de 3 rad/s *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* con respecto a la varilla AB. Si $\theta = 60°$, determine la aceleración del punto D para la posición mostrada.

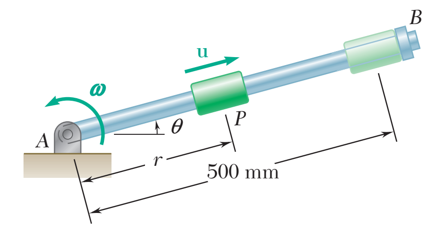


Figura *P15.172*

15.172 El collarín P se desliza hacia fuera a una velocidad relativa constante u a lo largo de la varilla AB, la cual gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de 20 rpm. Si $r = 250$ mm cuando $\theta = 0$ y el collarín llega a B cuando $\theta = 90°$, determine la magnitud de la aceleración del collarín P justo cuando llegue a B.

15.173 El pasador P se desliza en una ranura cortada en la placa que se muestra a una velocidad relativa constante $u = 90$ mm/s. Si en el instante indicado la placa gira en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de A a una velocidad constante $\boldsymbol{\omega} = 3$ rad/s, determine la aceleración del pasador si éste se ubica en *a*) el punto A, *b*) el punto B y *c*) el punto C.

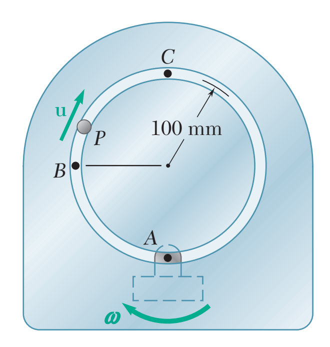


Figura *P15.173* y P15.174

15.174 El pasador P se desliza en una ranura circular cortada en la placa que se muestra a una velocidad relativa constante $u = 90$ mm/s. Si se sabe que en el instante indicado la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la placa es de 3 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y que decrece a razón de 5 rad/s^2, determine la aceleración del pasador si éste se localiza en *a*) el punto A, *b*) el punto B, *c*) el punto C.

15.175 y 15.176 Si en el instante mostrado la varilla unida a B gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_B$ de 6 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla unida en A.

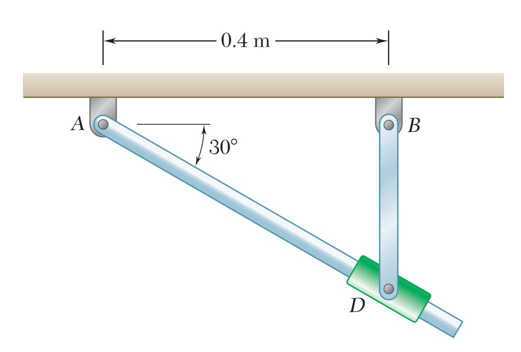


Figura P15.175

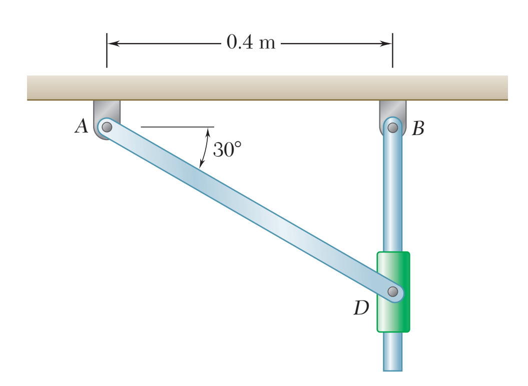


Figura P15.176

15.177 En el instante mostrado, la barra BC tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2, ambas en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular de la placa.

15.178 En el instante mostrado, la barra BC tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s^2, ambas en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular de la placa.

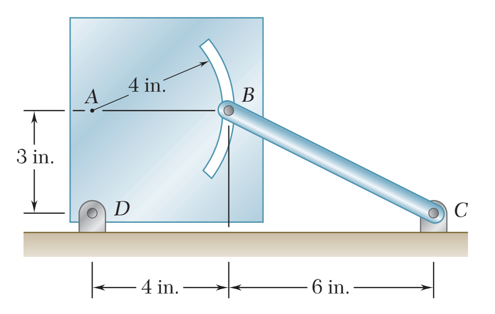


Figura P15.177 y P15.178

15.179 El mecanismo de Ginebra o Cruz de Malta que se muestra se utiliza para proporcionar un movimiento rotatorio intermitente del disco S. El disco D gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_D$ de 8 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se une un pasador P al disco D, el cual tiene la posibilidad de deslizarse en una de las seis ranuras cortadas con igual espaciamiento en el disco S. Se desea que la velocidad angular del disco S sea cero cuando el pasador entre y salga de cada una de las seis ranuras; esto ocurrirá si la distancia entre los centros de los discos y los radios de los mismos se relacionan de la manera indicada. Determine la velocidad y la aceleración angulares del disco S en el instante en el que $\phi = 150°$.

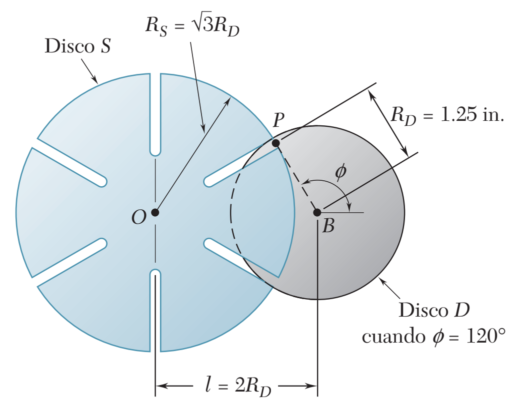


Figura *P15.179*

15.180 En el problema 15.179, determine la velocidad angular y la aceleración angular del disco S en el instante en el que $\phi = 135°$.

15.181 El disco que se muestra gira con una velocidad angular constante de 12 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. En el instante indicado, determine *a*) la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla BD, *b*) la velocidad y la aceleración del punto de la varilla que coincide con E.

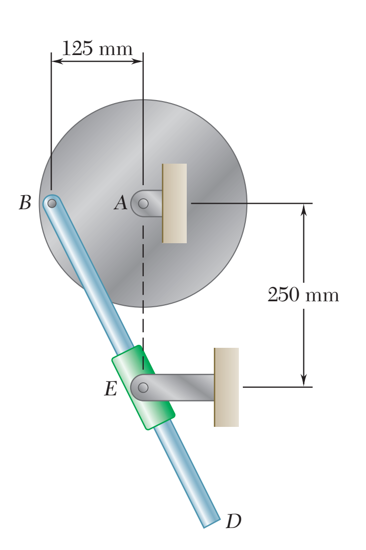


Figura P15.181

***15.182** La varilla AB pasa a través de un collarín que está soldado al eslabón DE. Si se sabe que en el instante mostrado el bloque A se mueve hacia la derecha a una velocidad constante de 75 in./s, determine *a*) la velocidad angular de la varilla AB, *b*) la velocidad relativa al collarín del punto de la varilla que está en contacto con el collarín, *c*) la aceleración del punto de la varilla que está en contacto con el collarín. (*Sugerencia*: La varilla AB y el eslabón DE tienen la misma $\boldsymbol{\omega}$ y la misma $\boldsymbol{\alpha}$.)

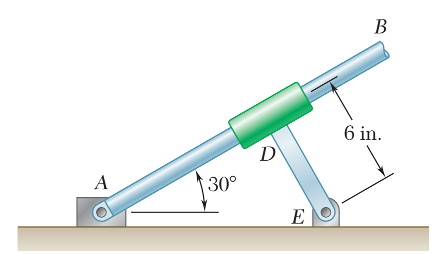


Figura P15.182

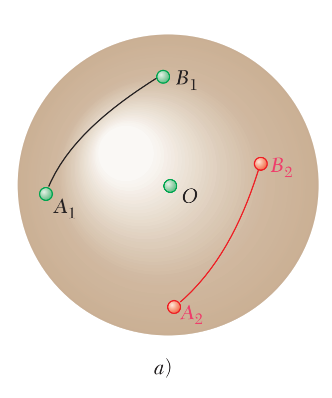
***15.183** Retome el problema 15.182, y ahora suponga que el bloque A se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante de 75 in./s.

*15.12. MOVIMIENTO ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO

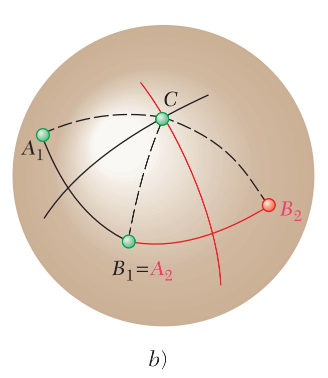
En la sección 15.3 se consideró el movimiento de un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un eje fijo. A continuación se examinará el caso más general del movimiento de un cuerpo rígido que tiene un punto fijo O.

En primer lugar se demostrará que *el desplazamiento más general de un cuerpo rígido con un punto fijo O es equivalente a una rotación del cuerpo en torno a un eje que pasa por O.*† En vez de considerar al cuerpo rígido en su totalidad, es posible desprender una esfera del centro O del cuerpo y analizar el movimiento de tal esfera. Queda claro que el movimiento de la esfera caracteriza por completo al movimiento del cuerpo dado. Puesto que son tres los puntos que definen la posición de un sólido en el espacio, el centro O y dos puntos A y B sobre la superficie de la esfera definirán la posición de ésta y, en consecuencia, la posición del cuerpo. Sean A_1 y B_1 las que caractericen la posición de la esfera en un instante determinado, y A_2 y B_2 las que caractericen su posición en un instante posterior (figura 15.31*a*). Como la esfera es rígida, las longitudes de los arcos de mayor círculo A_1B_1 y A_2B_2 deben ser iguales, aunque, salvo por este requerimiento, las posiciones de A_1, A_2, B_1 y B_2 son arbitrarias. Aquí se pretende probar que los puntos A y B pueden trasladarse, respectivamente, desde A_1 y B_1 y hasta A_2 y B_2 mediante una sola rotación de la esfera alrededor de un eje.

Por conveniencia, y sin pérdida de generalidad, se elige el punto B de manera que su posición inicial coincida con la posición inicial de A; de tal modo, $B_1 = A_2$ (figura 15.31*b*). Se trazan los arcos de círculo amplio A_1A_2, A_2B_2 y los arcos que bisecan, respectivamente, A_1A_2 y A_2B_2. Sea C el punto de intersección de estos dos últimos arcos; la estructura se completa al trazar A_1C, A_2C y B_2C. Tal como fue señalado antes, a causa de la rigidez de la esfera, $A_1B_1 = A_2B_2$. Puesto que C es por construcción equidistante desde A_1, A_2 y B_2, se tiene también que $A_1C = A_2C = B_2C$. Como resultado, los triángulos esféricos A_1CA_2 y



a)



b)

Figura 15.31

†Éste se conoce como *teorema de Euler*.

B_1CB_2 son congruentes y los ángulos A_1CA_2 y B_1CB_2 son iguales. Denotando por θ el valor común de estos ángulos, se concluye que la esfera puede llevarse desde su posición inicial hasta su posición final mediante una sola rotación θ alrededor del eje OC.

Se concluye que el movimiento durante el intervalo de tiempo Δt de un cuerpo rígido con un punto fijo O puede considerarse como una rotación $\Delta\theta$ alrededor de cierto eje. Al dibujar a lo largo de ese eje un vector de magnitud $\Delta\theta/\Delta t$ y al dejar que Δt tienda a cero, se obtiene en el límite el *eje de rotación instantáneo* y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo en el instante considerado (figura 15.32). La velocidad de la partícula P del cuerpo puede obtenerse entonces, como en la sección 15.3, formando el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y el vector de posición $\mathbf{r}$ de la partícula:

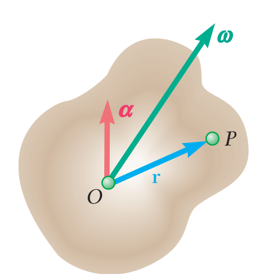


Figura 15.32

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (15.37)$$

La aceleración de la partícula se obtiene diferenciando (15.37) con respecto a t. Como en la sección 15.3, se tiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (15.38)$$

donde la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se define como la derivada

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad (15.39)$$

de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

En el caso del movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ y del eje de rotación instantáneo cambia de un instante a otro. La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ refleja consecuentemente el cambio en dirección de $\boldsymbol{\omega}$, así como su cambio en magnitud y, en general, *no está dirigida a lo largo del eje instantáneo de rotación*. Si bien las partículas del cuerpo ubicadas en el eje de rotación instantáneo tienen velocidad cero en el instante considerado, no tienen aceleración cero. Además, la aceleración de las diversas partículas del cuerpo *no pueden* determinarse como si el cuerpo estuviera rotando de manera permanente alrededor del eje instantáneo.

Si se recuerda la definición de la velocidad de una partícula con vector de posición $\mathbf{r}$, se advierte que la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ como se expresa en (15.39), representa la velocidad de la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$. Esta propiedad tal vez sea útil en la determinación de la aceleración angular de un cuerpo rígido. Por ejemplo, se concluye que el vector $\boldsymbol{\alpha}$ es tangente a la curva descrita en el espacio por la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$.

Observe que el vector $\boldsymbol{\omega}$ se mueve dentro del cuerpo, así como en el espacio. En consecuencia, se generan dos conos denominados, respectivamente, *cono corporal* y *cono espacial* (figura 15.33).[†] Es posible demostrar que en cualquier instante dado los dos conos son tangentes a lo largo del eje de rotación instantáneo, y que conforme se mueve el cuerpo, el cono corporal parece *rodar* sobre el espacial.

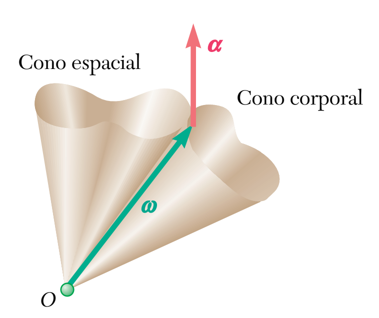


Figura 15.33

[†] Se recuerda que un *cono* es, por definición, una superficie generada por una línea recta que pasa por un punto fijo. En general, los conos considerados aquí *no serán conos circulares.*



Fotografía 15.8 Cuando la escalera gira alrededor de su base fija, es posible obtener su velocidad angular al sumar las velocidades angulares que corresponden a rotaciones simultáneas alrededor de dos ejes diferentes.

Antes de concluir este análisis del movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo, se debe demostrar que las velocidades angulares son en realidad vectores. Como se indicó en la sección 2.3, algunas cantidades, como las *rotaciones finitas* de un cuerpo rígido, tienen magnitud y dirección pero no cumplen con la ley de la suma del paralelogramo; tales cantidades no pueden considerarse como vectores. En contraste, las velocidades angulares (y también las *rotaciones infinitesimales*), como ahora se demostrará, *cumplen* la ley del paralelogramo y, por ello, son cantidades verdaderamente vectoriales.

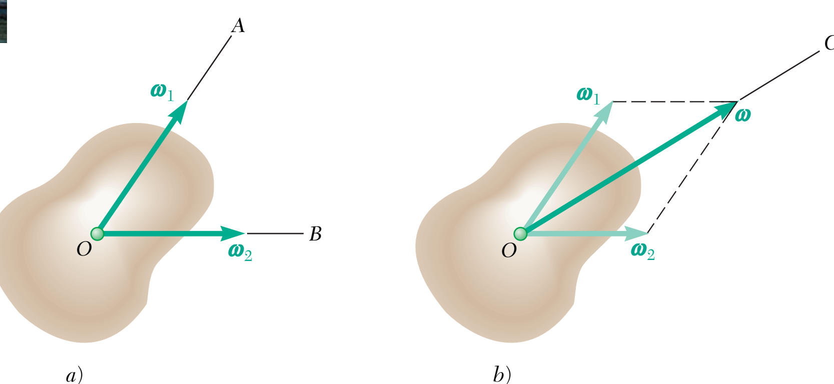


Figura 15.34

Considere un cuerpo rígido con un punto fijo O que en un instante dado rota simultáneamente alrededor de los ejes OA y OB con velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ (figura 15.34*a*). Se sabe que este movimiento debe ser equivalente en el instante considerado a una sola rotación de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Se trata de demostrar que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \tag{15.40}$$

esto es, que la velocidad angular resultante puede obtenerse al sumar $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ mediante la ley del paralelogramo (figura 15.34*b*).

Considere una partícula P del cuerpo, definida por el vector de posición $\mathbf{r}$. Denotando, respectivamente, mediante $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}$ la velocidad de P cuando el cuerpo gira únicamente alrededor del cuerpo OA, únicamente alrededor de OB y alrededor de ambos ejes simultáneamente, se escribe

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \tag{15.41}$$

Pero el carácter vectorial de las velocidades *lineales* está bien establecido (puesto que representan las derivadas de los vectores de posición). Por lo tanto, se tiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

donde el signo más indica suma vectorial. Al sustituir los valores de (15.41), se escribe

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}$$
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}$$

donde el signo más sigue indicando adición vectorial. Puesto que la relación obtenida se cumple para un $\mathbf{r}$ arbitrario, se concluye que (15.40) debe ser cierta.

*15.13. MOVIMIENTO GENERAL

A continuación se considerará el movimiento más general de un cuerpo rígido en el espacio. Sean A y B dos partículas del cuerpo. Hay que recordar de la sección 11.12 que la velocidad de B con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ puede expresarse como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.42}$$

donde $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B relativa al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ fijo en A y de orientación fija (figura 15.35). Puesto que A está fijo en este sistema de referencia, el movimiento del cuerpo relativo a $AX'Y'Z'$ es el movimiento de un cuerpo con un punto fijo. En consecuencia, la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ puede obtenerse de (15.37) después de que $\mathbf{r}$ sea sustituido por el vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativa a A. Al sustituir $\mathbf{v}_{B/A}$ en (15.42), se escribe

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.43}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado.

La aceleración de B se obtiene mediante un razonamiento similar. Se escribe primero

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

y, si se recuerda la ecuación (15.38),

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{15.44}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular del cuerpo en el instante considerado.

Las ecuaciones (15.43) y (15.44) muestran que *el movimiento más general de un cuerpo rígido es equivalente, en cualquier instante dado, a la suma de una traslación,* en el cual todas las partículas del cuerpo tienen la misma velocidad y aceleración que una partícula de referencia A, *y de un movimiento en el que la partícula A se supone fija.*†

Al resolver (15.43) y (15.44) para $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, se demuestra con facilidad que el movimiento del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo a B se caracterizaría por medio de los mismos vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ como en su movimiento con respecto a $AX'Y'Z'$. La velocidad y la aceleración angulares del cuerpo rígido en un instante dado son así independientes de la elección del punto de referencia. Por otro lado, debe tenerse presente que si el sistema de referencia en movimiento está fijo en A o en B, debe mantener una orientación fija; esto es, debe conservarse paralelo al sistema de referencia fijo $OXYZ$ durante todo el movimiento del cuerpo rígido. En muchos problemas resultará más conveniente utilizar un sistema de referencia en movimiento al que se le permita tanto la rotación como la traslación. El uso de este tipo de sistemas de referencia en movimiento se estudiará en las secciones 15.14 y 15.15.

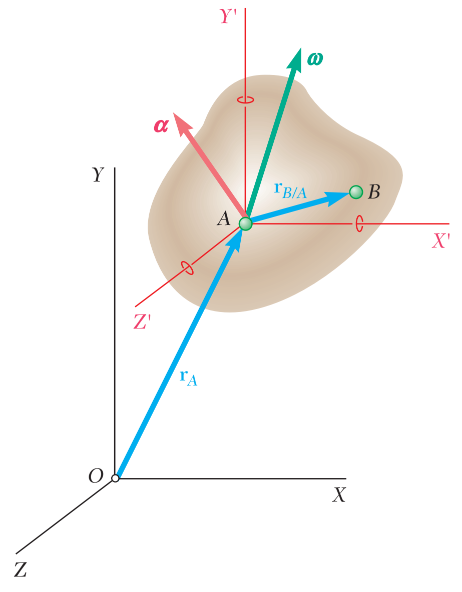
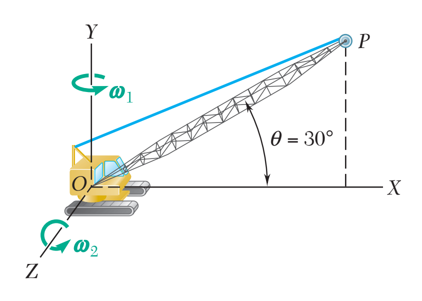


Figura 15.35

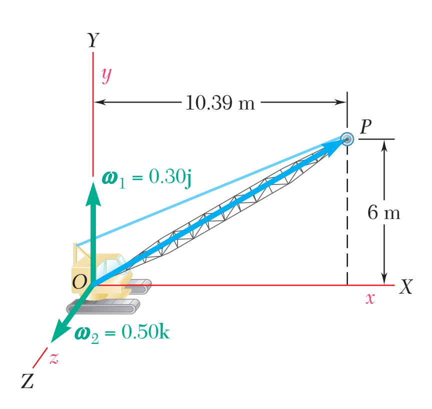
†Hay que recordar de la sección 15.12 que, en general, los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ no son colineales, y que la aceleración de las partículas del cuerpo en su movimiento relativo al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ no puede determinarse como si el cuerpo estuviera rotando permanentemente alrededor del eje instantáneo que pasa por A.



PROBLEMA RESUELTO 15.11

La rueda que se muestra gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 0.30 rad/s. De manera simultánea, se está elevando la pluma con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ de 0.50 rad/s relativa a la cabina. Si la longitud de la pluma OP es $l = 12$ m, determine *a*) la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la pluma, *b*) la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la pluma, *c*) la velocidad $\mathbf{v}$ de la punta de la pluma, *d*) la aceleración $\mathbf{a}$ de la punta de la pluma.

SOLUCIÓN



***a*) Velocidad angular de la pluma.** Al sumar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ de la cabina y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ de la pluma relativa a la cabina, se obtiene la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la pluma en el instante que se considera:

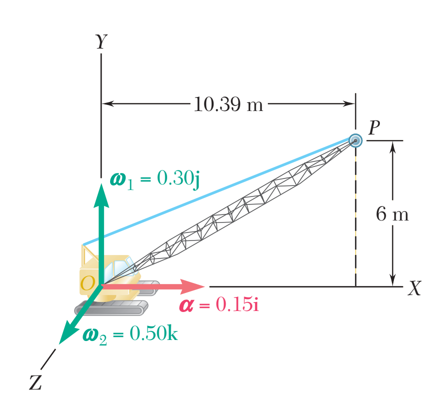
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \qquad \boldsymbol{\omega} = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

***b*) Aceleración angular de la pluma.** La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la pluma se obtiene al diferenciar $\boldsymbol{\omega}$. Puesto que el vector $\boldsymbol{\omega}_1$ es de magnitud y dirección constantes, se tiene

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = 0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2$$

donde la razón de cambio $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ se calcula con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$. Sin embargo, es más conveniente utilizar un sistema de referencia $Oxyz$ fijo a la cabina y que rote con ella, ya que el vector $\boldsymbol{\omega}_2$ también gira con la cabina y, por ello, tiene una razón de cambio cero con respecto a ese sistema de referencia. Al utilizar la ecuación (15.31) con $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}_2$ y $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$, se escribe

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$$
$$(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2$$
$$\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{OXYZ} = 0 + (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = (0.15 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i} \quad \blacktriangleleft$$



***c*) Velocidad de la punta de la pluma.** Al advertir que el vector de posición del punto P es $\mathbf{r} = (10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}$ y al utilizar la expresión que se encontró para $\boldsymbol{\omega}$ en la parte *a*, se escribe

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.30 \text{ rad/s} & 0.50 \text{ rad/s} \\ 10.39 \text{ m} & 6 \text{ m} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v} = -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



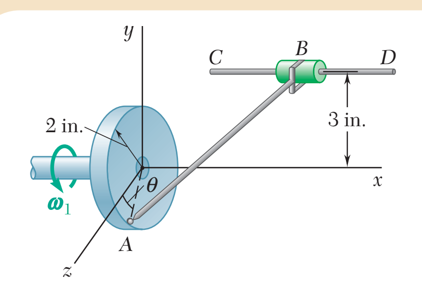
***d*) Aceleración de la punta de la pluma.** Si se recuerda que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, se escribe

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.15 & 0 & 0 \\ 10.39 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.30 & 0.50 \\ -3 & 5.20 & -3.12 \end{vmatrix}$$

$$= 0.90\mathbf{k} - 0.94\mathbf{i} - 2.60\mathbf{i} - 1.50\mathbf{j} + 0.90\mathbf{k}$$

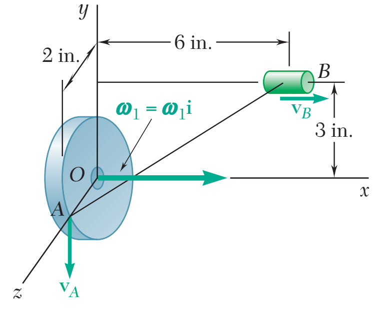
$$\mathbf{a} = -(3.54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



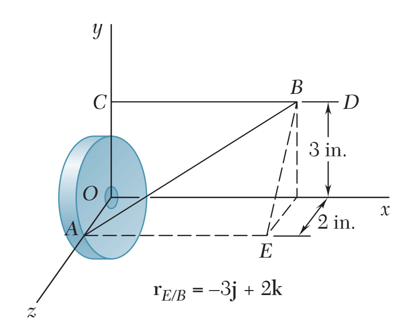
PROBLEMA RESUELTO 15.12

La varilla AB, de 7 in. de longitud, está conectada al disco mediante una articulación de rótula, y al collarín B por medio de una horquilla. El disco gira en el plano yz a una razón constante $\omega_1 = 12$ rad/s, mientras el collarín tiene la libertad de deslizar a lo largo de la varilla horizontal CD. En la posición $\theta = 0$, determine *a*) la velocidad del collarín, *b*) la velocidad angular de la varilla.

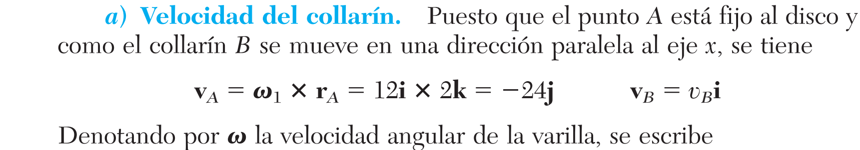
SOLUCIÓN



$\boldsymbol{\omega}_1 = 12\,\mathbf{i}$
$\mathbf{r}_A = 2\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_B = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_{B/A} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$



$\mathbf{r}_{E/B} = -3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$



***a*) Velocidad del collarín.** Puesto que el punto A está fijo al disco y como el collarín B se mueve en una dirección paralela al eje x, se tiene

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A = 12\mathbf{i} \times 2\mathbf{k} = -24\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}_B = v_B\mathbf{i}$$

Denotando por $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular de la varilla, se escribe

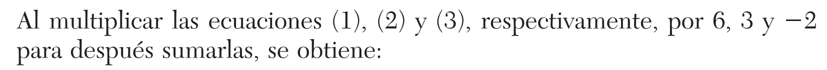
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$v_B\mathbf{i} = -24\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$v_B\mathbf{i} = -24\mathbf{j} + (-2\omega_y - 3\omega_z)\mathbf{i} + (6\omega_z + 2\omega_x)\mathbf{j} + (3\omega_x - 6\omega_y)\mathbf{k}$$

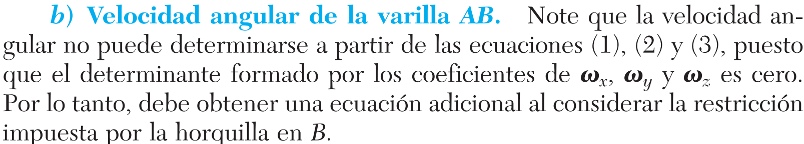
Al igualar los coeficientes de los vectores unitarios, se obtiene

$$v_B = -2\omega_y - 3\omega_z \qquad (1)$$
$$24 = 2\omega_x + 6\omega_z \qquad (2)$$
$$0 = 3\omega_x - 6\omega_y \qquad (3)$$



Al multiplicar las ecuaciones (1), (2) y (3), respectivamente, por 6, 3 y -2 para después sumarlas, se obtiene:

$$6v_B + 72 = 0 \qquad v_B = -12 \qquad \mathbf{v}_B = -(12 \text{ in./s})\mathbf{i} \blacktriangleleft$$



***b*) Velocidad angular de la varilla *AB*.** Note que la velocidad angular no puede determinarse a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3), puesto que el determinante formado por los coeficientes de ω_x, ω_y y ω_z es cero. Por lo tanto, debe obtener una ecuación adicional al considerar la restricción impuesta por la horquilla en B.

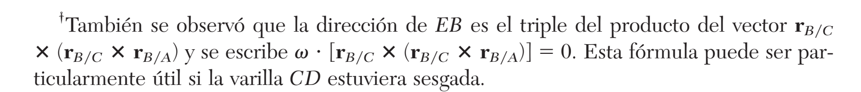
La conexión collarín-horquilla en B permite la rotación de AB alrededor de la varilla CD y también en torno a un eje perpendicular al plano que contiene AB y CD. Esto evita la rotación de AB alrededor del eje EB, que es perpendicular a CD y yace en el plano que contiene a AB y CD. De tal modo la proyección de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\mathbf{r}_{E/B}$ debe ser cero y escribir[†]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{E/B} = 0 \qquad (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 0$$
$$-3\omega_y + 2\omega_z = 0 \qquad (4)$$

Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (1) a (4), se obtiene,

$$v_B = -12 \qquad \omega_x = 3.69 \qquad \omega_y = 1.846 \qquad \omega_z = 2.77$$

$$\boldsymbol{\omega} = (3.69 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (1.846 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (2.77 \text{ rad/s})\mathbf{k} \blacktriangleleft$$



[†]También se observó que la dirección de EB es el triple del producto del vector $\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})$ y se escribe $\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})] = 0$. Esta fórmula puede ser particularmente útil si la varilla CD estuviera sesgada.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se inició el estudio de la *cinemática de cuerpos rígidos en tres dimensiones*. Primero se estudió el *movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo* y luego el *movimiento general de un cuerpo rígido*.

A. Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo. Para analizar el movimiento de un punto B de un cuerpo en rotación alrededor de un punto fijo O, es posible seguir los pasos siguientes:

1. Determinar el vector de posición $\mathbf{r}$ que conecta el punto fijo O con el punto B.

2. Determinar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ ***del cuerpo*** con respecto a un sistema de referencia fijo. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ se obtendrá muchas veces al sumar dos velocidades angulares componentes $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ [problema resuelto 15.11].

3. Calcular la velocidad B utilizando la ecuación

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.37}$$

Su cálculo casi siempre se facilitará si se expresa el producto vectorial como un determinante.

4. Determinar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ ***del cuerpo.*** La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ representa la razón de cambio $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ}$ del vector $\boldsymbol{\omega}$ *con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ* y refleja *un cambio en la magnitud y un cambio en la dirección* de la velocidad angular. Sin embargo, al calcular $\boldsymbol{\alpha}$ se encuentra que es conveniente calcular primero la razón de cambio $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Oxyz}$ de $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia en rotación $Oxyz$ de su elección, y al utilizar la ecuación (15.31) de la lección anterior para obtener $\boldsymbol{\alpha}$. Se escribirá

$$\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Oxyz$ [problema resuelto 15.11].

5. Calcular la aceleración de B utilizando la ecuación

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.38}$$

Observe que el producto vectorial $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ representa la velocidad del punto B que se calculó en el paso 3. Además, el cálculo del primer producto vectorial en (15.38) se facilitará si se expresa este producto en forma de determinante. Recuerde que, como en el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido, el eje de rotación instantáneo *no puede* utilizarse para determinar aceleraciones.

B. Movimiento general de un cuerpo rígido. El movimiento general de un cuerpo rígido puede considerarse como *la suma de una traslación y una rotación.* Tome en cuenta lo siguiente:

a) En la parte de traslación del movimiento, todos los puntos del cuerpo tienen la *misma velocidad* $\mathbf{v}_A$ *y la misma aceleración* $\mathbf{a}_A$ que el punto A del cuerpo que se ha elegido como el punto de referencia.

b) En la parte de rotación del movimiento se supone que el mismo punto de referencia A es un *punto fijo*.

1. Para determinar la velocidad de un punto B del cuerpo rígido cuando se conoce la velocidad $\mathbf{v}_A$ del punto de referencia A y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, simplemente se suma $\mathbf{v}_A$ a la velocidad $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ de B en su rotación alrededor de A:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (15.43)$$

Como se indicó antes, el cálculo del producto vectorial casi siempre se facilitará si se expresa en forma de determinante.

La ecuación (15.43) también se puede utilizar para determinar la magnitud de $\mathbf{v}_B$ cuando se conoce su dirección, incluso si se desconoce $\boldsymbol{\omega}$. Si bien las tres ecuaciones escalares correspondientes son linealmente dependientes y las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ no están determinadas, éstas pueden eliminarse y es posible encontrar $\mathbf{v}_A$ utilizando una combinación lineal apropiada de las tres ecuaciones [problema resuelto 15.12, parte *a*]. De manera alternativa, es factible asignar un valor arbitrario a una de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y resolver las ecuaciones para $\mathbf{v}_A$. Sin embargo, es necesario buscar una ecuación adicional para determinar los valores verdaderos de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ [problema resuelto 15.12, parte *b*].

2. Para determinar la aceleración de un punto B del cuerpo rígido cuando se conoce la aceleración $\mathbf{a}_A$ del punto de referencia A y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo, simplemente se suma $\mathbf{a}_A$ a la aceleración de B en su rotación en torno a A, como se expresa mediante la ecuación (15.38):

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad (15.44)$$

Observe que el producto vectorial $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ representa la velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ de B relativa a A y es posible que ya se haya calculado como parte del cálculo de $\mathbf{v}_B$. También es importante recordar que el cálculo de los otros dos productos vectoriales se facilitará si se expresan estos productos en forma de determinante.

También es posible utilizar las tres ecuaciones escalares asociadas con la ecuación (15.44) para determinar la magnitud de $\mathbf{a}_B$ cuando se conoce su dirección, incluso si se desconocen $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$. Si bien las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ están indeterminadas, se pueden asignar valores arbitrarios a una de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y a una de las componentes de $\boldsymbol{\alpha}$ y resolver la ecuación para $\mathbf{a}_B$.

Problemas

15.184 La placa *ABD* y la varilla *OB* están rígidamente conectadas y giran alrededor de la junta de rótula *O* con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_x\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Si se sabe que $\mathbf{v}_A = (3 \text{ in./s})\mathbf{i} + (14 \text{ in./s})\mathbf{j} + (v_A)_z\mathbf{k}$ y $\omega_x = 1.5$ rad/s, determine *a*) la velocidad angular del ensamble, *b*) la velocidad del punto *D*.

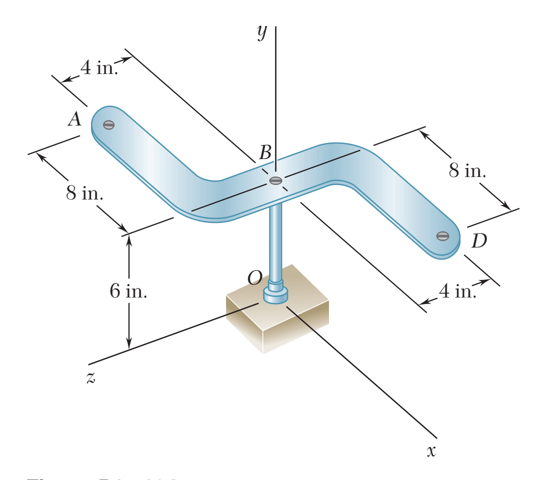


Figura P15.184

15.185 Retome el problema 15.184, y ahora suponga que $\omega_x = -1.5$ rad/s.

15.186 En el instante considerado, la antena de radar gira alrededor del origen de coordenadas con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Si se sabe que $(v_A)_y = 300$ mm/s, $(v_B)_y = 180$ mm/s y $(v_B)_z = 360$ mm/s, determine *a*) la velocidad angular de la antena, *b*) la velocidad del punto *A*.

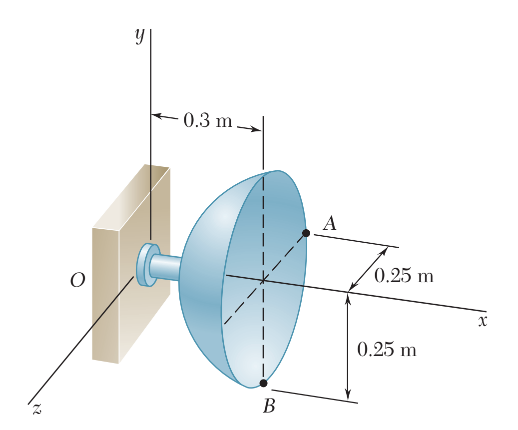


Figura P15.186 y P15.187

15.187 En el instante considerado, la antena de radar gira alrededor del origen de coordenadas con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Si se sabe que $(v_A)_x = 100$ mm/s, $(v_A)_y = -90$ mm/s y $(v_B)_z = 120$ mm/s, determine *a*) la velocidad angular de la antena, *b*) la velocidad del punto *A*.

15.188 Las aspas de un ventilador oscilante giran con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1 = -(360 \text{ rpm})\mathbf{i}$ con respecto a la carcasa del motor. Determine la aceleración angular de las aspas, si se sabe que en el instante indicado la velocidad y la aceleración angulares de la carcasa del motor son, respectivamente, $\boldsymbol{\omega}_2 = -(2.5 \text{ rpm})\mathbf{j}$ y $\boldsymbol{\alpha}_2 = 0$.

15.189 El rotor de un motor eléctrico gira a la razón constante $\omega_1 = 1800$ rpm. Determine la aceleración angular del rotor cuando el motor gira alrededor del eje *y* con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ de 6 rpm, en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se ve desde el eje positivo *y*.

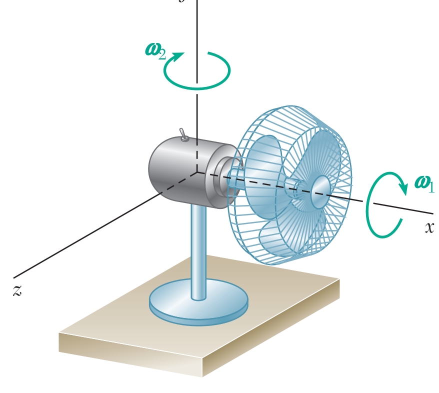


Figura P15.188

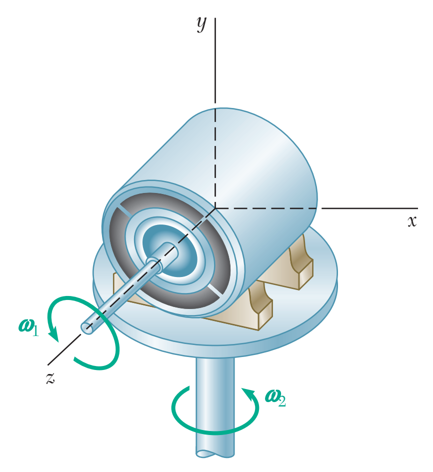


Figura P15.189

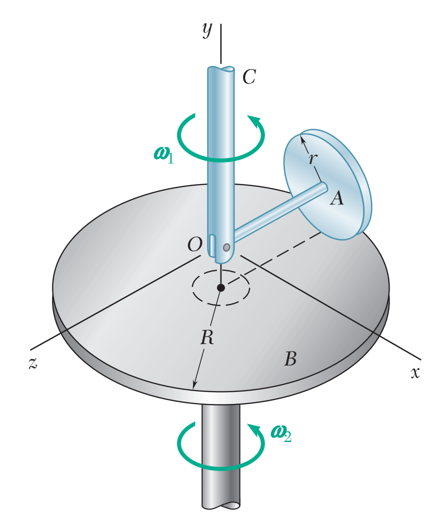


Figura P15.190 y *P15.191*

15.190 En el sistema mostrado, el disco *A* puede girar libremente alrededor de la varilla horizontal *OA*. Si se supone que el disco *B* es estacionario ($\omega_2 = 0$), y que el eje *OC* gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$, determine *a*) la velocidad angular del disco *A*, *b*) la aceleración angular del disco *A*.

15.191 En el sistema mostrado, el disco *A* puede girar libremente alrededor de la varilla horizontal *OA*. Si se supone que el eje *OC* y el disco *B* giran con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$, respectivamente, ambos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) la velocidad angular del disco *A*, *b*) la aceleración angular del disco *A*.

15.192 El brazo *BCD* en forma de L gira alrededor del eje *z* con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 5 rad/s. Si se sabe que el disco de 150 mm de radio gira alrededor de *BC* con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ de 4 rad/s, determine la aceleración angular del disco.

15.193 En el problema 15.192 determine *a*) la velocidad del punto *A*, *b*) la aceleración del punto *A*.

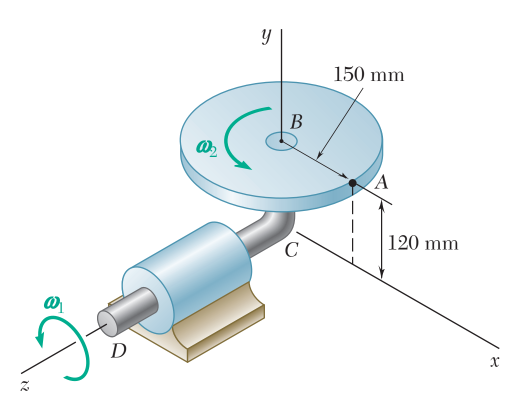


Figura *P15.192*

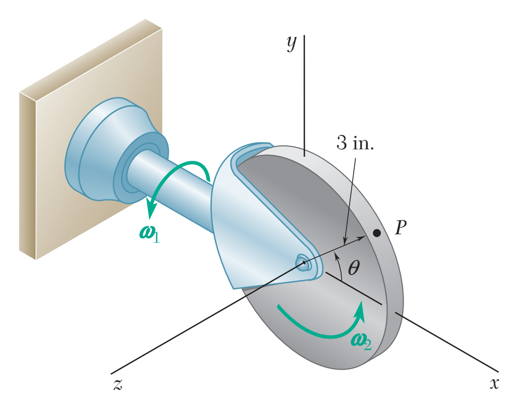


Figura P15.194 y P15.195

15.194 Un disco de 3 in. de radio gira a una velocidad constante $\omega_2 = 4$ rad/s alrededor de un eje que se sostiene mediante un soporte sujeto a una barra horizontal que gira a la velocidad constante $\omega_1 = 5$ rad/s. Para la posición que se indica, determine *a*) la aceleración angular del disco, *b*) la aceleración del punto *P* sobre el borde del disco si $\theta = 0$ y *c*) la aceleración del punto *P* sobre el borde del disco si $\theta = 90°$.

15.195 Un disco de 3 in. de radio gira a una velocidad constante $\omega_2 = 4$ rad/s alrededor de un eje que se sostiene mediante un soporte sujeto a una barra horizontal que gira a la velocidad constante $\boldsymbol{\omega}_1 = 5$ rad/s. Si se sabe que $\theta = 30°$, determine la aceleración del punto *P* sobre el borde del disco.

15.196 Un cañón de longitud $OP = 4$ m se monta sobre una torreta como se muestra. Para mantener el cañón apuntando hacia un blanco móvil, el ángulo azimutal β se está incrementando a razón de $d\beta/dt = 30°/\text{s}$ y el ángulo de elevación γ se aumenta a razón de $d\gamma/dt = 10°/\text{s}$. Para la posición $\beta = 90°$ y $\gamma = 30°$, determine *a*) la velocidad angular del barril, *b*) la aceleración angular del barril y *c*) la velocidad y la aceleración del punto *P*.

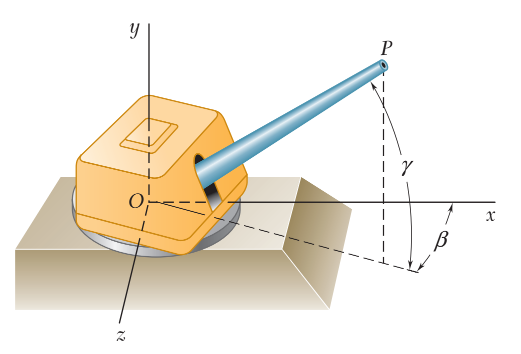


Figura P15.196

15.197 En el sistema de engranes planetarios que se muestra, los engranes *A* y *B* se conectan rígidamente entre sí y giran como una unidad alrededor de la flecha inclinada. Los engranes *C* y *D* giran con velocidades angulares constantes de 30 y 20 rad/s, respectivamente (ambos en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observan desde la derecha). Si se elige el eje *x* hacia la derecha, el eje *y* hacia arriba y el eje *z* apuntando hacia fuera del plano de la figura, determine *a*) la velocidad angular común de los engranes *A* y *B*, *b*) la velocidad angular de la flecha *FH*, que está unida rígidamente a la flecha inclinada.

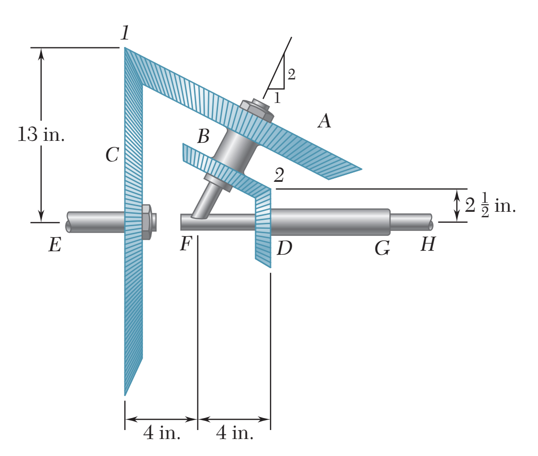


Figura *P15.197*

15.198 Una rueda de 30 mm de radio se monta sobre un eje *OB* de 100 mm de longitud. La rueda gira sin deslizarse sobre el suelo horizontal, y el eje es perpendicular al plano de la rueda. Si el sistema gira alrededor del eje y a una velocidad constante $\omega_1 = 2.4$ rad/s, determine *a*) la velocidad angular de la rueda, *b*) la aceleración angular de la rueda, *c*) la aceleración del punto *C* localizado en el punto más alto del borde de la rueda.

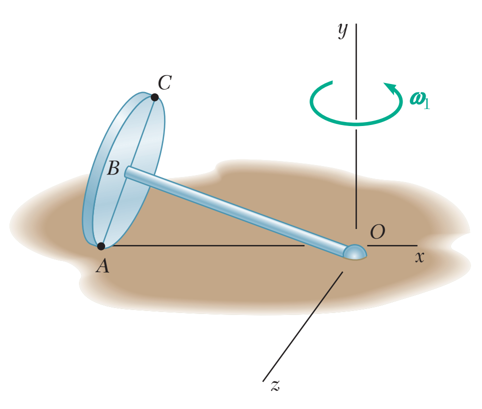


Figura P15.198

15.199 Varias barras se sueldan para formar el brazo guía robótico que se muestra en la figura, el cual está unido a una junta de rótula en *O*. La barra *OA* se desliza en una ranura inclinada recta mientras que la barra *OB* se desliza en una ranura paralela al eje *z*. Si se sabe que en el instante mostrado $\mathbf{v}_B = (180 \text{ mm/s})\mathbf{k}$, determine *a*) la velocidad angular del brazo guía, *b*) la velocidad del punto *A*, *c*) la velocidad del punto *C*.

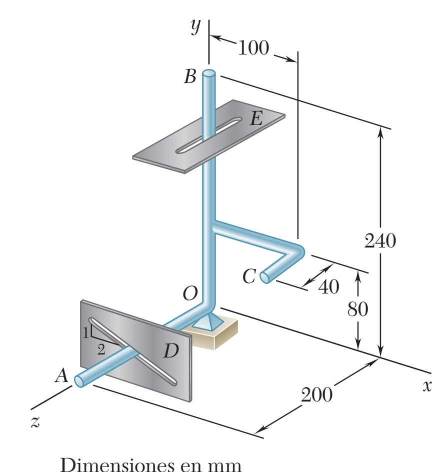


Figura P15.199

15.200 En el problema 15.199, se sabe que la rapidez del punto *B* es constante. Para la posición mostrada, determine *a*) la aceleración angular del brazo guía, *b*) la aceleración del punto *C*.

15.201 El sector de 45° de una placa circular con 10 in. de radio está unido a una junta de rótula fija en *O*. Cuando el borde *OA* se mueve sobre la superficie horizontal, el borde *OB* se mueve a lo largo de la pared vertical. Si el punto *A* se mueve a una velocidad constante de 60 in./s, determine para la posición mostrada *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad del punto *B*.

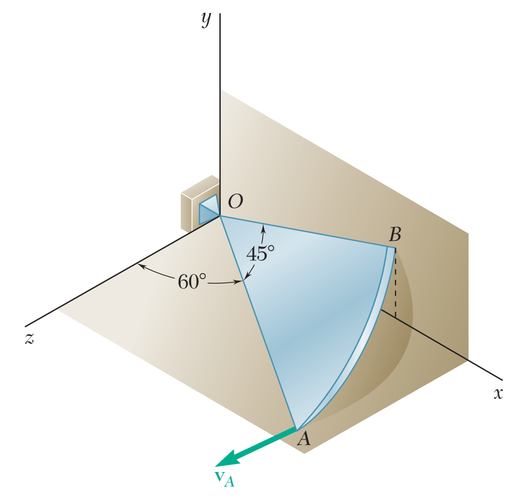


Figura P15.201

15.202 La varilla *AB* de 275 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines *A* y *B*, los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas que se muestran. Si el collarín *B* se mueve hacia el origen *O* a una velocidad constante de 180 mm/s, determine la velocidad del collarín *A* cuando $c = 175$ mm.

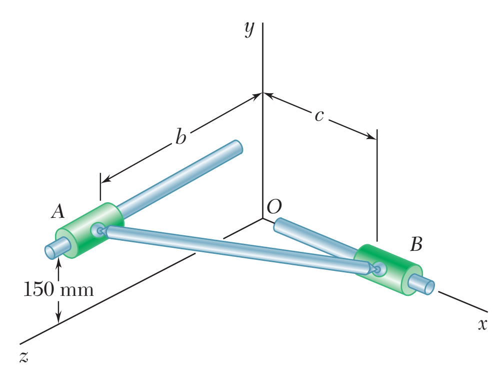


Figura P15.202 y P15.203

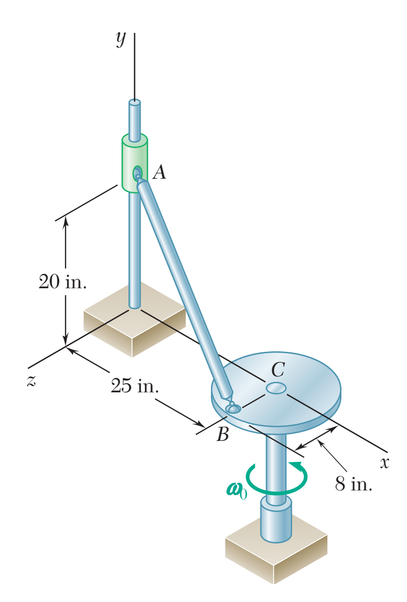


Figura P15.204

15.203 La varilla AB de 275 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B, los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas que se muestran. Si se sabe que el collarín B se aleja del origen O a una velocidad constante de 180 mm/s, determine la velocidad del collarín A cuando $c = 50$ mm.

15.204 La varilla AB se conecta mediante uniones de rótula al collarín A y al disco C de 16 in. de diámetro. Si se sabe que el disco C gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una razón constante $\omega_0 = 3$ rad/s en el plano zx, determine la velocidad del collarín A para la posición mostrada.

15.205 La varilla AB de 29 in. de longitud se conecta mediante juntas de rótula a la manivela giratoria BC y al collarín A. La manivela BC tiene 8 in. de longitud y gira en el plano horizontal xy a razón constante $\omega_0 = 10$ rad/s. En el instante mostrado, cuando la manivela BC está paralela al eje z, determine la velocidad del collarín A.

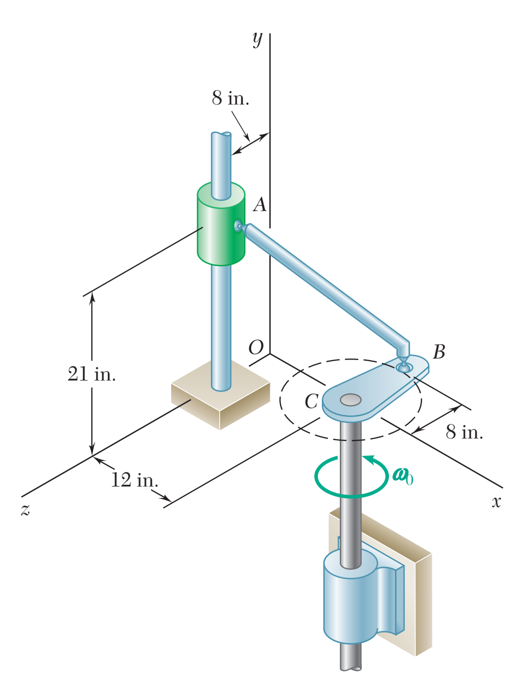


Figura P15.205

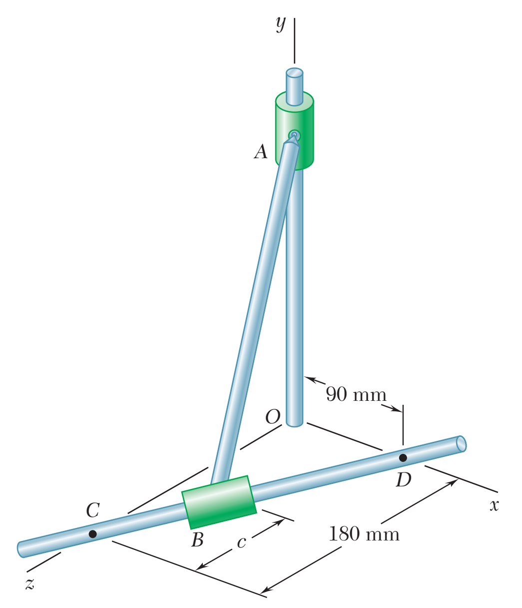


Figura P15.206 y P15.207

15.206 La varilla AB de 300 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B, los cuales se deslizan a lo largo de las dos barras mostradas. Si el collarín B se mueve hacia el punto D a una velocidad constante de 50 mm/s, determine la velocidad del collarín A cuando $c = 80$ mm.

15.207 La varilla AB de 300 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B, los cuales se deslizan a lo largo de las dos barras mostradas. Si el collarín B se mueve hacia el punto D a una velocidad constante de 50 mm/s, determine la velocidad del collarín A cuando $c = 120$ mm.

15.208 La varilla AB de 25 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B, los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas como se indica. Si el collarín B se mueve hacia el punto E a una velocidad constante de 20 in./s, determine la velocidad del collarín A cuando el collarín B pasa por el punto D.

15.209 La varilla AB de 25 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B, los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas como se indica. Si el collarín B se mueve hacia el punto E a una rapidez constante de 20 in./s, determine la velocidad del collarín A cuando el collarín B pasa por el punto C.

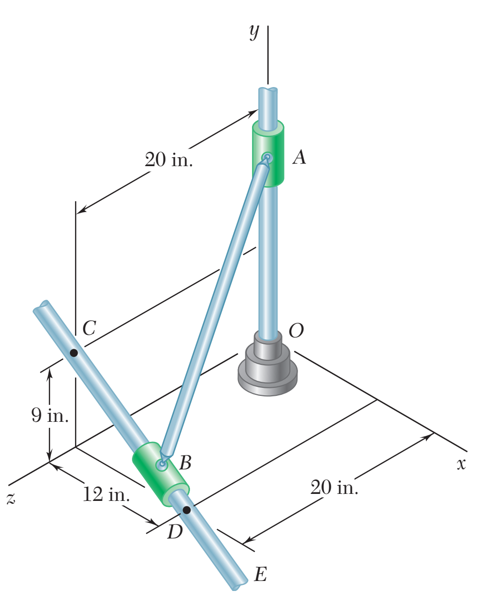


Figura *P15.208* y *P15.209*

15.210 Dos ejes AC y EG, que se encuentran en el plano vertical yz, se conectan mediante una junta universal en D. El eje AC gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ en la forma indicada. En el momento en que el brazo de la cruceta conectada a la flecha AC está en posición vertical, determine la velocidad angular de la flecha EG.

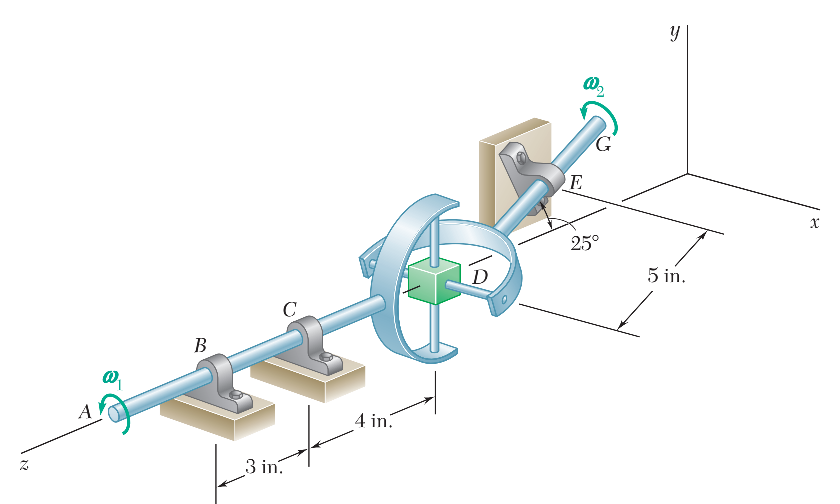
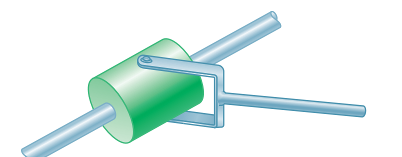


Figura P15.210

15.211 Retome el problema 15.210, y ahora suponga que el brazo de la cruceta conectada a la flecha AC está en posición horizontal.

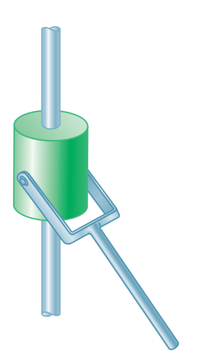

Figura P15.212

15.212 En el problema 15.203, la unión de rótula entre la varilla y el collarín A se reemplaza por la horquilla mostrada. Determine *a*) la velocidad angular de la varilla, *b*) la velocidad del collarín A.

15.213 En el problema 15.204, la unión de rótula entre la varilla y el collarín A se reemplaza por la horquilla mostrada. Determine *a*) la velocidad angular de la varilla, *b*) la velocidad del collarín A.

15.214 a 15.219 Para el mecanismo del problema indicado, determine la aceleración del collarín A.

15.214 Mecanismo del problema 15.202.
15.215 Mecanismo del problema 15.203.
15.216 Mecanismo del problema 15.204.
15.217 Mecanismo del problema 15.205.
15.218 Mecanismo del problema 15.206.
15.219 Mecanismo del problema 15.207.


Figura P15.213

*15.14. MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UNA PARTÍCULA CON RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN. ACELERACIÓN DE CORIOLIS

En la sección 15.10 se analizó una función vectorial $\mathbf{Q}(t)$ y dos sistemas de referencia centrados en O —un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y uno rotatorio $Oxyz$— las razones de cambio de $\mathbf{Q}$ con respecto a los dos sistemas de referencia satisfacen la relación

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

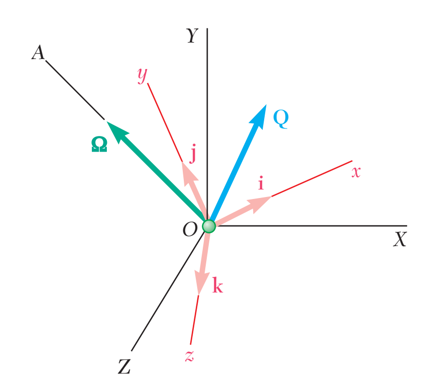


Figura 15.36

En esa ocasión se supuso que el sistema de referencia $Oxyz$ estaba restringido a girar alrededor del eje fijo OA. Sin embargo, la deducción que se presentó en la sección 15.10 sigue siendo válida cuando el sistema de referencia $Oxyz$ se restringe únicamente a tener un punto fijo O. De acuerdo con esta suposición más general, el eje OA representa al eje de rotación *instantáneo* del sistema de referencia $Oxyz$ (sección 15.12) y el vector $\boldsymbol{\Omega}$ representa su velocidad angular en el instante considerado (figura 15.36).

Se considerará ahora el movimiento tridimensional de una partícula P relativa al sistema de referencia en rotación $Oxyz$ restringido a tener un origen fijo O. Sean $\mathbf{r}$ el vector de posición de P en un instante dado y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema de referencia $Oxyz$ con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ en el mismo instante (figura 15.37). Las deducciones dadas en la sección 15.11 para los dos movimientos bidimensionales de una partícula pueden ampliarse con facilidad al caso en tres dimensiones, y la velocidad absoluta $\mathbf{v}_P$ de P (esto es, su velocidad con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$) se puede expresar como

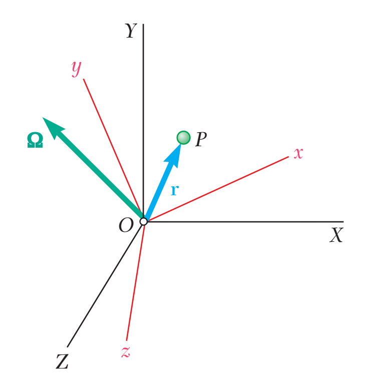


Figura 15.37

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \tag{15.45}$$

Si se denota por $\mathcal{F}$ el sistema rotatorio $Oxyz$, se escribe esta relación en la forma alternativa

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$

donde $\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de la partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de P puede expresarse como

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \tag{15.47}$$

Una forma alternativa es

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.48}$$

donde $\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P

$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$

$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleración complementaria, o de Coriolis†

Observe que la aceleración de Coriolis es perpendicular a los vectores $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Sin embargo, puesto que estos vectores no suelen ser perpendiculares entre sí, la magnitud de $\mathbf{a}_c$ *no* es en general igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$, como lo fue en el caso del movimiento plano de una partícula. Note también que la aceleración de Coriolis se reduce a cero cuando los vectores $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son paralelos, o cuando cualquiera de ellos es cero.

Los sistemas de referencia en rotación son particularmente útiles en el estudio del movimiento tridimensional de cuerpos rígidos. Si un cuerpo rígido tiene un punto fijo O, como fue el caso de la grúa del problema resuelto 15.11, se puede utilizar el sistema de referencia $Oxyz$ que no está ni fijo ni conectado de manera rígida al cuerpo rígido. Al denotar mediante $\mathbf{\Omega}$ la velocidad angular del sistema de referencia $Oxyz$, se descompone entonces la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo en las componentes $\mathbf{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}}$, donde la segunda componente representa la velocidad angular del cuerpo relativa al sistema de referencia $Oxyz$ (véase el problema resuelto 15.14). Una elección apropiada del sistema de referencia en rotación conduce muchas veces a un análisis más simple del movimiento del cuerpo rígido que lo que sería posible con ejes de orientación fija. Esto es en especial cierto en el caso del movimiento tridimensional general de un cuerpo rígido, es decir, cuando el cuerpo rígido que se estudia no tiene ningún punto fijo (problema resuelto 15.15).

*15.15. SISTEMA DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO GENERAL

Considere un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y un sistema de referencia $Axyz$ que se mueve de una manera conocida, aunque arbitraria, con respecto a $OXYZ$ (figura 15.38). Sea P una partícula que se mueve en el espacio. La posición de P se define en cualquier instante mediante el vector $\mathbf{r}_P$ en el sistema de referencia fijo, y mediante el vector $\mathbf{r}_{P/A}$ en el sistema de referencia en movimiento. Al denotar por $\mathbf{r}_A$ el vector de posición de A en el sistema de referencia fijo, se tiene

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A} \qquad (15.49)$$

La velocidad absoluta $\mathbf{v}_P$ de la partícula se obtiene al escribir

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{P/A} \qquad (15.50)$$

donde las derivadas se definen con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$. El primer término en el miembro del lado derecho (15.50) representa entonces la velocidad $\mathbf{v}_A$ del origen A de los ejes en movimiento. Por otro lado, puesto que la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y con referencia a uno en traslación (sección 11.10), el segundo término puede considerarse como la velocidad $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ de la misma orientación que $OXYZ$ y el mismo origen que $Axyz$. Por lo tanto, se tiene

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} \qquad (15.51)$$

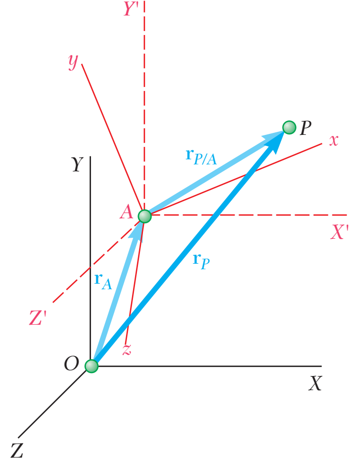


Figura 15.38

†Es importante advertir la diferencia entre la ecuación (15.48) y la ecuación (15.21) de la sección 15.8. Véase el pie de la página 978.

Pero la velocidad $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa a $AX'Y'Z'$ se obtiene de (15.45) al sustituir $\mathbf{r}_{P/A}$ en vez de $\mathbf{r}$ en esa ecuación. Se escribe

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \qquad (15.52)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de referencia $Axyz$ en el instante considerado.

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de la partícula se obtiene al diferenciar (15.51) y al escribir

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{v}}_{P/A} \qquad (15.53)$$

donde las derivadas se definen con respecto a cualquiera de los sistemas de referencia $OXYZ$ o $AX'Y'Z'$. De tal modo, el primer término del miembro del lado derecho de (15.53) representa la aceleración $\mathbf{a}_A$ del origen A de los ejes en movimiento, y el segundo término, la aceleración $\mathbf{a}_{P/A}$ de P relativa al sistema de referencia $AX'Y'Z'$. Esta aceleración puede obtenerse de (15.47) al sustituir $\mathbf{r}_{P/A}$ en lugar de $\mathbf{r}$. En consecuencia, se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \qquad (15.54)$$



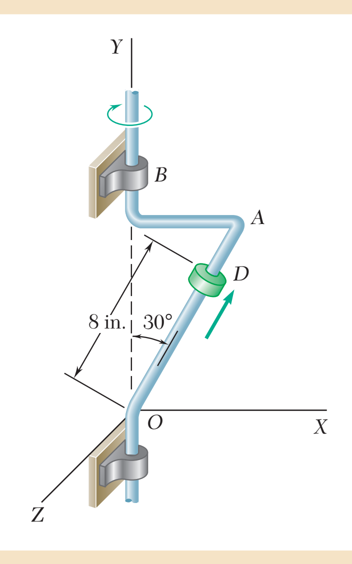
Fotografía 15.9 El movimiento de las partículas de aire en un huracán puede considerarse como el movimiento relativo a un sistema de referencia montado sobre la Tierra y que gira con ella.

Las fórmulas (15.52) y (15.54) posibilitan la determinación de la velocidad y la aceleración de una partícula dada con respecto a un sistema de referencia fijo, cuando se conoce el movimiento de la partícula con respecto al sistema de referencia en movimiento. Estas fórmulas se volverán más importantes, y bastante más fáciles de recordar, si advertimos que la suma de los dos primeros términos en (15.52) representan la velocidad del punto P' del sistema de referencia en movimiento que coincide con P en el instante considerado, y que la suma de los primeros tres términos en (15.54) representa la aceleración del mismo punto. Por consiguiente, las relaciones (15.46) y (15.48) de la sección anterior siguen siendo válidas en el caso de un sistema de referencia en movimiento general, y es posible escribir

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \qquad (15.46)$$
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.48)$$

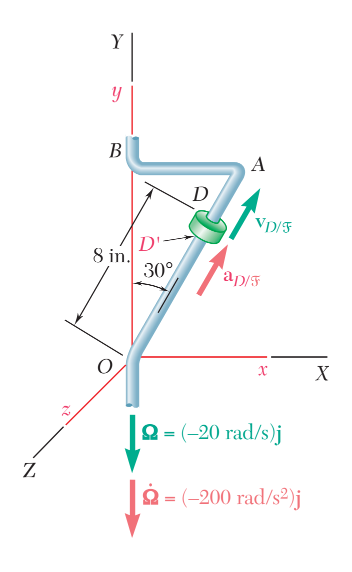
donde los diversos vectores implicados han sido definidos en la sección 15.14.

Hay que observar que si el sistema de referencia $\mathcal{F}$ (o $Axyz$) están en traslación, la velocidad y aceleración del punto P' del sistema de referencia que coincide con P se vuelve, respectivamente, igual a la velocidad y la aceleración del origen A del sistema de referencia. Por otro lado, puesto que el sistema de referencia mantiene una orientación fija, $\mathbf{a}_c$ es cero, y las relaciones (15.46) y (15.48) se reducen, en forma respectiva, a las relaciones (11.33) y (11.34) deducidas en la sección 11.12.



PROBLEMA RESUELTO 15.13

La barra doblada *OAB* gira alrededor del eje vertical *OB*. En el instante considerado, su velocidad y aceleración angulares son, respectivamente, 20 rad/s y 200 rad/s^2, ambas en el sentido de las manecillas del reloj cuando se observan desde el eje *Y* positivo. El collarín *D* se mueve a lo largo de la barra, y en el instante considerado, $OD = 8$ in. La velocidad y la aceleración del collarín relativas a la barra son, respectivamente, 50 in./s y 600 in./s^2, ambas hacia arriba. Determine *a*) la velocidad del collarín, *b*) la aceleración del collarín.



SOLUCIÓN

Sistemas de referencia. El sistema de referencia *OXYZ* está fijo. Se conecta el sistema de referencia en rotación *Oxyz* a la barra doblada. En consecuencia, su velocidad y aceleración angulares relativas a *OXYZ* son $\mathbf{\Omega} = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ y $\dot{\mathbf{\Omega}} = (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$, respectivamente. El vector de posición de *D* es

$$\mathbf{r} = (8 \text{ in.})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (4 \text{ in.})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in.})\mathbf{j}$$

***a*) Velocidad $\mathbf{v}_D$.** Denotando por D' el punto de la barra que coincide con *D* y por $\mathcal{F}$ el sistema de referencia en rotación *Oxyz*, se escribe de acuerdo con la ecuación (15.46)

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{D'} + \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \qquad (1)$$

donde

$$\mathbf{v}_{D'} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(4 \text{ in.})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in.})\mathbf{j}] = (80 \text{ in./s})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} = (50 \text{ in./s})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (25 \text{ in./s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in./s})\mathbf{j}$$

Al sustituir los valores que se obtienen para $\mathbf{v}_{D'}$ y $\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}}$ en (1), se encuentra

$$\mathbf{v}_D = (25 \text{ in./s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in./s})\mathbf{j} + (80 \text{ in./s})\mathbf{k} \quad ◀$$

***b*) Aceleración $\mathbf{a}_D$.** De acuerdo con la ecuación (15.48) se escribe

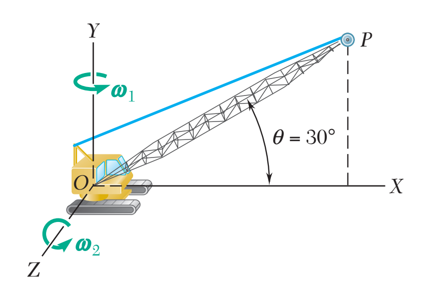
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{D'} + \mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (2)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{D'} &= \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \\
&= (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j} \times [(4 \text{ in.})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in.})\mathbf{j}] - (20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (80 \text{ in./s})\mathbf{k} \\
&= +(800 \text{ in./s}^2)\mathbf{k} - (1\,600 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} \\
\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} &= (600 \text{ in./s}^2)(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (300 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} \\
\mathbf{a}_c &= 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \\
&= 2(-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(25 \text{ in./s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in./s})\mathbf{j}] = (1\,000 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

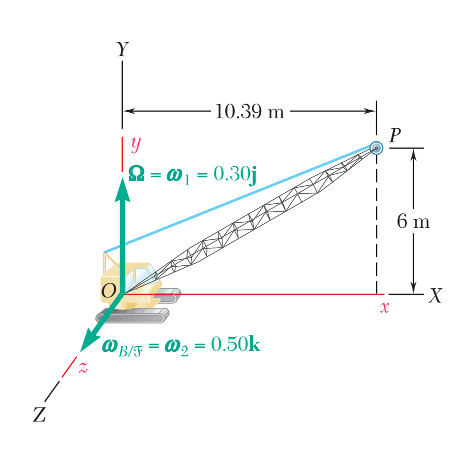
Al sustituir los valores que se obtienen para $\mathbf{a}_{D'}$, $\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}}$ y $\mathbf{a}_c$ en (2),

$$\mathbf{a}_D = -(1\,300 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (1\,800 \text{ in./s}^2)\mathbf{k} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 15.14

La grúa que se muestra gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 0.30 rad/s. De manera simultánea, la pluma se levanta con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ de 0.50 rad/s relativa a la cabina. Si se sabe que la longitud de la pluma *OP* es $l = 12$ m, determine *a*) la velocidad de la punta de la pluma, *b*) la aceleración de la punta de la pluma.



SOLUCIÓN

Sistemas de referencia. El sistema de referencia *OXYZ* está fijo. Se coloca el sistema de referencia en rotación *Oxyz* en la cabina. Su velocidad angular con respecto al sistema de referencia *OXYZ* es entonces $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j}$. La velocidad angular de la pluma relativa a la cabina y el sistema de referencia en rotación *Oxyz* (o $\mathcal{F}$, abreviado) es $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_2 = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

***a*) Velocidad $\mathbf{v}_P$.** De la ecuación (15.46) se escribe

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \qquad (1)$$

donde $\mathbf{v}_{P'}$ es la velocidad del punto P' del sistema de referencia en rotación que coincide con *P*:

$$\mathbf{v}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] = -(3.12 \text{ m/s})\mathbf{k}$$

y donde $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ es la velocidad de *P* relativa al sistema de referencia en rotación *Oxyz*. Pero se encontró que la velocidad angular de la pluma relativa a *Oxyz* es $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$. La velocidad de su punta *P* relativa a *Oxyz* es entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} \times \mathbf{r} &= (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [(10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] \\ &= -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Al sustituir los valores que se obtuvieron para $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ en (1), se encuentra

$$\mathbf{v}_P = -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

***b*) Aceleración $\mathbf{a}_P$.** De la ecuación (15.48) se escribe

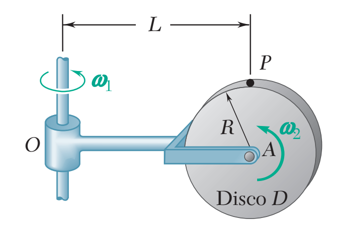
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (2)$$

Puesto que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}}$ son ambas constantes, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{P'} &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (-3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} = -(0.94 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} &= \boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} \times (\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}) \\ &= (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}] \\ &= -(1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (2.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \\ &= 2(0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}] = (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

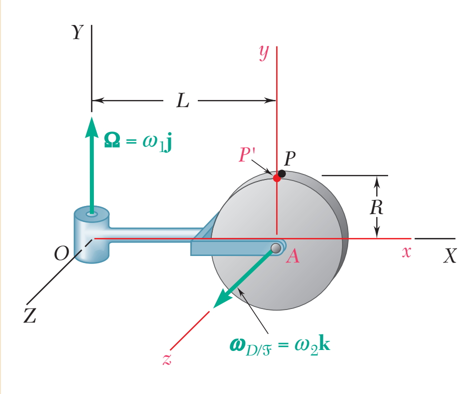
Al sustituir $\mathbf{a}_{P'}$, $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ y $\mathbf{a}_c$ en (2), se encontró

$$\mathbf{a}_P = -(3.54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 15.15

El disco D, de radio R, se monta por medio de un pasador al extremo A del brazo OA de longitud L ubicado en el plano del disco. El brazo gira alrededor de O en un eje vertical a la velocidad constante $\boldsymbol{\omega}_1$, y el disco gira alrededor de A a la velocidad constante $\boldsymbol{\omega}_2$. Determine *a*) la velocidad del punto P localizado directamente arriba de A, *b*) la aceleración de P, *c*) la velocidad y la aceleración angulares del disco.



SOLUCIÓN

Sistemas de referencia. El sistema de referencia $OXYZ$ está fijo. Se coloca el sistema de referencia en movimiento $Axyz$ al brazo OA. Por consiguiente, su velocidad angular con respecto al sistema de referencia $OXYZ$ es $\boldsymbol{\Omega} = \omega_1\mathbf{j}$. La velocidad angular del disco D relativa al sistema de referencia en movimiento $Axyz$ (o $\mathcal{F}$, abreviado) es $\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} = \omega_2\mathbf{k}$. El vector de posición de P relativo a O es $\mathbf{r} = L\mathbf{i} + R\mathbf{j}$, y su vector de posición relativo a A es $\mathbf{r}_{P/A} = R\mathbf{j}$.

***a*) Velocidad $\mathbf{v}_P$.** Denotando por P' el punto del sistema de referencia en movimiento que coincide con P, escribimos de la ecuación (15.46)

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{1}$$

donde $\mathbf{v}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \omega_1\mathbf{j} \times (L\mathbf{i} + R\mathbf{j}) = -\omega_1 L\mathbf{k}$

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A} = \omega_2\mathbf{k} \times R\mathbf{j} = -\omega_2 R\mathbf{i}$$

Al sustituir los valores que se obtuvieron para $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ en (1), se encuentra

$$\mathbf{v}_P = -\omega_2 R\mathbf{i} - \omega_1 L\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

***b*) Aceleración $\mathbf{a}_P$.** De la ecuación (15.48) se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{2}$$

Puesto que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}}$ son ambas constantes, se tiene

$$\mathbf{a}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \omega_1\mathbf{j} \times (-\omega_1 L\mathbf{k}) = -\omega_1^2 L\mathbf{i}$$
$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times (\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A}) = \omega_2\mathbf{k} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = -\omega_2^2 R\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = 2\omega_1\mathbf{j} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = 2\omega_1\omega_2 R\mathbf{k}$$

Si se sustituyen los valores obtenidos en (2), se obtiene

$$\mathbf{a}_P = -\omega_1^2 L\mathbf{i} - \omega_2^2 R\mathbf{j} + 2\omega_1\omega_2 R\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

***c*) Velocidad y aceleración angulares del disco.**

$$\omega = \Omega + \omega_{D/\mathcal{F}} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{j} + \omega_2\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Utilizando la ecuación (15.31) con $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}$, se escribe

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ} &= (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Axyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} \\ &= 0 + \omega_1\mathbf{j} \times (\omega_1\mathbf{j} + \omega_2\mathbf{k})\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \omega_1\omega_2\mathbf{i} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se concluye el estudio de la cinemática de cuerpos rígidos al aprender cómo se usa un sistema de referencia auxiliar $\mathcal{F}$ para analizar el movimiento en tres dimensiones de un cuerpo rígido. Este sistema de referencia auxiliar puede ser un *sistema de referencia rotatorio* con un origen fijo O, o un *sistema de referencia en movimiento general.*

A. Empleo de un sistema de referencia en rotación. Cuando en el planteamiento del problema se incluye el uso de un sistema de referencia en rotación $\mathcal{F}$ deben seguirse estos pasos:

1. Elegir el sistema de referencia en rotación $\mathcal{F}$ que se desee utilizar y dibujar los ejes coordenados correspondientes x, y y z a partir del punto fijo O.

2. Determinar la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia $\mathcal{F}$ con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$. En la mayoría de los casos, se habrá elegido un sistema de referencia que se monta a algún elemento rotatorio del sistema; $\boldsymbol{\Omega}$ será entonces la velocidad angular de ese elemento.

3. Designar como P' el punto del sistema en referencia en rotación $\mathcal{F}$ que coincida con el punto P de interés en el instante que se esté considerando. Determine la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ y la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P'. Puesto que P' es parte de $\mathcal{F}$ y tiene el mismo vector de posición $\mathbf{r}$ que P, se encontrará que

$$\mathbf{v}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a}_{P'} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular de $\mathcal{F}$. Sin embargo, en muchos de los problemas que se encontrarán, la velocidad angular de $\mathcal{F}$ es constante tanto en magnitud como en dirección, y $\boldsymbol{\alpha} = 0$.

4. Determinar la velocidad y la aceleración del punto P con respecto al sistema de referencia $\mathcal{F}$. Al tratar de determinar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ y $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ se encontrará útil visualizar el movimiento de P en el sistema de referencia $\mathcal{F}$ cuando éste no se encuentre en rotación. Si P es un punto de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ que tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}$ relativa a $\mathcal{F}$ [problema resuelto 15.14], se encontrará que

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r})$$

En muchos de los problemas que se encontrarán, la velocidad angular del cuerpo $\mathcal{B}$ relativa al sistema de referencia $\mathcal{F}$ es constante tanto en magnitud como en dirección, y $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} = 0$.

5. Determinar la aceleración de Coriolis. Considerando la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia $\mathcal{F}$ y la velocidad $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ del punto P relativa al sistema de referencia, que se calculó en el paso anterior, se escribe

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$$

6. La velocidad y la aceleración de P con respecto al sistema de referencia fijo OXYZ puede obtenerse ahora sumando las expresiones que se han determinado:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \qquad (15.46)$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.48)$$

B. Empleo de un sistema de referencia en movimiento general. Los pasos que se seguirán difieren sólo un poco de los que se indicaron en la parte *A*. Consisten en lo siguiente:

1. Seleccionar el sistema de referencia $\mathcal{F}$ que se desee utilizar y un punto de referencia A en ese sistema de referencia, a partir del cual se dibujarán los ejes de coordenadas *x*, *y* y *z* que definen al sistema de referencia. Se considerará el movimiento del sistema de referencia como la suma de una *traslación con A y una rotación alrededor de A.*

2. Determinar la velocidad $\mathbf{v}_A$ del punto A y la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia. En muchos casos se seleccionará un sistema de referencia que se monta sobre algún elemento del sistema; $\boldsymbol{\Omega}$ será entonces la velocidad angular de ese elemento.

3. Designar como P′ el punto del sistema de referencia $\mathcal{F}$ que coincida con el punto *P* de interés en el instante considerado, y determinar la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ y la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ de ese punto. En algunos casos, esto puede efectuarse visualizando el movimiento de *P* si se evitara que ese punto se moviera con respecto a $\mathcal{F}$ [problema resuelto 15.15]. Un planteamiento más general consiste en recordar que el movimiento de *P′* es la suma de una traslación con el punto de referencia *A* y una rotación alrededor de *A*. Por consiguiente, la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ y la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ de *P′* pueden obtenerse sumando $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, respectivamente, a las expresiones que se encontraron en el párrafo *A*3 y sustituyendo el vector de posición $\mathbf{r}$ por el vector $\mathbf{r}_{P/A}$ dibujado de *A* a *P*:

$$\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} \qquad \mathbf{a}_{P'} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A})$$

Los pasos 4, 5 y 6 son iguales que en la parte A, salvo por el hecho de que el vector $\mathbf{r}$ debe sustituirse de nuevo en vez de $\mathbf{r}_{P/A}$. De tal manera, es posible seguir utilizando las ecuaciones (15.46) y (15.48) para obtener la velocidad y la aceleración de *P* con respecto al sistema de referencia fijo *OXYZ*.

Problemas

15.220 La varilla AB se suelda a la placa de 12 in. de radio que gira a razón constante $\omega_1 = 6$ rad/s. Si se sabe que el collarín D se mueve hacia el extremo B de la varilla a una rapidez constante $u = 78$ in./s, determine, para la posición mostrada *a*) la velocidad de D, *b*) la aceleración de D.

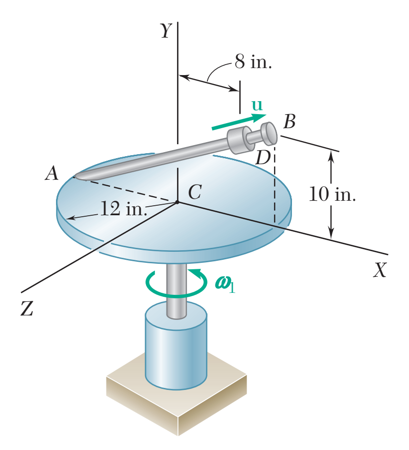


Figura P15.220

15.221 la barra doblada que se muestra gira a una razón constante $\omega_1 = 3$ rad/s. Si se sabe que el collarín C se mueve hacia el punto D a una rapidez relativa constante $u = 34$ in./s, determine para la posición mostrada la velocidad y la aceleración de C si *a*) $x = 5$ in., *b*) $x = 15$ in.

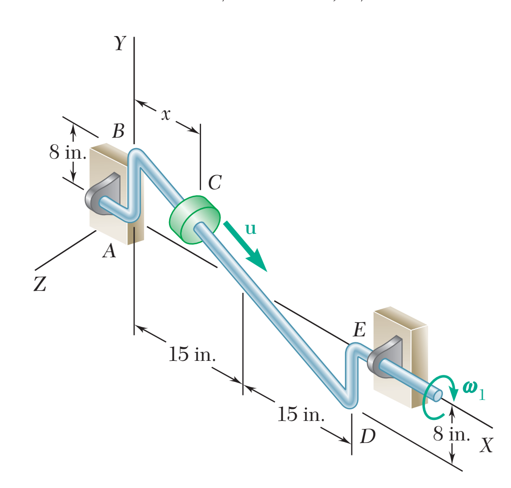


Figura P15.221

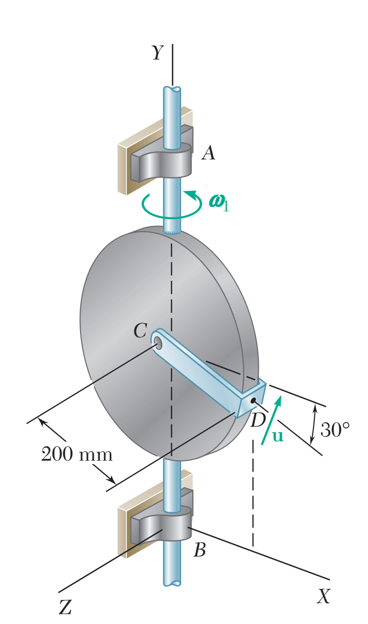


Figura P15.222

15.222 La placa circular que se muestra en la figura gira alrededor de su diámetro vertical a razón constante $\omega_1 = 10$ rad/s. Si se sabe que en la posición mostrada el disco yace en el plano XY y que el punto D del elemento CD se mueve hacia arriba a una rapidez relativa constante $u = 1.5$ m/s, determine *a*) la velocidad de D, *b*) la aceleración de D.

15.223 Retome el problema 15.222, y ahora suponga que en el instante que se muestra la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ de la placa es de 10 rad/s y decrece a razón de 25 rad/s^2, en tanto que la rapidez relativa u del punto D de la abrazadera CD es de 1.5 m/s y disminuye a razón de 3 m/s^2.

15.224 Una placa cuadrada de 18 in. de lado se articula en los puntos A y B de una horquilla. La placa gira a la velocidad constante $\omega_2 = 4$ rad/s con respecto a la horquilla, la cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 3$ rad/s alrededor del eje Y. Para la posición que se muestra, determine *a*) la velocidad del punto C y *b*) la aceleración del punto C.

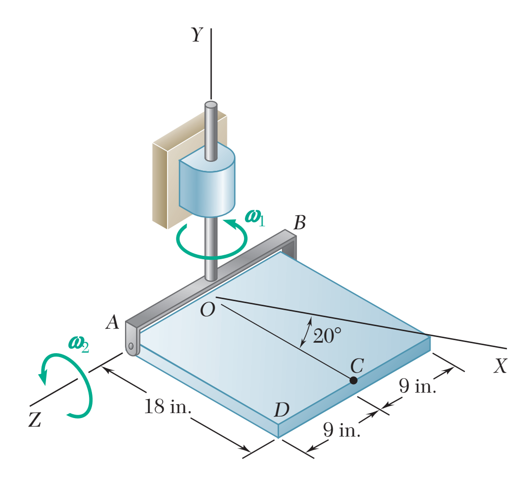


Figura *P15.224* y *P15.225*

15.225 Una placa cuadrada de 18 in. de lado se articula en los puntos A y B de una horquilla. La placa gira a la velocidad constante $\omega_2 = 4$ rad/s con respecto a la horquilla, la cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 3$ rad/s alrededor del eje Y. Para la posición que se muestra, determine *a*) la velocidad de la esquina D y *b*) la aceleración de la esquina D.

15.226 a 15.228 La placa rectangular que se muestra gira a la velocidad constante $\omega_2 = 12$ rad/s con respecto al brazo AE, el cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 9$ rad/s alrededor del eje Z. Para la posición que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto de la placa que se indica a continuación.

15.226 Esquina B.
15.227 Punto D.
15.228 Esquina C.

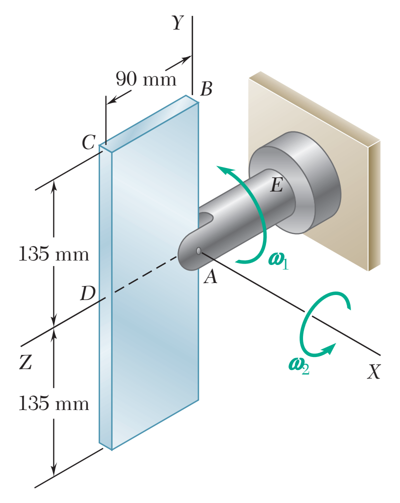


Figura P15.226, P15.227 y P15.228

15.229 Retome el problema 15.228, y ahora suponga que en el instante mostrado la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ de la placa respecto al brazo AE es de 12 rad/s y que disminuye a razón de 60 rad/s^2, en tanto que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ del brazo alrededor del eje Z es de 9 rad/s y disminuye a razón de 45 rad/s^2.

15.230 Retome el problema 15.221, y ahora suponga que en el instante que se indica la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ de la barra es de 3 rad/s y aumenta a razón de 12 rad/s^2, en tanto que la rapidez relativa u del collarín es de 34 in./s y disminuye a razón de 85 in./s^2.

15.231 Con el método de la sección 15.14, retome el problema 15.191.

15.232 Con el método de la sección 15.14, retome el problema 15.195.

15.233 Con el método de la sección 15.14, retome el problema 15.192.

15.234 El cuerpo *AB* y la barra *BC* del componente robótico que se muestra en la figura, giran a la razón constante $\omega_1 = 0.60$ rad/s alrededor del eje *Y*. De manera simultánea un control de alambre y polea ocasiona que el brazo *CD* gire alrededor de *C* a razón constante $\omega = d\beta/dt = 0.45$ rad/s. Si $\beta = 120°$, determine *a*) la aceleración angular del brazo *CD*, *b*) la velocidad de *D*, *c*) la aceleración de *D*.

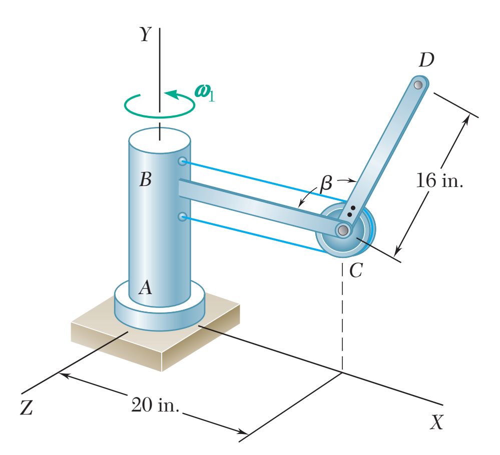


Figura P15.234

15.235 Un disco de 120 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 =$ 5 rad/s con respecto al brazo *AB*, el cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 3$ rad/s. Para la posición que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto *C*.

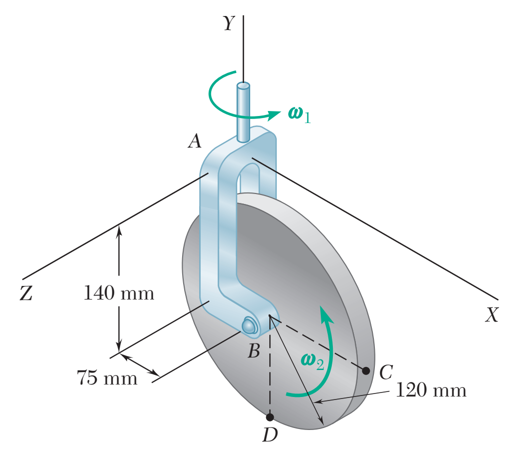


Figura P15.235 y P15.236

15.236 Un disco de 120 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 =$ 5 rad/s con respecto al brazo *AB*, que a su vez gira a la razón constante $\omega_1 = 3$ rad/s. Para la posición que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto *D*.

15.237 La grúa que se muestra gira a la razón constante $\omega_1 = 0.25$ rad/s; simultáneamente, la pluma telescópica desciende a una razón constante $\omega_2 = 0.40$ rad/s. Si se sabe que en el instante mostrado la longitud de la pluma es de 20 ft y que aumenta a la razón constante $u = 1.5$ ft/s, determine la velocidad y la aceleración del punto *B*.

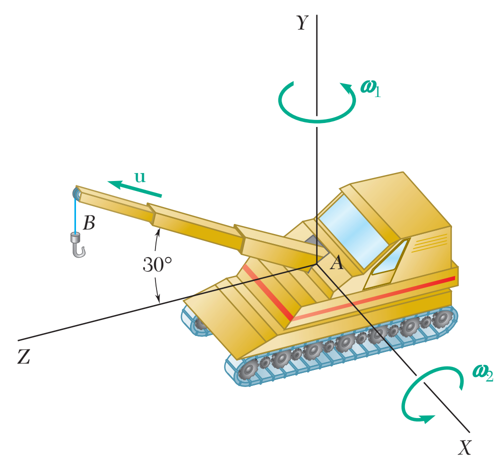


Figura P15.237

15.238 El brazo AB de 5 m de largo se usa para proporcionar una plataforma elevada a trabajadores de la construcción. En la posición que se muestra, el brazo AB se está elevando a una razón constante $d\theta/dt = 0.25$ rad/s; en forma simultánea, la unidad se está girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje Y a una velocidad constante $\omega_1 = 0.15$ rad/s. Si se sabe que $\theta = 20°$, determine la velocidad y la aceleración del punto B.

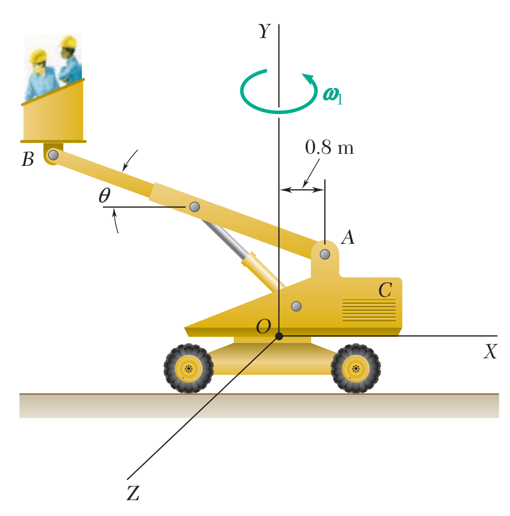


Figura *P15.238*

15.239 Retome el problema 15.238, y ahora suponga que $\theta = 40°$.

15.240 Un disco de 180 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 = 12$ rad/s, respecto al brazo CD, que a su vez gira a la razón constante $\omega_1 = 8$ rad/s alrededor del eje Y. Determine en el instante mostrado la velocidad y aceleración del punto A sobre el borde del disco.

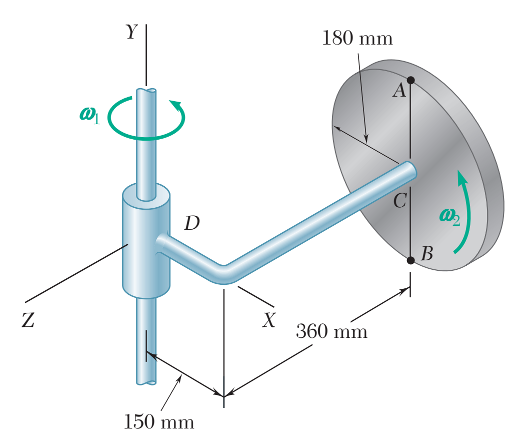


Figura P15.240 y P15.241

15.241 Un disco de 180 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 = 12$ rad/s con respecto al brazo CD, que a su vez gira a la razón constante $\omega_1 = 8$ rad/s alrededor del eje Y. Determine en el instante mostrado la velocidad y la aceleración del punto B sobre el borde del disco.

15.242 y 15.243 En la posición que se muestra la barra delgada se mueve a una rapidez constante $u = 3$ in./s hacia fuera del tubo BC. Al mismo tiempo el tubo BC gira a la velocidad constante $\omega_2 = 1.5$ rad/s con respecto al brazo CD. Si se sabe que el ensamble completo gira en torno al eje X a la razón constante $\omega_1 = 1.2$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración del extremo A de la barra.

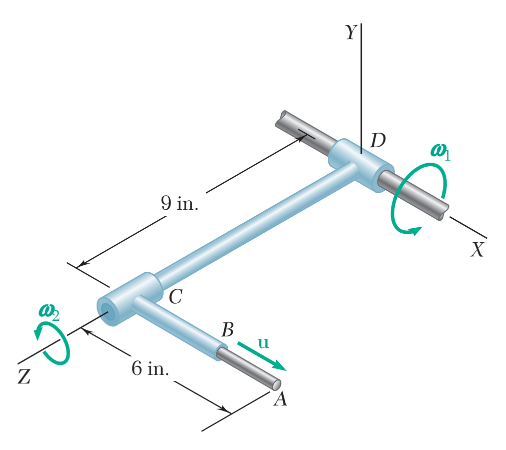


Figura P15.242

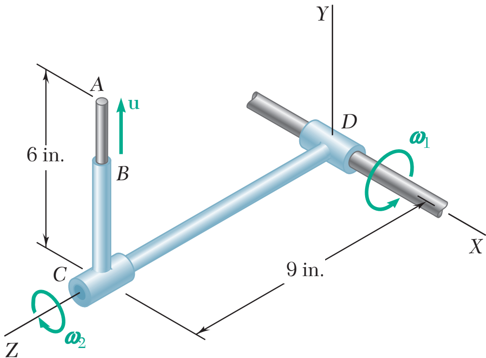


Figura P15.243

15.244 Dos discos, cada uno de 130 mm de radio, están soldados a la barra CD de 500 mm. La unidad de barra y discos gira a la razón constante $\omega_2 = 3$ rad/s con respecto al brazo AB. Si se sabe que en el instante mostrado $\omega_1 = 4$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración de *a*) el punto E, *b*) el punto F.

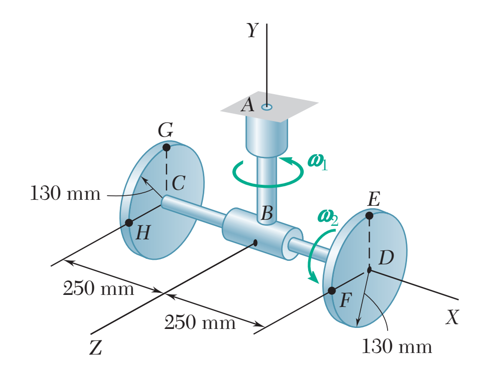


Figura P15.244



15.245 En el problema 15.244, determine la velocidad y la aceleración de *a*) el punto G, *b*) el punto H.

15.246 La placa vertical que se muestra está soldada al brazo EFG y la unidad completa gira a la velocidad constante $\omega_1 = 1.6$ rad/s alrededor del eje Y. Al mismo tiempo, una banda continua eslabonada se mueve alrededor del perímetro de la placa a una rapidez constante $u = 4.5$ in./s. Para la posición que se muestra, determine la aceleración del eslabón de la banda ubicado *a*) en el punto A y *b*) en el punto B.

15.247 La placa vertical que se muestra está soldada al brazo EFG, y la unidad completa gira a la velocidad constante $\omega_1 = 1.6$ rad/s alrededor del eje Y. Al misino tiempo, una banda continua eslabonada se mueve alrededor del perímetro de la placa a una rapidez constante $u = 4.5$ in./s. Para la posición que se muestra, determine la aceleración del eslabón de la banda ubicado *a*) en el punto C y *b*) en el punto D.

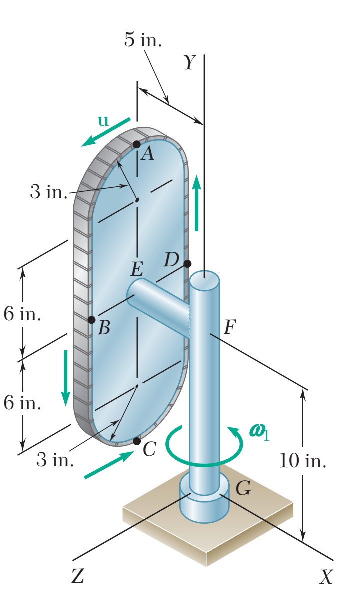


Figura *P15.246* y *P15.247*

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 15

Este capítulo se dedicó al estudio de la cinemática de cuerpos rígidos.

Cuerpo rígido en traslación

Primero se consideró la *traslación* de un cuerpo rígido [sección 15.2] y se observó que en un movimiento de este tipo, *todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante dado.*

Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo

Después se consideró la *rotación* de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo [sección 15.3]. La posición del cuerpo se definió mediante el ángulo θ que la línea BP dibujaba desde el eje de rotación hasta el punto P del cuerpo, formado con un plano fijo (figura 15.39). Se encontró que la magnitud de la velocidad de P es

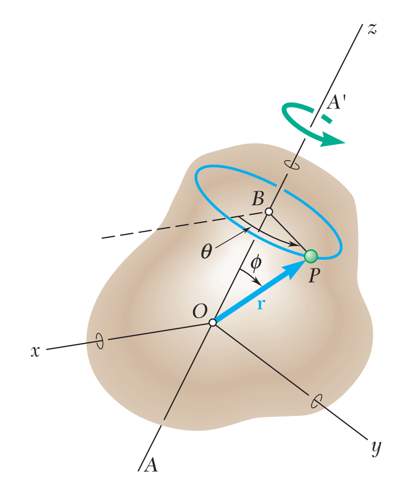


Figura 15.39

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \qquad (15.4)$$

donde $\dot{\theta}$ es la derivada respecto al tiempo de θ. Luego se expresó la velocidad de P como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (15.5)$$

donde el vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \qquad (15.6)$$

se dirige a lo largo del eje de rotación fijo y representa la *velocidad angular* del cuerpo.

Si se denota por $\boldsymbol{\alpha}$ la derivada $d\boldsymbol{\omega}/dt$ de la velocidad angular, la aceleración de P se expresa como

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (15.8)$$

Al diferenciar (15.6) y recordar que $\mathbf{k}$ es una constante en magnitud y dirección, se encuentra que

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \qquad (15.9)$$

El vector $\boldsymbol{\alpha}$ representa la *aceleración angular* del cuerpo y está dirigida a lo largo del eje de rotación fijo.

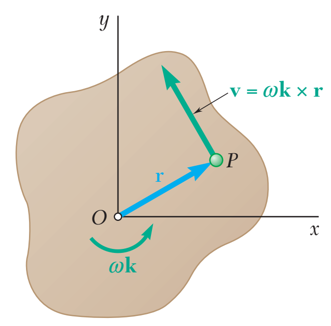


Figura 15.40

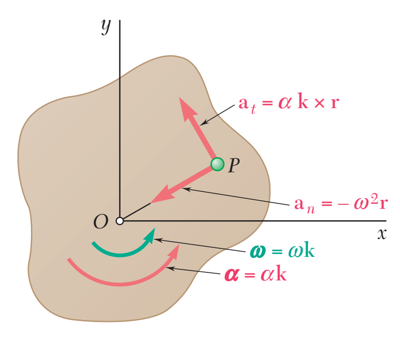


Figura 15.41

Rotación de una placa representativa

Después se consideró el movimiento de una placa representativa ubicada en un plano perpendicular al eje de rotación del cuerpo (figura 15.40). Puesto que la velocidad angular es perpendicular a la placa, la velocidad de un punto P de la placa se expresó como

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{15.10}$$

Componentes tangencial y normal

donde $\mathbf{v}$ está contenida en el plano de la placa. Al sustituir $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ en (15.8), se encontró que la aceleración de P podía descomponerse en las componentes tangencial y normal (figura 15.41) iguales respectivamente a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} \qquad & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.11'}$$

Velocidad angular y aceleración angular de la placa en rotación

Al recordar las ecuaciones (15.6) y (15.9), se obtuvieron las siguientes expresiones para la *velocidad angular* y la *aceleración angular* de la placa [sección 15.4]:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{15.12}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15.13}$$

o

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \tag{15.14}$$

Estas expresiones son similares a las que se obtuvieron en el capítulo 11 para el movimiento rectilíneo de una partícula.

Dos casos particulares de rotación se encontraron con frecuencia: *rotación uniforme* y *rotación uniformemente acelerada.* Los problemas en los que interviene cualquiera de estos movimientos se pueden resolver utilizando ecuaciones similares a las que se emplearon en las secciones 11.4 y 11.5 para el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula, pero donde x, v y a se sustituyen por θ, ω y α, respectivamente [problema resuelto 15.1].

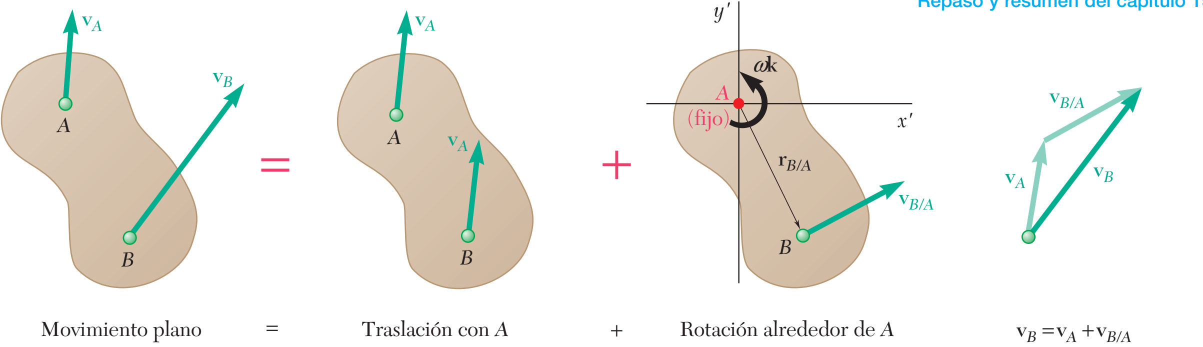


Figura 15.42

Velocidades en movimiento plano

El *movimiento plano más general* de una placa rígida puede considerarse como la *suma de una traslación y una rotación* [sección 15.5]. Por ejemplo, es posible suponer que la placa que se muestra en la figura 15.42 se traslada con el punto A, mientras gira de manera simultánea alrededor de A. Se concluye [sección 15.6] que la velocidad de cualquier punto B de la placa puede expresarse como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad (15.17)$$

donde $\mathbf{v}_A$ es la velocidad de A y $\mathbf{v}_{B/A}$ la velocidad relativa de B con respecto a A o, de manera más precisa, con respecto a los ejes $x'y'$ que se trasladan con A. Denotando mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, se encontró que

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega \qquad (15.18)$$

La ecuación fundamental (15.17) que relaciona las velocidades absolutas de los puntos A y B y la velocidad relativa de B con respecto a A se expresó en la forma de un diagrama vectorial y se utilizó para resolver problemas que implican el movimiento de diversos tipos de mecanismos [problemas resueltos 15.2 y 15.3].

Centro instantáneo de rotación

Otro planteamiento para la solución de problemas en los que intervienen las velocidades de los puntos de una placa rígida en un movimiento plano se presentó en la sección 15.7 y se usó en los problemas resueltos 15.4 y 15.5. Está basado en la determinación del *centro instantáneo de rotación* C de la placa (figura 15.43).

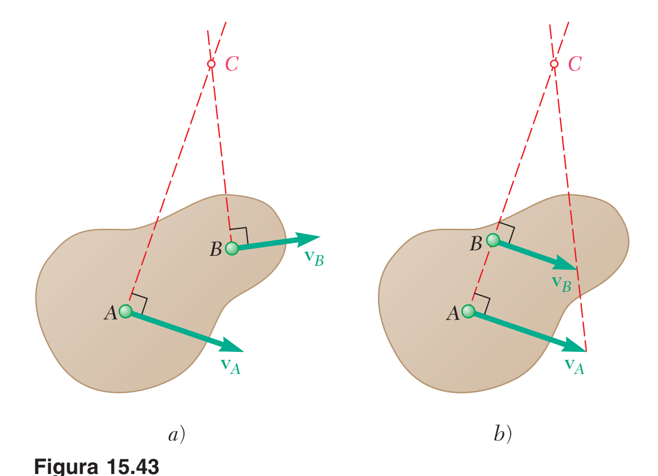
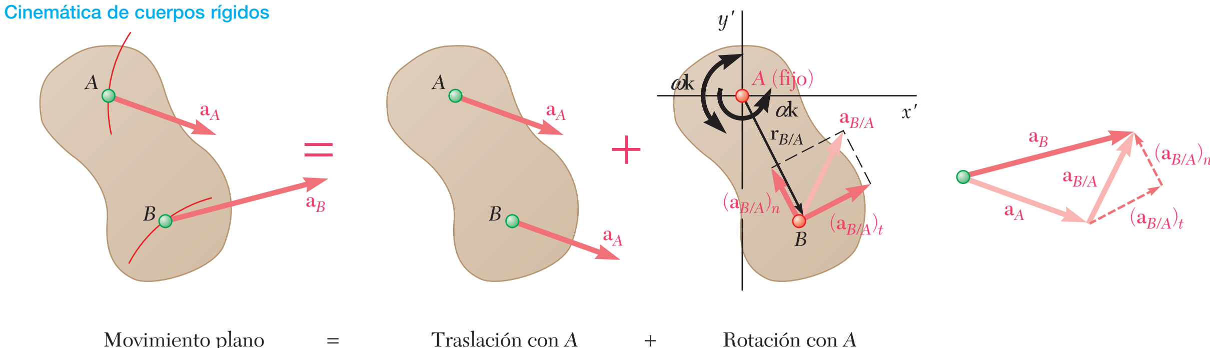


Figura 15.43



Movimiento plano = Traslación con *A* + Rotación con *A*

Figura 15.44

Aceleraciones en movimiento plano

El hecho de que sea posible considerar a cualquier movimiento plano de una placa rígida como la suma de una traslación de la placa con un punto de referencia *A* y una rotación alrededor de *A* se utilizó en la sección 15.8 para relacionar las aceleraciones absolutas de cualesquiera dos puntos *A* y *B* de la placa y la aceleración relativa de *B* con respecto a *A*. Se tuvo

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad (15.21)$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ consistió en una *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ de magnitud $r\omega^2$ dirigida hacia *A*, y una *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ de magnitud $r\alpha$ perpendicular a la línea *AB* [figura 15.44]. La relación fundamental (15.21) se expresó en términos de diagramas vectoriales o ecuaciones vectoriales y se empleó para determinar las aceleraciones de puntos determinados de diversos mecanismos [problemas resueltos 15.6 a 15.8]. Debe señalarse que el centro de rotación instantáneo *C* que se consideró en la sección 15.7 no puede utilizarse para determinar aceleraciones, puesto que el punto *C*, en general, *no* tiene aceleración cero.

Coordenadas expresadas en términos de un parámetro

En el caso de ciertos mecanismos, es posible expresar las coordenadas *x* y *y* de todos los puntos importantes del mecanismo por medio de expresiones analíticas simples que contienen un *solo parámetro*. Las componentes de la velocidad absoluta y la aceleración de un punto dado se obtienen entonces al diferenciar dos veces con respecto al tiempo *t* las coordenadas *x* y *y* de ese punto [sección 15.9].

Razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación

Si bien la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y a un sistema en traslación, la razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación es diferente. Por lo tanto, para estudiar el movimiento de una partícula relativo al sistema de referencia en rotación primero tuvimos que comparar las razones de cambio del vector general **Q** con respecto a un sistema de referencia fijo *OXYZ* y a un sistema de referencia *Oxyz* en rotación con una velocidad angular **Ω** [sección 15.10] (figura 15.45). Se obtuvo la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \qquad (15.31)$$

se concluyó que la razón de cambio del vector **Q** con respecto a un sistema de referencia fijo *OXYZ* consta de dos partes: la primera parte representa la razón de cambio **Q** con respecto al sistema de referencia rotatorio *Oxyz*; la segunda parte, **Ω** × **Q**, se induce por la rotación del sistema de referencia *Oxyz*.

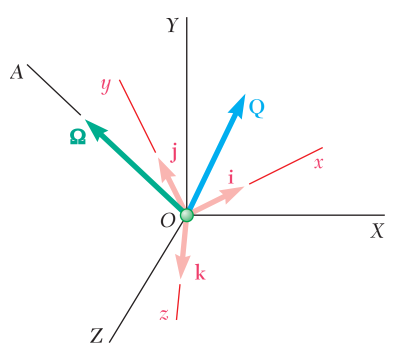


Figura 15.45

La siguiente parte del capítulo [sección 15.11] se dedicó al estudio cinemático en dos dimensiones de una partícula P moviéndose con respecto a un sistema de referencia $\mathcal{F}$ en rotación con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ alrededor de un eje fijo (figura 15.46). Se encontró que la velocidad absoluta de P podría expresarse como

Movimiento plano de una partícula relativo a un sistema de referencia en rotación

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.33}$$

donde $\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de la partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$

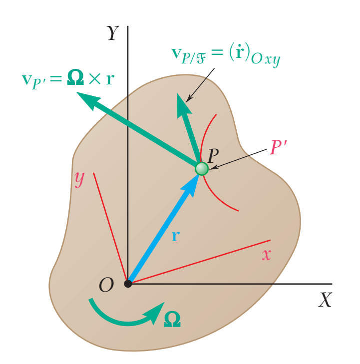


Figura 15.46

Observe que la misma expresión para $\mathbf{v}_P$ se obtiene si el sistema de referencia está en traslación en vez de en rotación. Sin embargo, cuando el sistema de referencia está en rotación, se encuentra que la expresión para la aceleración de P contiene un término adicional $\mathbf{a}_c$ denominado *aceleración complementaria* o *aceleración de Coriolis.* Se escribió

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.36}$$

donde $\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleración complementaria o de Coriolis

Puesto que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son perpendiculares entre sí en el caso de movimiento plano, se encontró que la aceleración de Coriolis tiene una magnitud $a_c = 2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ y que apunta en la dirección obtenida al girar el vector $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ 90° en el sentido de rotación del sistema de referencia en movimiento. Es posible utilizar las fórmulas (15.33) y (15.36) para analizar el movimiento de mecanismos que contienen partes que se deslizan unas sobre otras [problemas resueltos 15.9 y 15.10].

La última parte del capítulo se dedicó al estudio de la cinemática de cuerpos rígidos en tres dimensiones. Se trató primero el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo [sección 15.12]. Después de demostrar que el desplazamiento más general del cuerpo rígido con un punto fijo O es equivalente a una rotación del cuerpo alrededor de cualquier eje que pase por O, fue posible definir la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el *eje de rotación instantáneo* del cuerpo en un instante determinado. La velocidad de un punto P del cuerpo (figura 15.47) se puede expresar nuevamente como

Movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.37}$$

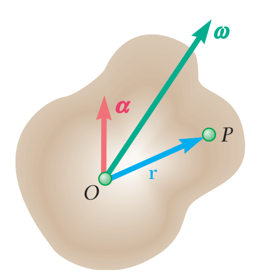


Figura 15.47

Al diferenciar esta expresión, también se escribió

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.38}$$

Sin embargo, puesto que la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ cambia de un instante a otro, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, en general, no está dirigida a lo largo del eje de rotación instantáneo [problema resuelto 15.11].

Movimiento general en el espacio

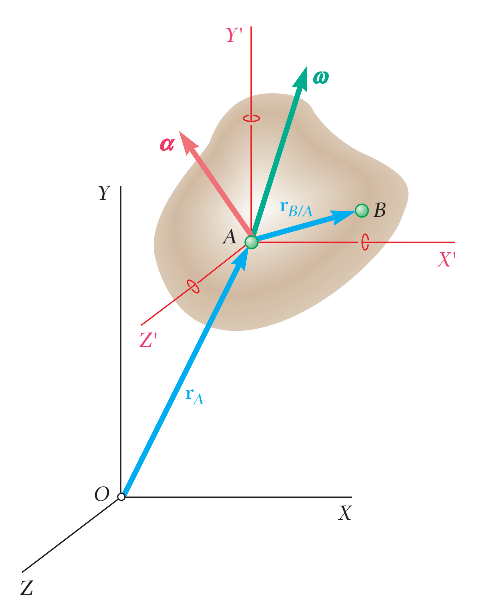


Figura 15.48

En la sección 15.13 se demostró que *el movimiento más general de un cuerpo rígido en el espacio es equivalente, en cualquier instante dado, a la suma de una traslación y una rotación.* Al considerar dos partículas A y B del cuerpo, se encontró que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.42}$$

donde $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B relativa al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ montado en A y de orientación fija (figura 15.48). Al denotar por $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, se escribió

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.43}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado [problema resuelto 15.12]. La aceleración de B se obtuvo mediante un razonamiento similar. Primero se escribió

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

y, al recordar la ecuación (15.38),

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{15.44}$$

Movimiento tridimensional de una partícula relativo a un sistema de referencia en rotación

En las dos secciones finales del capítulo se consideró el movimiento en tres dimensiones de una partícula P relativa a un sistema de referencia $Oxyz$ en rotación con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$ (figura 15.49). En la sección 15.14 se expresó la velocidad absoluta $\mathbf{v}_P$ de P como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$

donde $\mathbf{v}_P$ = velocidad absoluta de una partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' de un sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$

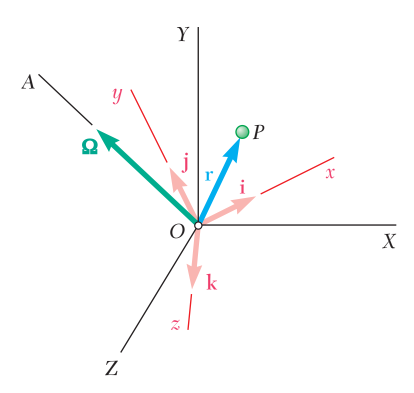


Figura 15.49

La aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de P se expresó entonces como

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.48)$$

donde $\mathbf{a}_P$ = aceleración absoluta de la partícula P

$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$ que coincide con P

$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema de referencia en movimiento $\mathcal{F}$

$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleración complementaria, o de Coriolis

Se observó que la magnitud a_c de la aceleración de Coriolis no es igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ [problema resuelto 15.131 salvo en el caso especial en el que $\mathbf{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son perpendiculares entre sí.

Sistema de referencia en movimiento general

También se observó [sección 15.15] que las ecuaciones (15.46) y (15.48) siguen siendo válidas cuando el sistema de referencia $Axyz$ se mueve de una manera conocida, aunque arbitraria, con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ (figura 15.50). Siempre que el movimiento de A se incluya en los términos $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{a}_{P'}$ que representan la velocidad y la aceleración absolutas del punto coincidente P'.

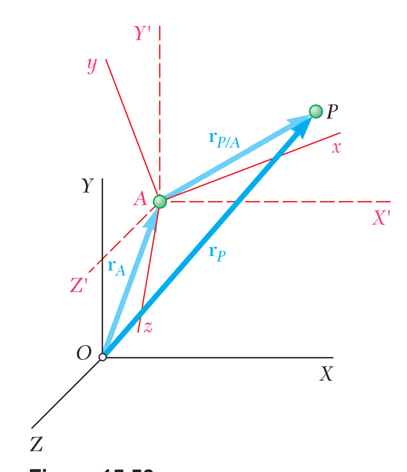


Figura 15.50

Los sistemas de referencia en rotación son en particular útiles en el estudio del movimiento tridimensional de cuerpos rígidos. De hecho, hay muchos casos en los que la elección apropiada del sistema de referencia en rotación conducirá a un análisis más simple del movimiento del cuerpo rígido que el que sería posible con ejes de orientación fija [problemas resueltos 15.14 y 15.15].

Problemas de repaso

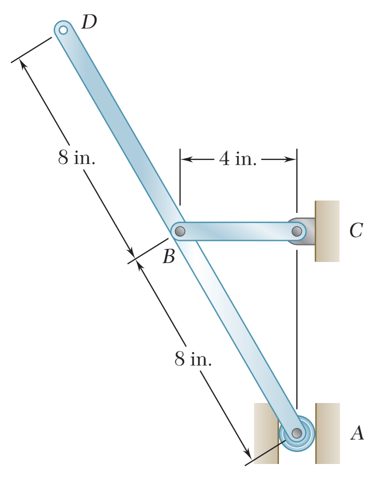


Figura P15.248

15.248 Si en el instante mostrado la manivela BC tiene una velocidad angular constante de 45 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración *a*) del punto A, *b*) del punto D.

15.249 El rotor de un motor eléctrico tiene una velocidad de 1 800 rpm cuando se corta el suministro de energía. Se observa que el rotor se detiene después de ejecutar 1 550 revoluciones. Suponiendo movimiento uniformemente acelerado, determine *a*) la aceleración angular del rotor, *b*) el tiempo requerido para que el rotor se detenga.

15.250 Un disco de 0.15 m de radio gira a la razón constante ω_2 con respecto a la placa BC, que a su vez gira a razón constante ω_1 alrededor del eje y. Si se sabe que $\omega_1 = \omega_2 = 3$ rad/s, determine para la posición mostrada, la velocidad y la aceleración *a*) del punto D, *b*) del punto F.

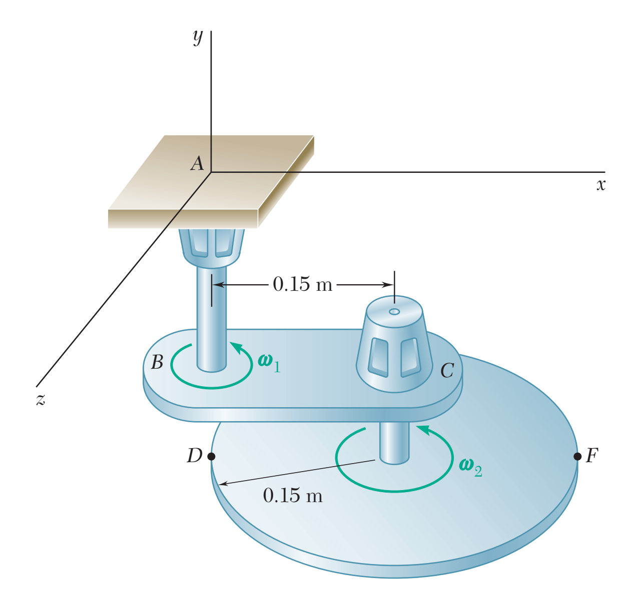


Figura P15.250

15.251 El ventilador de un motor de automóvil gira alrededor de un eje horizontal paralelo a la dirección del movimiento del automóvil. Cuando se ve desde la parte trasera del automóvil, se observa que el ventilador gira en el sentido de las manecillas del reloj a razón de 2 500 rpm. Si se sabe que el automóvil está girando a la derecha a lo largo de una trayectoria con radio de 12 m a una rapidez constante de 12 km/h, determine la aceleración angular del ventilador en el instante en que el automóvil se mueve hacia al norte.

15.252 Un tambor de 4.5 in. de radio está montado sobre un cilindro de 7.5 in. de radio. Una cuerda se enrolla alrededor del tambor y su extremo *E* se jala hacia la derecha con una velocidad constante de 15 in./s, lo que causa que el cilindro ruede sin deslizarse sobre la placa *F*. Si se sabe que la placa *F* está fija, determine *a*) la velocidad del centro del cilindro, *b*) la aceleración del punto *D* del cilindro.

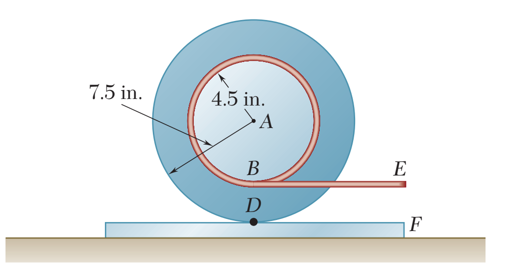


Figura P15.252

15.253 Retome el problema 15.252, y ahora suponga que la placa *F* se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 9 in./s.

15.254 *A* través de un tubo curvo *AB* fluye agua, el tubo gira con una velocidad angular constante de 90 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Si la velocidad del agua en relación con el tubo es de 8 m/s, determine la aceleración total de una partícula de agua en el punto *P*.

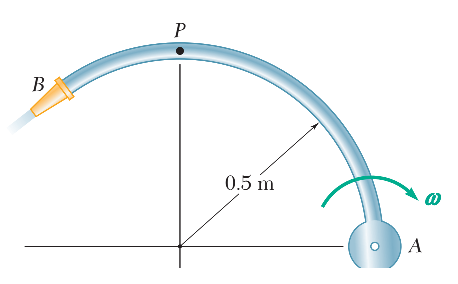


Figura P15.254

15.255 La barra *BC* de 24 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula al brazo giratorio *AB* y al collarín *C* que se desliza sobre la barra fija *DE*. Si se sabe que la longitud del brazo *AB* es de 4 in. y que gira a la razón constante $\omega_1 = 10$ rad/s, determine la velocidad del collarín *C* cuando $\theta = 0$.

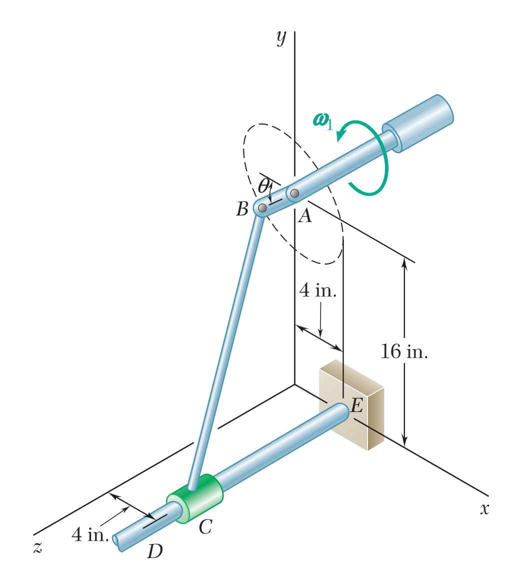


Figura *P15.255*

15.256 Retome el problema 15.255, y ahora suponga que $\theta = 90°$.

15.257 La manivela *AB* tiene una velocidad angular constante de 1.5 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Para la posición mostrada, determine *a*) la velocidad angular de la varilla *BD*, *b*) la velocidad del collarín *D*.

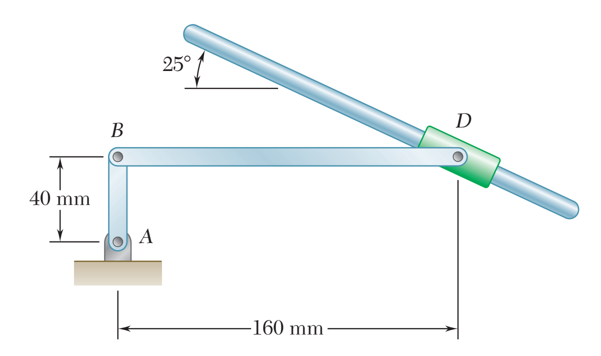


Figura P15.257 y *P15.258*

15.258 La manivela *AB* tiene una velocidad angular constante de 1.5 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Para la posición mostrada, determine *a*) la aceleración angular de la varilla *BD*, *c*) la aceleración del collarín *D*.

15.259 La varilla *AB* con 125 mm longitud se une a una barra vertical que gira alrededor del eje y a la velocidad constante $\omega_1 = 5$ rad/s. Si el ángulo formado por la varilla *AB* y la vertical aumenta a la velocidad constante $d\beta/dt = 3$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración del extremo *B* de la varilla cuando $\beta = 30°$.

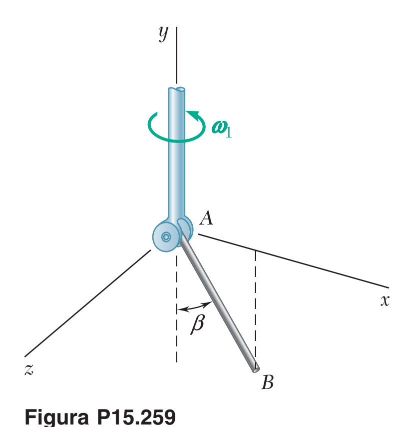


Figura P15.259

Problemas de computadora

15.C1 El disco que se muestra tiene una velocidad angular constante de 500 rpm en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Si la barra *BD* mide 250 mm de largo, utilice software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 360° con incrementos de 30°, la velocidad del collarín *D* y la velocidad angular de la barra *BD*. Determine los dos valores de θ para los cuales la velocidad del collarín *D* es cero.

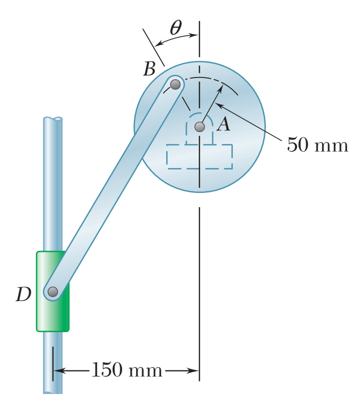


Figura P15.C1

15.C2 Dos barras giratorias se conectan mediante un bloque corredizo *P* en la forma que se indica. Si la barra *BP* gira con velocidad angular constante de 6 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, utilice software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 180°, la velocidad angular y la aceleración angular de la barra *AE*. Determine el valor de θ para el cual la aceleración angular α_{AE} de la barra *AE* es máxima y el valor correspondiente de α_{AE}.

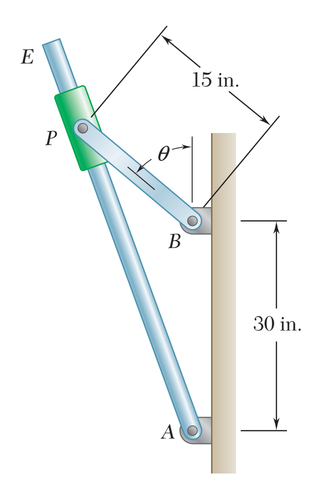


Figura P15.C2

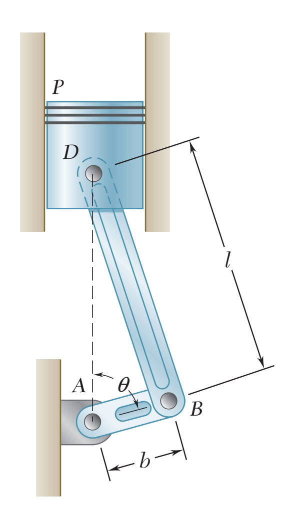


Figura P15.C3

15.C3 En el sistema motriz que se muestra, $l = 160$ mm y $b = 60$ mm. Si la manivela AB gira con una velocidad angular constante de 1 000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, utilice software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 180° con incrementos de 10°, *b*) la velocidad y la aceleración angulares de la barra BD, *b*) la velocidad y la aceleración del pistón P.

15.C4 La barra AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras que el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante de 180 mm/s. Use software para determinar y graficar, respecto a valores de θ de 20° a 90° con incrementos de 5°, la velocidad del punto B y la aceleración angular de la barra. Determine el valor de θ para el cual la aceleración angular α de la barra es máxima y el valor correspondiente de α.

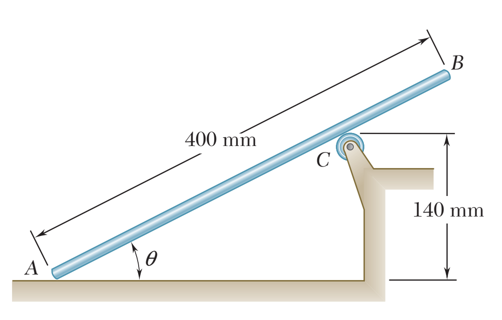


Figura P15.C4

15.C5 La barra BC de 24 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula al brazo giratorio AB y al collarín C que se desliza sobre la barra fija DE. El brazo AB de 4 in. de longitud gira en el plano XY con una velocidad angular constante de 10 rad/s. Use software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 360°, la velocidad del collarín C. Determine los dos valores de θ para los cuales la velocidad del collarín C es cero

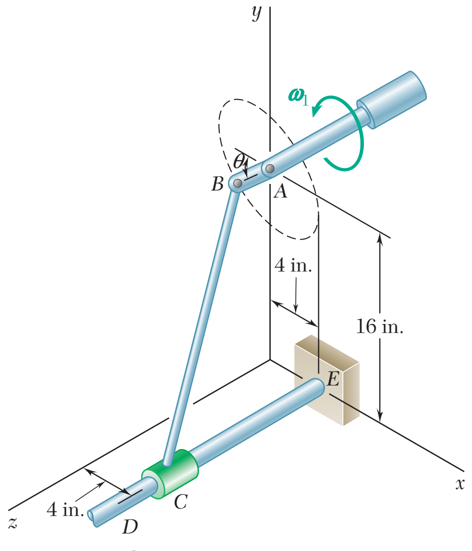


Figura P15.C5

15.C6 La barra AB de 25 in. de longitud se conecta mediante unión de rótula a los collarines A y B, los cuales se deslizan a lo largo de las dos barras en la forma que se indica. El collarín B se mueve hacia el soporte E a una rapidez constante de 20 in./s. Si se denota con d la distancia desde el punto C hasta el collarín B, utilice software para determinar y graficar la velocidad del collarín A respecto a valores de d entre 0 y 15 in.

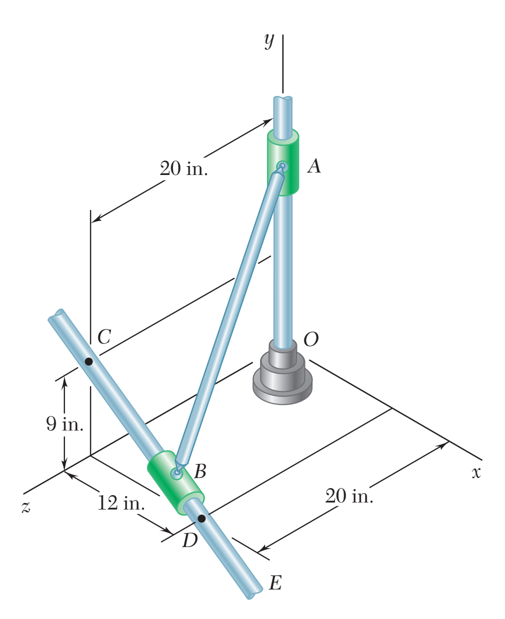


Figura P15.C6

En la actualidad, el diseño más común para las turbinas de viento es similar al de las turbinas de tres aspas que se muestran en la fotografía de una granja de viento. En este capítulo aprenderá a analizar el movimiento de un cuerpo rígido al considerar el movimiento de su centro de masa, el movimiento relativo a su centro de masa y las fuerzas externas que actúan sobre él.



CAPÍTULO 16

Movimiento plano de cuerpos rígidos: fuerzas y aceleraciones



CAPÍTULO 16 MOVIMIENTO PLANO DE CUERPOS RÍGIDOS: FUERZAS Y ACELERACIONES

16.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo y en los capítulos 17 y 18 se estudiará la *cinética de cuerpos rígidos*, esto es, las relaciones existentes entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, la forma y la masa del cuerpo, y el movimiento que se produce. En los capítulos 12 y 13 se abordaron relaciones similares, suponiendo en ese caso que el cuerpo puede considerarse como una partícula, esto es, que su masa podría concentrarse en un punto y que todas las fuerzas actúan en él. La forma del cuerpo, así como la ubicación exacta de los puntos de aplicación de las fuerzas, no serán tomados en cuenta. Se estudiará no sólo el movimiento del cuerpo como un todo, sino también el movimiento del cuerpo en torno a su centro de masa.

El planteamiento será considerar a los cuerpos rígidos conformados por un gran número de partículas y utilizar los resultados que se obtuvieron en el capítulo 14 para el movimiento de sistemas de partículas. De manera específica, se emplearán dos ecuaciones del capítulo 14: la ecuación (14.16), $\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$, la cual relaciona la resultante de las fuerzas externas y la aceleración del centro de masa G del sistema de partículas, y la ecuación (14.23), $\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$, que relaciona el momento resultante de las fuerzas externas y la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas alrededor de G.

Excepto por la sección 16.2, la cual se aplica al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido, los resultados que se obtendrán en este capítulo se limitarán en dos formas: 1) se restringirán al *movimiento plano* de cuerpos rígidos, esto es, al movimiento en el que cada partícula del cuerpo permanece a una distancia constante de un plano de referencia fijo. 2) Los cuerpos rígidos considerados constarán únicamente de placas planas y de cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia.† El estudio del movimiento plano de cuerpos tridimensionales no simétricos y, más en lo general, el movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se pospondrán para el capítulo 18.

En la sección 16.3 se definirá la cantidad del movimiento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano y se mostrará que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\dot{\mathbf{H}}_G$ alrededor del centro de masa es igual al producto $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ del momento de inercia de masa centroidal $\bar{I}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. El principio de d'Alembert, que se presentará en la sección 16.4, se usa para demostrar que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en el centro de masa y a un par de momento $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

En la sección 16.5 se obtendrá el principio de transmisibilidad utilizando sólo la ley del paralelogramo y las leyes de movimiento de Newton, lo cual permite quitar este principio de la lista de axiomas (sección 1.2) requeridos para el estudio de la estática y dinámica de cuerpos rígidos.

En la sección 16.6 se presentan las ecuaciones de diagramas de cuerpo libre que se utilizarán en la solución de todos los problemas que implican el movimiento plano de cuerpos rígidos.

Luego de considerar el movimiento plano de cuerpos rígidos conectados en la sección 16.7, el lector estará preparado para resolver una diversidad de problemas que implican la traslación, la rotación centroidal y el movimiento sin restricciones de cuerpos rígidos. En la sección 16.8 y en la parte restante del capítulo se tratará la solución de problemas que implican rotación no centroidal, movimiento de rodamiento y otros movimientos planos parcialmente restringidos de cuerpos rígidos.

†O, más generalmente, cuerpos que tienen un eje de inercia centroidal principal perpendicular al plano de referencia.

16.2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO

Considere un cuerpo rígido sobre el que actúan varias fuerzas externas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . (figura 16.1). Se puede suponer que el cuerpo está integrado de un gran número n de partículas de masa Δm_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y aplicar los resultados obtenidos en el capítulo 14 para un sistema de partículas (figura 16.2). Considerando primero el movimiento del centro de masa G del cuerpo con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$, se retoma la ecuación (14.6) y se escribe

$$\Sigma\mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \qquad (16.1)$$

donde m es la masa del cuerpo y $\overline{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa G. Volviendo ahora al movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ se retoma la ecuación (14.23) y se escribe

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (16.2)$$

donde $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa la razón de cambio de $\mathbf{H}_G$, la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas que forma el cuerpo rígido. En lo subsecuente, $\mathbf{H}_G$ hará referencia simplemente a la *cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido en torno a su centro de masa* G. Junto con las ecuaciones (16.1) y (16.2) expresa que *el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema consistente en el vector* $m\overline{\mathbf{a}}$ *fijo en* G *y al par de momento* $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 16.3).†

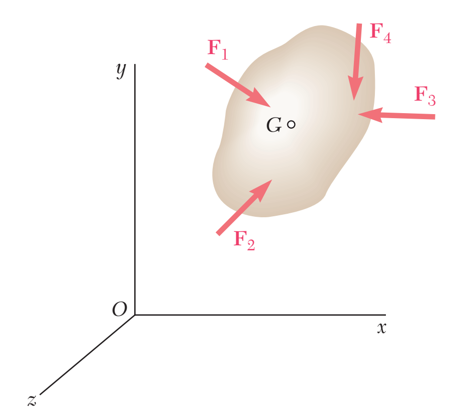


Figura 16.1

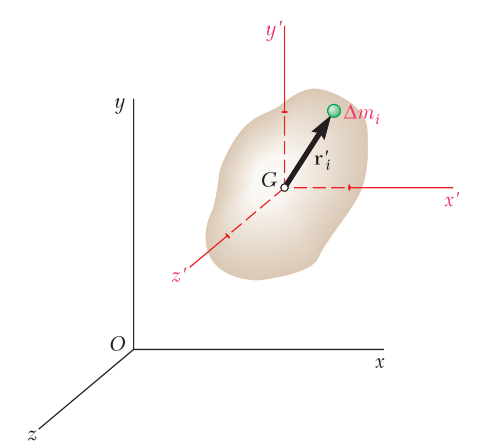


Figura 16.2

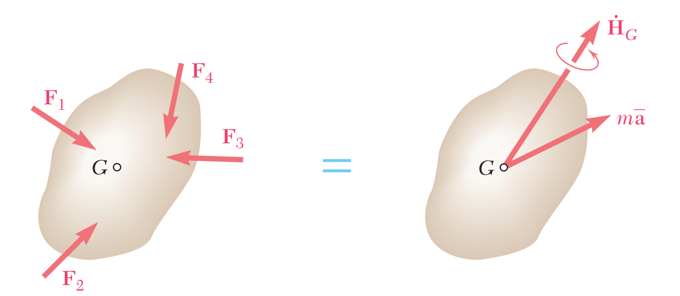


Figura 16.3

Las ecuaciones (16.1) y (16.2) se aplican al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. Sin embargo, en el resto de este capítulo el análisis se limitará al *movimiento plano* de cuerpos rígidos, esto es, a un movimiento en el que cada partícula permanece a una distancia constante de un plano de referencia fijo, y se supondrá que los cuerpos rígidos estarán compuestos sólo por las placas planas y los cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia. Un estudio adicional del movimiento plano de cuerpos tridimensionales no simétricos y del movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se pospondrá hasta el capítulo 18.



Fotografía 16.1 El sistema de fuerzas externas que actúan sobre el hombre y el esquí incluye los pesos, la tensión y la cuerda de remolque, y las fuerzas ejercidas por el agua y el aire.

†Puesto que los sistemas implicados actúan sobre un cuerpo rígido se podría concluir en este punto, en las referencias a la sección 3.19, que los dos sistemas son *equivalentes*, así como equipolentes y usan signo de igual rojo en lugar de azul (véase figura 16.3). Sin embargo, posponiendo esta conclusión, se puede llegar a ella de manera independiente (secciones 16.4 y 18.5), eliminando de esa manera la necesidad de incluir el principio de transmisibilidad entre los axiomas de la mecánica (sección 16.5).

16.3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

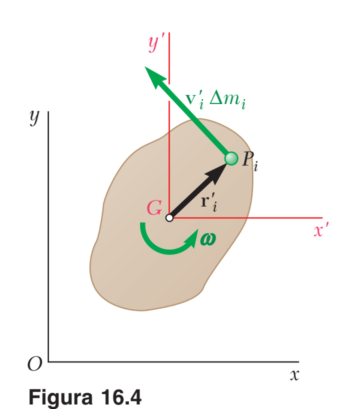


Figura 16.4

Considere una placa rígida en movimiento plano. Suponiendo que la placa está integrada por un gran número n de partículas P_i de masa Δm_i y retomando la ecuación (14.24) de la sección 14.5, se advierte que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de la placa alrededor de su centro de masa G puede calcularse considerando los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento de las partículas de la placa en su movimiento con respecto al sistema de referencia Oxy o $Gx'y'$ (figura 16.4). Si se elige este último, se escribe

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i\,\Delta m_i) \tag{16.3}$$

donde $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}'_i\,\Delta m_i$ denotan, respectivamente, el vector de posición y la cantidad de movimiento lineal de la partícula P_i relativa al sistema de referencia centroidal $Gx'y'$. Sin embargo, en vista de que la partícula pertenece a la placa, se tiene que $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa en el instante considerado. Se escribe

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)\,\Delta m_i]$$

Con referencia a la figura 16.4, se verifica con facilidad que la expresión que se obtuvo representa un vector de la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$ (esto es, perpendicular a la placa) y de magnitud igual a $\omega\Sigma r_i'^2\,\Delta m_i$. Recordando que la suma $\Sigma r_i'^2\,\Delta m_i$ representa el momento de inercia $\bar{I}$ de la placa alrededor del eje centroidal perpendicular a la misma, se concluye que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de la placa en torno a su centro de masa es

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \tag{16.4}$$

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (16.4) se obtiene

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \tag{16.5}$$

En consecuencia, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular de la placa se representa mediante un vector de la misma dirección que $\boldsymbol{\alpha}$ (esto es, perpendicular a la placa) y de magnitud $\bar{I}\alpha$.

Hay que tener presente que los resultados que se obtuvieron en esta sección se han derivado para una placa rígida en movimiento plano. Como se verá en el capítulo 18, siguen siendo válidos en el caso de movimiento plano de cuerpos rígidos que son simétricos con respecto al plano de referencia.† Sin embargo, no se aplican en el caso de cuerpos no simétricos o en el caso de movimiento tridimensional.


Fotografía 16.2 El disco duro y los brazos de sujeción de una unidad de disco de computadora realizan rotación centroidal.

†O, más generalmente, cuerpos que tienen un eje de inercia centroidal principal perpendicular al plano de referencia.

16.4. MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO. PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Considere una placa rígida de masa m que se mueve bajo la acción de varias fuerzas externas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , contenidas en el plano de la placa (figura 16.5). Al sustituir $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la ecuación (16.5) en la ecuación (16.2) y escribir las ecuaciones de movimiento fundamentales (16.1) y (16.2) en forma escalar, se tiene

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \tag{16.6}$$

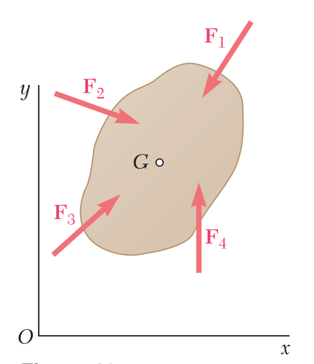


Figura 16.5

Las ecuaciones (16.6) muestran que la aceleración del centro de masa G de la placa y su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se obtienen fácilmente una vez que se ha determinado la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la placa y su momento resultante alrededor de G. Al dar condiciones iniciales apropiadas, es posible obtener por integración en cualquier instante t las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de masa y la coordenada angular θ. De tal modo, *el movimiento de la placa está completamente definido por la resultante y el momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas que actúan sobre ella.*

Esta propiedad, que se ampliará en el capítulo 18 al caso de movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, es característica del movimiento de un cuerpo rígido. De hecho, como se vio en el capítulo 14, el movimiento de un sistema de partículas que no están rígidamente conectadas dependerá en general de las fuerzas externas específicas que actúan sobre diferentes partículas, así como de las fuerzas internas.

Puesto que el movimiento de un cuerpo rígido depende sólo de la resultante y del momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre él, se concluye que dos *sistemas de fuerzas que son equipolentes,* esto es, que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, *también son equivalentes*; esto es, tienen exactamente el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado.†

Considere en particular el sistema de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (figura 16.6*a*) y el sistema de fuerzas efectivas asociadas con las partículas que forman dicho cuerpo (figura 16.6*b*). En la sección 14.2 se mostró que dos sistemas definidos de tal modo son equipolentes. Sin embargo, puesto que las partículas consideradas ahora constituyen un cuerpo rígido, se concluye de la discusión anterior que los dos sistemas son también equivalentes. En consecuencia, es posible establecer que *las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes a las fuerzas efectivas de las diferentes partículas que lo constituyen.* Este enunciado se conoce como *principio de d'Alembert*, en honor al matemático Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), aunque el enunciado original de d'Alembert se escribió de manera un poco diferente.

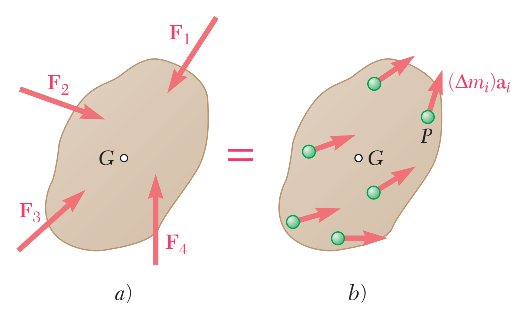


Figura 16.6

El hecho de que el sistema de fuerzas externas sea *equivalente* al sistema de las fuerzas efectivas se ha subrayado mediante el uso de signos de igualdad rojos en las figuras 16.6 y 16.7, donde al usar los resultados que se obtuvieron antes en esta sección, se sustituyeron las fuerzas efectivas por un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en el centro de masa G de la placa y por un par de momento $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

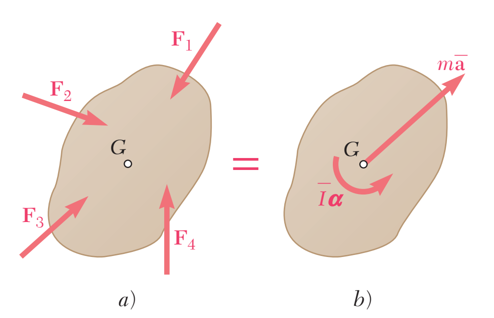


Figura 16.7

†Este resultado ya se había obtenido en la sección 3.19 del principio de transmisibilidad (sección 3.3). Sin embargo, la deducción presente es independiente de ese principio y permitirá eliminarlo de los axiomas de la mecánica (sección 16.5).

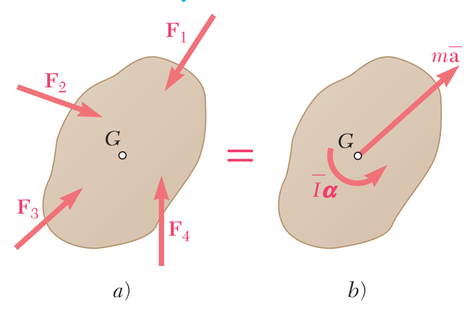


Figura 16.7 (*repetida*)

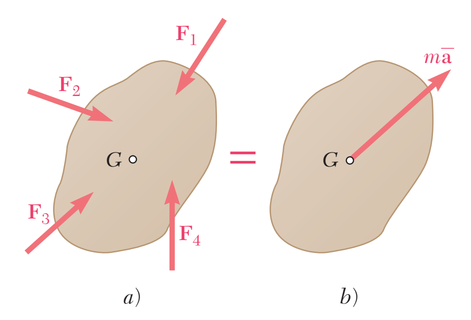


Figura 16.8 Traslación.

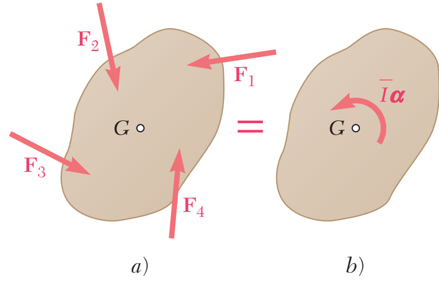


Figura 16.9 Rotación centroidal.

Traslación. En el caso de un cuerpo en traslación, la aceleración angular del mismo es idénticamente igual a cero y sus fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G (figura 16.8). De tal modo, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido en traslación pasa por el centro de masa del cuerpo y es igual a $m\bar{\mathbf{a}}$.

Rotación centroidal. Cuando una placa o, más generalmente, un cuerpo simétrico con respecto al plano de referencia, gira alrededor de un eje fijo perpendicular al plano de referencia y pasa por su centro de masa G, se afirma que el cuerpo está en *rotación centroidal.* Puesto que la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ es idénticamente igual a cero, las fuerzas efectivas del cuerpo se reducen al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ (figura 16.9). De tal manera, las fuerzas extemas que actúan sobre un cuerpo en una rotación centroidal son equivalentes a un par de momento $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

Movimiento plano general. Al comparar la figura 16.7 con las figuras 16.8 y 16.9, se observa que desde el punto de vista de la *cinética,* el movimiento plano más general de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia puede reemplazarse por la suma de una traslación y una rotación centroidales. Hay que advertir que este enunciado es más restrictivo que el enunciado similar que se hizo antes desde el punto de vista de la *cinemática* (sección 15.5), ya que se requiere ahora que el centro de masa del cuerpo se elija como el punto de referencia.

En las ecuaciones (16.6) se observa que las primeras dos ecuaciones son idénticas a las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa m sujeta a las fuerzas dadas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . De ese modo se verifica que *el centro de masa G de un cuerpo rígido en movimiento plano se mueve como si la masa total del cuerpo estuviera concentrada en ese punto, y como si todas las fuerzas externas actuaran sobre él.* Recuérdese que este resultado ya se había obtenido en la sección 14.4 en el caso general de un sistema de partículas, donde éstas no necesariamente estaban conectadas en forma rígida. Se señaló también, como se hizo en la sección 14.4, que el sistema de las fuerzas externas no se reduce, en general, a un solo vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G. Por lo tanto, en el caso general del movimiento plano de un cuerpo rígido, *la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo no pasa por el centro de masa de este mismo.*

Por último, debe observarse que la última de las ecuaciones (16.6) seguiría siendo válida si el cuerpo rígido, aunque sujeto a las mismas fuerzas aplicadas, se hubiera restringido al girar alrededor de un eje fijo que pasara por G. De tal manera, *un cuerpo rígido en movimiento plano gira alrededor de su centro de masa como si este punto estuviera fijo.*

*16.5. OBSERVACIÓN ACERCA DE LOS AXIOMAS DE LA MECÁNICA DE CUERPOS RÍGIDOS

El hecho de que dos sistemas equipolentes de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son también equivalentes, esto es, tienen el mismo efecto sobre ese cuerpo rígido, ya se había establecido en la sección 3.19. Sin embargo, en ese caso se dedujo del *principio de transmisibilidad,* uno de los axiomas que se usan en nuestro estudio de la estática de cuerpos rígidos. Hay que observar que este axioma no se ha utilizado en el capítulo presente debido a que la segunda y tercera leyes de Newton hacen su uso innecesario en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos.

De hecho, el principio de transmisibilidad ahora se puede *deducir* de los otros axiomas empleados en el estudio de la mecánica. Este principio establecía, sin demostración (sección 3.3), que las condiciones de

equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido permanecen inalteradas si una fuerza **F** que actúa en un punto dado del cuerpo rígido se sustituye por una fuerza **F′** de la misma magnitud y la misma dirección, pero actuando en un punto diferente, siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción. Sin embargo, ya que **F** y **F′** tienen el mismo momento alrededor de cualquier punto dado, es claro que forman dos sistemas equipolentes de fuerzas externas. De tal modo, ahora se puede *demostrar,* como resultado de lo que se estableció en la sección anterior, que **F** y **F′** tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido (figura 3.3).

En consecuencia, el principio de transmisibilidad puede eliminarse de la lista de axiomas que se requieren para el estudio de la mecánica de cuerpos rígidos. Estos axiomas se reducen a la ley del paralelogramo para la suma de vectores y a las leyes de movimiento de Newton.

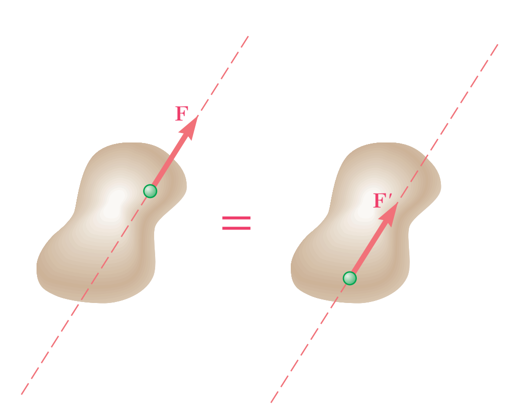


Figura 16.3 (*repetida*)

16.6. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLICAN EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO

Se vio en la sección 16.4 que cuando un cuerpo rígido está en movimiento plano, existe una relación fundamental entre las fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , que actúan sobre el cuerpo, la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ de su centro de masa y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. Esta relación, que se representa en la figura 16.7 en la forma de una *ecuación de diagrama del cuerpo libre,* se emplea para determinar la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ producida por el sistema de fuerzas dado que actúa sobre un cuerpo rígido o, de manera inversa, para determinar las fuerzas que producen un movimiento determinado del cuerpo rígido.

Las tres ecuaciones algebraicas (16.6) se utilizan para resolver problemas de movimiento plano.† Sin embargo, la experiencia en estática sugiere que la solución de muchos problemas en los que intervienen cuerpos rígidos podría simplificarse mediante una elección apropiada del punto alrededor del cual se calculan los momentos de las fuerzas. En consecuencia, resulta preferible recordar la relación existente entre las fuerzas y las aceleraciones en la forma gráfica que se presenta en la figura 16.7 y deducir de esta relación fundamental las ecuaciones de componentes o momentos que mejor se adapten a la solución del problema considerado.

La relación fundamental que se muestra en la figura 16.7 se presenta en forma alternativa si se agrega a las fuerzas externas un vector de inercia $-m\bar{\mathbf{a}}$ de sentido opuesto al de $\bar{\mathbf{a}}$, fijo en G, y un par inercial $-\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ de momento igual en magnitud a $\bar{I}\alpha$ y de sentido opuesto al de $\boldsymbol{\alpha}$ (figura 16.10). El sistema que se obtiene es equivalente a cero, y se dice que el cuerpo rígido está en *equilibrio dinámico.*

Si el principio de equivalencia de fuerzas externas y efectivas se aplica de manera directa, como en la figura 16.7, o si se introduce el concepto de equilibrio dinámico, como en la figura 16.10, el uso de las ecuaciones de diagrama de cuerpo libre que muestran la relación vectorial que existe entre las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo rígido y las resultantes aceleraciones lineal y angular ofrecen ventajas considerables respecto a la aplicación a ciegas de las fórmulas (16.6). Las ventajas pueden resumirse de la manera siguiente:

1. El uso de una representación gráfica ofrece una comprensión mucho más clara del efecto de las fuerzas sobre el movimiento del cuerpo.

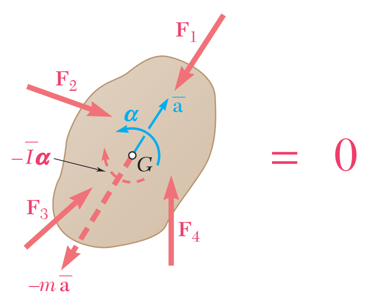


Figura 16.10

†Recuérdese que la última de las ecuaciones (16.6) sólo es válida en el caso de movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia. En todos los demás casos, deben usarse los métodos del capítulo 18.

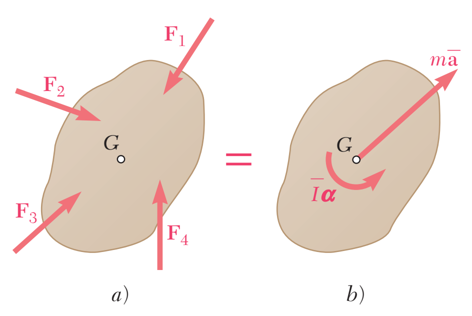


Figura 16.7 (*repetida*)

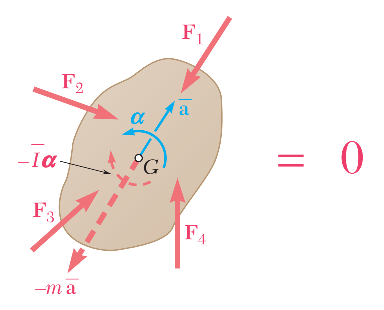


Figura 16.10 (*repetida*)

2. Este planteamiento posibilita dividir la solución de un problema dinámico en dos partes: en la primera, el análisis de las características cinemáticas y cinéticas del problema conduce a los diagramas de cuerpo libre de la figura 16.7 o 16.10; en la segunda, el diagrama obtenido se usa para analizar las diferentes fuerzas y vectores implicados mediante los métodos del capítulo 3.
3. Para el análisis del movimiento plano de un cuerpo rígido se proporciona un planteamiento unificado, independientemente del tipo particular de movimiento implicado. Si bien la cinemática de los diversos movimientos considerados varía de un caso a otro, el planteamiento de la cinética del movimiento es consistentemente el mismo. En cada caso se dibujará un diagrama que demuestre las fuerzas externas, los vectores $m\bar{\mathbf{a}}$ asociados con el movimiento de G y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ asociado con la rotación del cuerpo alrededor de G.
4. La resolución del movimiento plano de un cuerpo rígido en una traslación y una rotación centroidal, utilizado aquí, es un concepto básico que es posible aplicar de manera efectiva en todo el estudio de la mecánica. Se volverá a utilizar en el capítulo 17 con el método del trabajo y la energía y el método del impulso y la cantidad de movimiento.
5. Como se verá en el capítulo 18, es posible ampliar este planteamiento al estudio del movimiento general en tres dimensiones de un cuerpo rígido. El movimiento del cuerpo se volverá a descomponer en una traslación y en una rotación alrededor del centro de masa, y se utilizarán las ecuaciones de diagrama de cuerpo libre para indicar la relación que existe entre las fuerzas externas y las razones de cambio de las cantidades de movimiento lineal y angular del cuerpo.

16.7. SISTEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS

El método que se describe en la sección anterior también puede emplearse en problemas que implican el movimiento plano de varios cuerpos rígidos conectados. Para cada parte del sistema, es posible dibujar un diagrama similar al de la figura 16.7 o 16.10. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de estos diagramas se resuelven de manera simultánea.

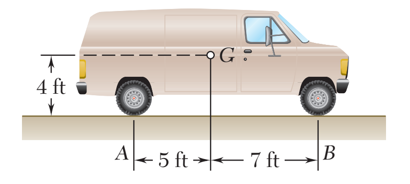
En algunos casos, como en el problema resuelto 16.3, basta con dibujar un solo diagrama para todo el sistema. Este diagrama incluirá todas las fuerzas externas, así como los vectores $m\bar{\mathbf{a}}$ y los pares $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ asociados con las diversas partes del sistema. Sin embargo, fuerzas externas como las ejercidas por cables de conexión, pueden omitirse, ya que ocurren en pares de fuerzas iguales y opuestas y, por ello, son equipolentes a cero. Las ecuaciones obtenidas al expresar que el sistema de las fuerzas externas es equipolente al sistema de las fuerzas efectivas se resuelve para las incógnitas restantes.†

No es posible utilizar este segundo planteamiento en problemas que implican más de tres incógnitas, ya que sólo se dispone de tres ecuaciones de movimiento cuando se usa un solo diagrama. No es necesario comentar más acerca de este punto, ya que el análisis correspondiente sería completamente similar al que se da en la sección 6.11 en el caso del equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos.



Fotografía 16.3 El montacargas y la carga en movimiento pueden analizarse como un sistema de dos cuerpos rígidos conectados en movimiento plano.

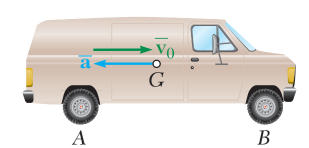
†Observe que no es posible hablar de sistemas *equivalentes*, ya que no se está tratando con un solo cuerpo rígido.



PROBLEMA RESUELTO 16.1

Cuando la velocidad hacia adelante de la camioneta que se muestra era de 30 ft/s, se aplicaron repentinamente los frenos, lo que provocó que las cuatro ruedas dejaran de girar. Se pudo observar que la camioneta patinó 20 ft antes de detenerse. Determine la magnitud de la reacción normal y de la fuerza de fricción en cada rueda cuando la camioneta patinó.

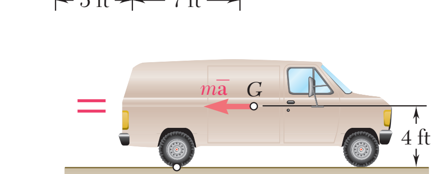
SOLUCIÓN



Cinemática de movimiento. Eligiendo el sentido positivo hacia la derecha y utilizando las ecuaciones de movimiento uniformemente acelerado, se escribe

$$\bar{v}_0 = +30 \text{ ft/s} \qquad \bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}\bar{x} \qquad 0 = (30)^2 + 2\bar{a}(20)$$
$$\bar{a} = -22.5 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}} = 22.5 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$$

Ecuaciones de movimiento. Las fuerzas externas consisten en el peso **W** de la camioneta y en las reacciones normales y fuerzas de fricción en las ruedas. (Los vectores $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{F}_A$ representan la suma de las reacciones en las ruedas posteriores, en tanto que $\mathbf{N}_B$ y $\mathbf{F}_B$ la suma de las reacciones en las ruedas frontales.) Puesto que la camioneta está en traslación, las fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G. Al expresar que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas se obtienen tres ecuaciones de movimiento.



$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \qquad N_A + N_B - W = 0$$

Puesto que $F_A = \mu_k N_A$ y $F_B = \mu_k N_B$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética, se encuentra que

$$F_A + F_B = \mu_k(N_A + N_B) = \mu_k W$$

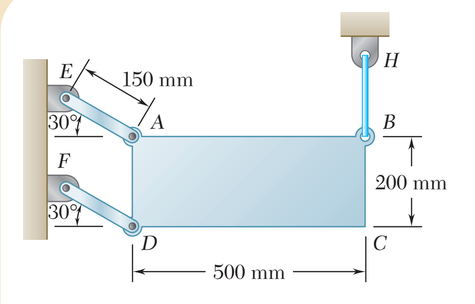
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad -(F_A + F_B) = -m\bar{a}$$
$$-\mu_k W = -\frac{W}{32.2 \text{ ft/s}^2}(22.5 \text{ ft/s}^2)$$
$$\mu_k = 0.699$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{ef}}: \qquad -W(5 \text{ ft}) + N_B(12 \text{ ft}) = m\bar{a}(4 \text{ ft})$$
$$-W(5 \text{ ft}) + N_B(12 \text{ ft}) = \frac{W}{32.2 \text{ ft/s}^2}(22.5 \text{ ft/s}^2)(4 \text{ ft})$$
$$N_B = 0.650W$$
$$F_B = \mu_k N_B = (0.699)(0.650W) \qquad F_B = 0.454W$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \qquad N_A + N_B - W = 0$$
$$N_A + 0.650W - W = 0$$
$$N_A = 0.350W$$
$$F_A = \mu_k N_A = (0.699)(0.350W) \qquad F_A = 0.245W$$

Reacciones en cada rueda. Hay que recordar que los valores calculados representan la suma de las reacciones de las dos ruedas frontales o las dos ruedas traseras, por lo que se obtiene la magnitud de las reacciones en cada rueda al escribir

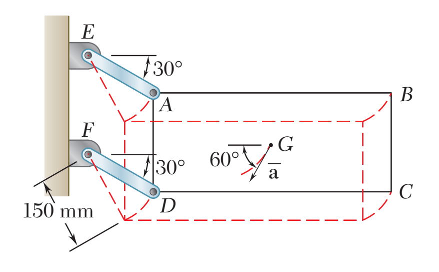
$$N_{\text{frontal}} = \tfrac{1}{2}N_B = 0.325W \qquad N_{\text{trasera}} = \tfrac{1}{2}N_A = 0.175W \quad ◀$$
$$F_{\text{frontal}} = \tfrac{1}{2}F_B = 0.227W \qquad F_{\text{trasera}} = \tfrac{1}{2}F_A = 0.122W \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 16.2

La placa delgada *ABCD* de 8 kg de masa se mantiene en la posición indicada mediante el alambre *BH* y dos eslabones *AE* y *DF*. Ignorando la masa de los eslabones determine *a*) la aceleración de la placa, *b*) la fuerza de cada eslabón inmediatamente después de que se corta el alambre *BH*.

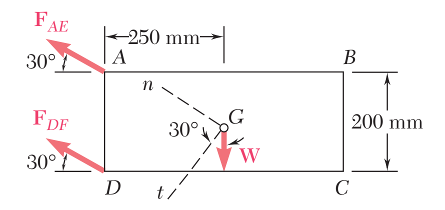
SOLUCIÓN

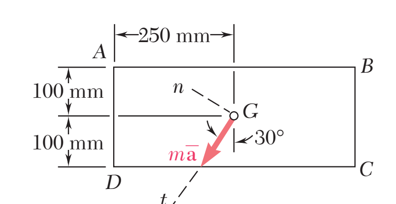


Cinemática de movimiento. Después de que se ha cortado el alambre *BH* se observa que las esquinas *A* y *D* se mueven a lo largo de círculos paralelos de 150 mm de radio centrados, respectivamente, en *E* y *F*, por lo que el movimiento de la placa es una traslación curvilínea. Las partículas que la forman se mueven a lo largo de círculos paralelos de 150 mm de radio.

En el instante que se corta el alambre *BH*, la velocidad de la placa es cero. Así, la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa *G* de la placa es tangente a la trayectoria circular que se describirá mediante *G*.

Ecuación de movimiento. Las fuerzas externas consisten en el peso **W** y las fuerzas $\mathbf{F}_{AE}$ y $\mathbf{F}_{DF}$ ejercidas por los eslabones. Puesto que la placa está en traslación, las fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en *G* y dirigido a lo largo del eje *t*. Se dibuja una ecuación de diagrama de cuerpo libre para mostrar que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas.





***a*) Aceleración de la placa.**

$+\swarrow \Sigma F_t = \Sigma (F_t)_{ef}$:

$$W \cos 30° = m\bar{a}$$
$$mg \cos 30° = m\bar{a}$$
$$\bar{a} = g \cos 30° = (9.81 \text{ m/s}^2) \cos 30° \qquad (1)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = 8.50 \text{ m/s}^2 \measuredangle 60° \blacktriangleleft$$

***b*) Fuerzas en los eslabones *AE* y *DF*.**

$+\nwarrow \Sigma F_n = \Sigma (F_n)_{ef}$: $\qquad F_{AE} + F_{DF} - W \text{ sen } 30° = 0 \qquad (2)$

$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma (M_G)_{ef}$:

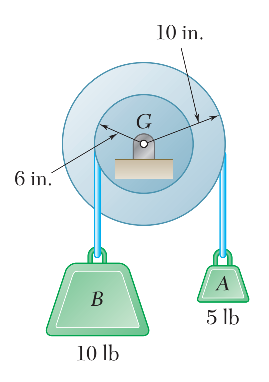
$$(F_{AE} \text{ sen } 30°)(250 \text{ mm}) - (F_{AE} \cos 30°)(100 \text{ mm}) + (F_{DF} \text{ sen } 30°)(250 \text{ mm}) + (F_{DF} \cos 30°)(100 \text{ mm}) = 0$$
$$38.4F_{AE} + 211.6F_{DF} = 0$$
$$F_{DF} = -0.1815F_{AE} \qquad (3)$$

Al sustituir F_{DF} de (3) en (2) se escribe

$$F_{AE} - 0.1815F_{AE} - W \text{ sen } 30° = 0$$
$$F_{AE} = 0.6109W$$
$$F_{DF} = -0.1815(0.6109W) = -0.1109W$$

Al notar que $W = mg = (8 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 78.48$ N, se tiene

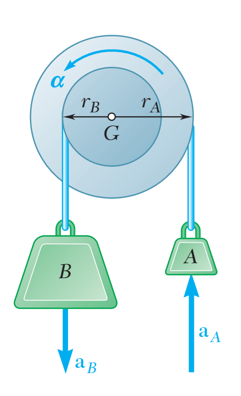
$$F_{AE} = 0.6109(78.48 \text{ N}) \qquad F_{AE} = 47.9 \text{ N } T \blacktriangleleft$$
$$F_{DF} = -0.1109(78.48 \text{ N}) \qquad F_{DF} = 8.70 \text{ N } C \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.3

Una polea de 12 lb y de 8 in. de radio de giro se conecta a dos bloques en la forma indicada. Suponiendo que no hay fricción en el eje, determine la aceleración angular de la polea y la aceleración de cada bloque.

SOLUCIÓN



Sentido del movimiento. Aunque puede suponerse un sentido arbitrario del movimiento (ya que no intervienen fuerzas de fricción) y después verificarse mediante el signo de la respuesta, es preferible determinar primero el sentido de rotación real de la polea. Se determina primero el peso del bloque B que se requiere para mantener el equilibrio de la polea cuando éste actúa sobre el bloque A de 5 lb. Se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0: \qquad W_B(6 \text{ in.}) - (5 \text{ lb})(10 \text{ in.}) = 0 \qquad W_B = 8.33 \text{ lb}$$

Puesto que el bloque B realmente pesa 10 lb, la polea girará en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Cinemática del movimiento. Suponiendo $\boldsymbol{\alpha}$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y advirtiendo que $a_A = r_A\alpha$ y $a_B = r_B\alpha$, se obtiene

$$\mathbf{a}_A = (\tfrac{10}{12} \text{ ft})\alpha \uparrow \qquad \mathbf{a}_B = (\tfrac{6}{12} \text{ ft})\alpha \downarrow$$

Ecuaciones de movimiento. Se considera un sistema simple compuesto de la polea y los dos bloques. Las fuerzas externas a este sistema consisten en los pesos de las poleas y de los dos bloques y en la reacción en G. (Las fuerzas que ejercen los cables sobre las poleas y sobre los bloques son internas al sistema considerado y se cancelan.) Puesto que el movimiento de la polea es una rotación centroidal y el movimiento de cada bloque es una traslación, las fuerzas efectivas se reducen al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ y los dos vectores $m\mathbf{a}_A$ y $m\mathbf{a}_B$. El momento centroidal de inercia de la polea es

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = \frac{W}{g}\bar{k}^2 = \frac{12 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(\tfrac{8}{12} \text{ ft})^2 = 0.1656 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Puesto que el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema de fuerzas efectivas se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}:$$

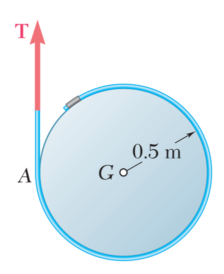
$$(10 \text{ lb})(\tfrac{6}{12} \text{ ft}) - (5 \text{ lb})(\tfrac{10}{12} \text{ ft}) = +\bar{I}\alpha + m_B a_B(\tfrac{6}{12} \text{ ft}) + m_A a_A(\tfrac{10}{12} \text{ ft})$$

$$(10)(\tfrac{6}{12}) - (5)(\tfrac{10}{12}) = 0.1656\alpha + \tfrac{10}{32.2}(\tfrac{6}{12}\alpha)(\tfrac{6}{12}) + \tfrac{5}{32.2}(\tfrac{10}{12}\alpha)(\tfrac{10}{12})$$

$$\alpha = +2.374 \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} = 2.37 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

$$a_A = r_A\alpha = (\tfrac{10}{12} \text{ ft})(2.374 \text{ rad/s}^2) \qquad \mathbf{a}_A = 1.978 \text{ ft/s}^2 \uparrow \blacktriangleleft$$

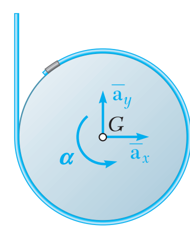
$$a_B = r_B\alpha = (\tfrac{6}{12} \text{ ft})(2.374 \text{ rad/s}^2) \qquad \mathbf{a}_B = 1.187 \text{ ft/s}^2 \downarrow \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.4

Se enrolla una cuerda alrededor de un disco homogéneo de radio $r = 0.5$ m y masa $m = 15$ kg. Si la cuerda se jala hacia arriba con una fuerza **T** de 180 N de magnitud, determine *a*) la aceleración del centro del disco, *b*) la aceleración angular del disco, *c*) la aceleración de la cuerda.

SOLUCIÓN



Ecuaciones de movimiento. Se supone que las componentes $\bar{\mathbf{a}}_x$ y $\bar{\mathbf{a}}_y$ de la aceleración del centro están dirigidas, respectivamente, hacia la derecha y hacia arriba, y que la aceleración angular del disco es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Las fuerzas externas que actúan sobre el disco consisten en el peso **W** y la fuerza **T** que ejerce la cuerda. Este sistema es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, las cuales consisten en un vector de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_x$ y $m\bar{\mathbf{a}}_y$ fijo en G y un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Se escribe

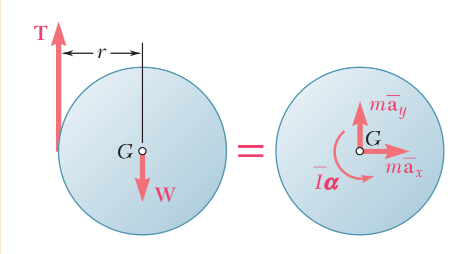
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad 0 = m\bar{a}_x \qquad \bar{\mathbf{a}}_x = 0 \quad ◀$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \qquad T - W = m\bar{a}_y$$

$$\bar{a}_y = \frac{T - W}{m}$$

Puesto que $T = 180$ N, $m = 15$ kg y $W = (15 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 147.1$ N, se tiene

$$\bar{a}_y = \frac{180 \text{ N} - 147.1 \text{ N}}{15 \text{ kg}} = +2.19 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}}_y = 2.19 \text{ m/s}^2 \uparrow \quad ◀$$

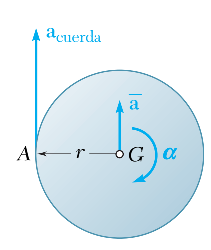


$$+\circlearrowleft\Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}: \qquad -Tr = \bar{I}\alpha$$

$$-Tr = (\tfrac{1}{2}mr^2)\alpha$$

$$\alpha = -\frac{2T}{mr} = -\frac{2(180 \text{ N})}{(15 \text{ kg})(0.5 \text{ m})} = -48.0 \text{ rad/s}^2$$

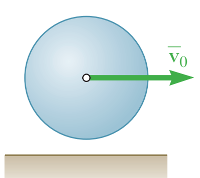
$$\boldsymbol{\alpha} = 48.0 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \quad ◀$$



Aceleración de la cuerda. Puesto que la aceleración de la cuerda es igual a la componente tangencial de la aceleración del punto A sobre el disco se escribe

$$\mathbf{a}_{\text{cuerda}} = (\mathbf{a}_A)_t = \bar{\mathbf{a}} + (\mathbf{a}_{A/G})_t$$
$$= [2.19 \text{ m/s}^2 \uparrow] + [(0.5 \text{ m})(48 \text{ rad/s}^2)\uparrow]$$

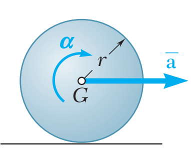
$$\mathbf{a}_{\text{cuerda}} = 26.2 \text{ m/s}^2 \uparrow \quad ◀$$



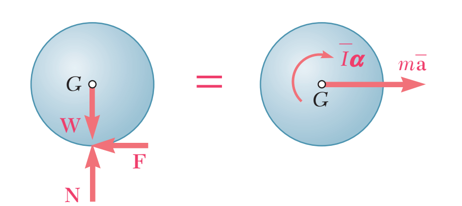
PROBLEMA RESUELTO 16.5

Una esfera uniforme de masa m y radio r se lanza a lo largo de una superficie horizontal rugosa con una velocidad lineal $\overline{\mathbf{v}}_0$ y sin velocidad angular. Al denotar por μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y el piso, determine *a*) el tiempo t_1 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizar, *b*) la velocidad lineal y la velocidad angular de la esfera en el tiempo t_1.

SOLUCIÓN



Ecuaciones de movimiento. El sentido positivo se elige hacia la derecha para $\overline{\mathbf{a}}$ y el sentido de las manecillas del reloj para $\boldsymbol{\alpha}$. Las fuerzas externas que actúan sobre la esfera consisten en el peso $\mathbf{W}$, la reacción normal $\mathbf{N}$ y la fuerza de fricción $\mathbf{F}$. Puesto que el punto de la esfera en contacto con la superficie se está deslizando hacia la derecha, la fuerza de fricción $\mathbf{F}$ apunta hacia la izquierda. Mientras la esfera se desliza, la magnitud de la fuerza de fricción es $F = \mu_k N$. Las fuerzas efectivas consisten en el vector $m\overline{\mathbf{a}}$ fijo en G y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Expresando que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas se escribe



$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}$: $\quad N - W = 0$

$$N = W = mg \qquad F = \mu_k N = \mu_k mg$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}$: $\quad -F = m\bar{a} \qquad -\mu_k mg = m\bar{a} \qquad \bar{a} = -\mu_k g$

$+\downarrow \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}$: $\quad Fr = \bar{I}\alpha$

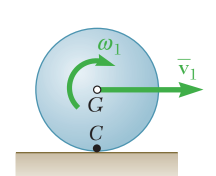
Al notar que $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ y sustituir el valor obtenido para F, se expresa

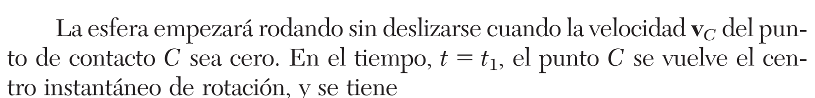
$$(\mu_k mg)r = \tfrac{2}{5}mr^2\alpha \qquad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}$$

Cinemática de movimiento. Conforme la esfera gira y se desliza, sus movimientos lineal y angular son uniformemente acelerados.

$$t = 0,\ \bar{v} = \bar{v}_0 \qquad \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t = \bar{v}_0 - \mu_k g t \tag{1}$$

$$t = 0,\ \omega_0 = 0 \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\right)t \tag{2}$$




La esfera empezará rodando sin deslizarse cuando la velocidad $\mathbf{v}_C$ del punto de contacto C sea cero. En el tiempo, $t = t_1$, el punto C se vuelve el centro instantáneo de rotación, y se tiene

$$\bar{v}_1 = r\omega_1 \tag{3}$$

Al sustituir en (3) los valores obtenidos para $\bar{v}_1$ y ω_1 al hacer $t = t_1$ en (1) y (2), respectivamente, se escribe

$$\bar{v}_0 - \mu_k g t_1 = r\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t_1\right) \qquad t_1 = \frac{2}{7}\frac{\bar{v}_0}{\mu_k g} \quad \blacktriangleleft$$

Al sustituir t_1 en (2) se encuentra

$$\omega_1 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t_1 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\left(\frac{2}{7}\frac{\bar{v}_0}{\mu_k g}\right) \qquad \omega_1 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_0}{r} \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_0}{r}\downarrow \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_1 = r\omega_1 = r\left(\frac{5}{7}\frac{\bar{v}_0}{r}\right) \qquad \bar{v}_1 = \frac{5}{7}\bar{v}_0 \qquad \mathbf{v}_1 = \frac{5}{7}\bar{v}_0 \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En este capítulo se estudia el *movimiento plano* de cuerpos rígidos, y en esta primera lección se consideran cuerpos rígidos que tienen la libertad de moverse bajo la acción de fuerzas aplicadas.

1. *Fuerzas efectivas.* Hay que recordar primero que un cuerpo rígido consiste en un gran número de partículas. Se encontró que las fuerzas efectivas de las partículas que forman el cuerpo son equivalentes a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en el centro de masa G del cuerpo y a un par de momento $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ [figura 16.7]. Al percatarnos de que las fuerzas aplicadas son equivalentes a las fuerzas efectivas, se escribe

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \tag{16.5}$$

donde $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ son las componentes x y y de la aceleración del centro de masa G del cuerpo y α es la aceleración angular de este mismo. Es importante advertir que cuando se usan estas ecuaciones, los *momentos de las fuerzas aplicadas deben calcularse con respecto al centro de masa del cuerpo.* Sin embargo, usted aprenderá un método más eficiente de solución basado en el uso de la ecuación de diagramas de cuerpo libre.

2. *Ecuación de diagramas de cuerpo libre.* El primer paso en la solución de un problema debe ser dibujar *una ecuación de diagramas de cuerpo libre.*

a) Una ecuación de diagramas de cuerpo libre consiste en dos diagramas que representan dos sistemas equivalentes de vectores. *En el primer diagrama* deben mostrarse *las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo,* incluyendo las fuerzas aplicadas, las reacciones en los soportes y el peso del cuerpo. *En el segundo diagrama* es necesario indicar el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ que representa *las fuerzas efectivas.*

b) El uso de una ecuación de diagramas de cuerpo libre permite *sumar componentes en cualquier dirección y sumar momentos alrededor de cualquier punto.* Al escribir las tres ecuaciones de movimiento necesarias para resolver un problema determinado, es posible seleccionar una o más ecuaciones que incluyen una sola incógnita. Al resolver primero estas ecuaciones y sustituir los valores obtenidos para las incógnitas en las ecuaciones restantes se obtendrá una solución más simple.

3. *Movimiento plano de un cuerpo rígido.* Los problemas que tendrán que resolverse entrarán dentro de una de las siguientes categorías.

a) Cuerpo rígido en traslación. Para un cuerpo en traslación, la aceleración angular es cero. Las fuerzas efectivas se reducen *al vector* $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado en el centro de masa [problemas resueltos 16.1 y 16.2].

b) Cuerpo rígido en rotación centroidal. Para un cuerpo en rotación centroidal, la aceleración del centro de masa es cero. Las fuerzas efectivas se reducen *al par* $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ [problema resuelto 16.3].

c) Cuerpo rígido en movimiento plano general. Es posible considerar el movimiento plano general de un cuerpo rígido como la suma de una traslación y una rotación centroidal. Las fuerzas efectivas son equivalentes al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ [problemas resueltos 16.4 y 16.5].

4. Movimiento plano de un sistema de cuerpos rígidos. Es necesario dibujar primero una ecuación de diagramas de cuerpo libre que incluya todos los cuerpos rígidos del sistema. Un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ se aplican a cada uno de los cuerpos. Sin embargo, las fuerzas que ejercen entre sí los diferentes cuerpos del sistema pueden omitirse, puesto que ocurren en pares de fuerzas iguales y opuestas.

a) Si no intervienen más de tres incógnitas es posible emplear esta ecuación de diagramas de cuerpo libre y sumar las componentes en cualquier dirección, así como los momentos alrededor de cualquier punto para obtener ecuaciones que pueden resolverse respecto a las incógnitas deseadas [problema resuelto 16.3].

b) Si intervienen más de tres incógnitas será necesario dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre independiente para cada uno de los cuerpos rígidos del sistema. Se tienen que incluir tanto las fuerzas internas como las externas en cada una de las ecuaciones de diagramas de cuerpo libre, y es necesario tener cuidado para representar con vectores iguales y opuestos las fuerzas que dos cuerpos ejercen entre sí.

Problemas

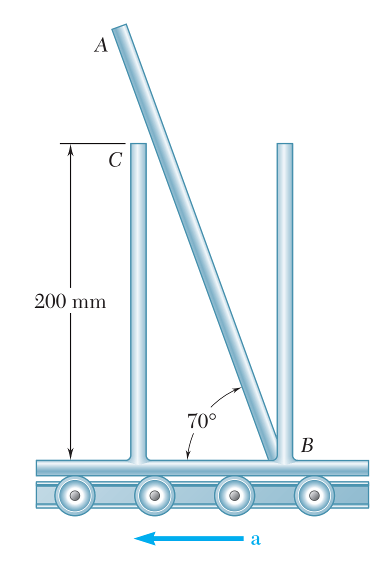


Figura P16.1 y P16.2

16.1 Un sistema transportador está equipado con paneles verticales y una barra *AB* de 300 mm con masa de 2.5 kg se coloca entre dos paneles, como se muestra en la figura. Si la aceleración del sistema es de 1.5 m/s^2 hacia la izquierda, determine *a*) la fuerza ejercida sobre la barra en *C*, *b*) la reacción en *B*.

16.2 Un sistema transportador está equipado con paneles verticales y una barra *AB* de 300 mm con masa de 2.5 kg se coloca entre dos paneles, como se muestra en la figura. Si la barra debe permanecer en la posición mostrada, determine la aceleración máxima permisible del sistema.

16.3 Un tablero de 6 pies se coloca en un camión con un extremo recargado contra un bloque asegurado al piso y el otro extremo descansa sobre una partición vertical. Si el tablero debe permanecer en la posición mostrada, determine la máxima aceleración permisible del camión.

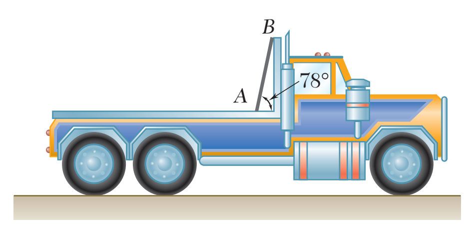


Figura P16.3

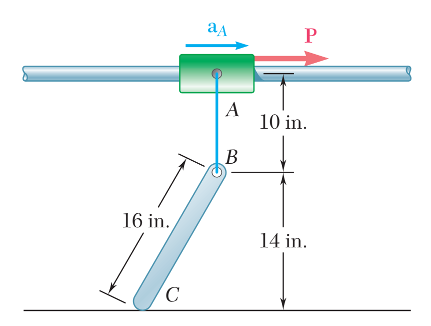


Figura P16.4

16.4 Una varilla uniforme *BC* que pesa 8 lb está conectada a un collarín *A* mediante una cuerda *AB* de 10 pulgadas. Si se desprecian las masas del collarín y la cuerda, determine *a*) la aceleración constante $\mathbf{a}_A$ mínima para la cual la cuerda y la varilla estarán en línea recta, *b*) la tensión correspondiente en la cuerda.

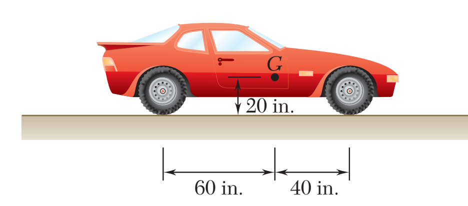


Figura P16.5

16.5 Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino es 0.80 para el automóvil que se muestra, determine la máxima aceleración posible sobre un camino plano, si se supone *a*) transmisión en las cuatro ruedas, *b*) transmisión en las ruedas traseras, *c*) transmisión en las ruedas delanteras.

16.6 Para la camioneta del problema resuelto 16.1, determine la distancia que se deslizará la camioneta si *a*) fallan los frenos de las ruedas traseras y *b*) fallan los frenos de las ruedas delanteras.

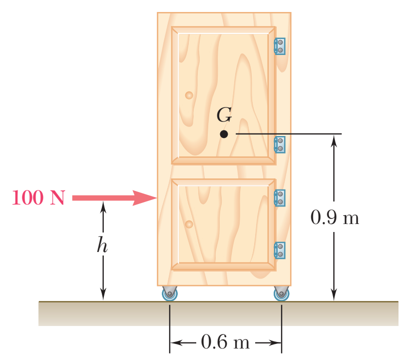


Figura P16.7

16.7 Un gabinete de 20 kg está montado sobre ruedas que le permiten moverse con libertad ($\mu = 0$) sobre el piso. Si se aplica una fuerza de 100 N en la forma indicada, determine *a*) la aceleración del gabinete y *b*) el intervalo de valores de *h* para el cual no se volcará el gabinete.

16.8 Retome el problema 16.7, y ahora suponga que las ruedas están bloqueadas y se deslizan sobre el suelo rugoso ($\mu_k = 0.25$).

16.9 El camión montacargas que se muestra en la figura pesa 2 250 lb y se usa para levantar una caja de peso $W = 2\,500$ lb. Si se sabe que el camión está en reposo, determine *a*) la aceleración de la caja hacia arriba para la cual las reacciones en las ruedas traseras *B* son cero, *b*) la reacción correspondiente en cada una de las ruedas delanteras *A*.

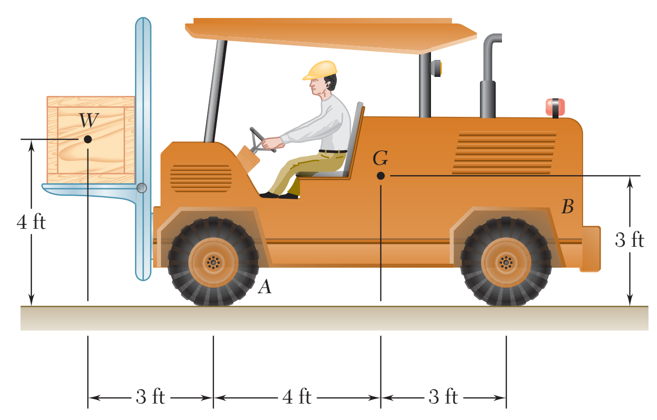


Figura *P16.9* y *P16.10*

16.10 El camión montacargas que se muestra en la figura pesa 2 250 lb y se usa para levantar una caja de peso $W = 2\,500$ lb. El camión se mueve hacia la izquierda a una velocidad de 10 pies/s cuando se aplican los frenos en las cuatro ruedas. Si el coeficiente de fricción estática entre la caja y el montacargas es de 0.30, determine la distancia mínima en la que el camión puede llevarse al reposo si la caja no debe deslizarse y si el camión no debe patinar.

16.11 La ménsula de soporte mostrada se utiliza para transportar una lata cilíndrica de una elevación a otra. Si $\mu_s = 0.25$ entre la lata y la ménsula, determine *a*) la magnitud de la aceleración ascendente **a** para la cual la lata se deslizará sobre la ménsula y *b*) el cociente más pequeño *h*/*d* para el cual la lata se volcará antes de deslizarse.

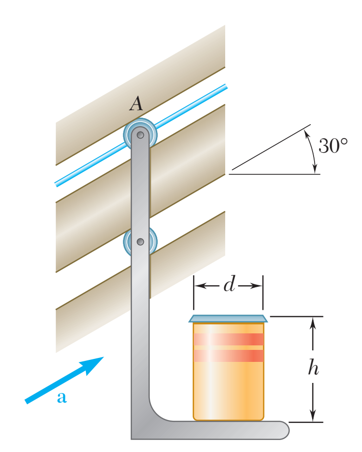


Figura P16.11

16.12 Retome el problema 16.11, y ahora suponga que la aceleración **a** de la ménsula se dirige hacia abajo.

16.13 Un barril completamente lleno y su contenido tienen un peso combinado de 200 lb. Un cilindro *C* está conectado al barril a una altura $h = 22$ in. como se muestra en la figura. Si $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.35$, determine el peso máximo de *C* para que el barril no se vuelque.

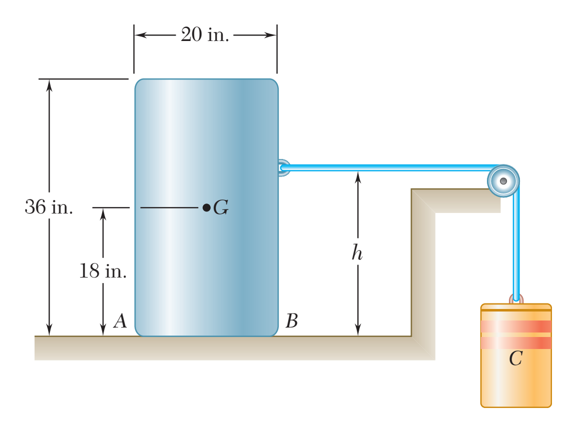


Figura P16.13

16.14 Una placa rectangular uniforme tiene una masa de 5 kg y se mantiene en posición mediante tres cuerdas, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\theta = 30°$, determine, inmediatamente después de cortar la cuerda *CF*, *a*) la aceleración de la placa, *b*) la tensión en las cuerdas *AD* y *BE*.

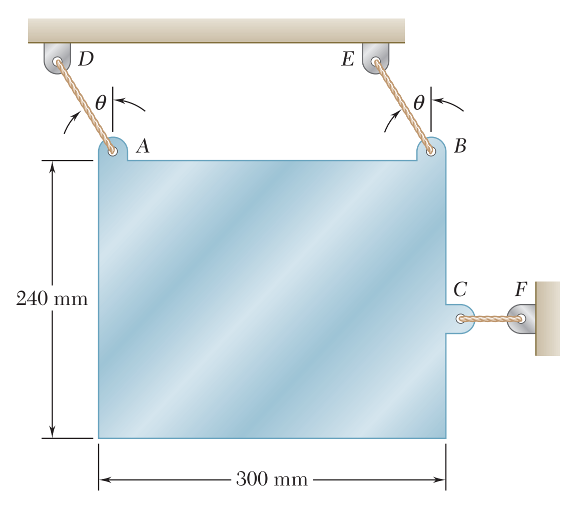


Figura P16.14 y *P16.15*

16.15 Una placa rectangular uniforme tiene una masa de 5 kg y se mantiene en posición mediante tres cuerdas, como se muestra en la figura. Determine el máximo valor de θ para el cual las cuerdas *AD* y *BE* permanecen tensas inmediatamente después de cortar la cuerda *CF*.

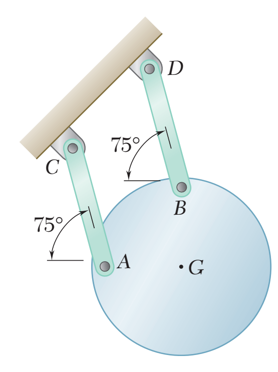


Figura P16.16

16.16 Una placa circular uniforme de 3 kg de masa se une a dos eslabones *AC* y *BD* de la misma longitud. Si la placa se suelta desde el reposo en la posición indicada, determine *a*) la aceleración de la placa, *b*) la tensión en cada eslabón.

16.17 Tres barras, cada una con un peso de 8 lb, están soldadas entre sí y se encuentran conectadas mediante pasadores a los dos eslabones *BE* y *CF*. Si se desprecia el peso de los eslabones, determine la fuerza en cada eslabón inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo.

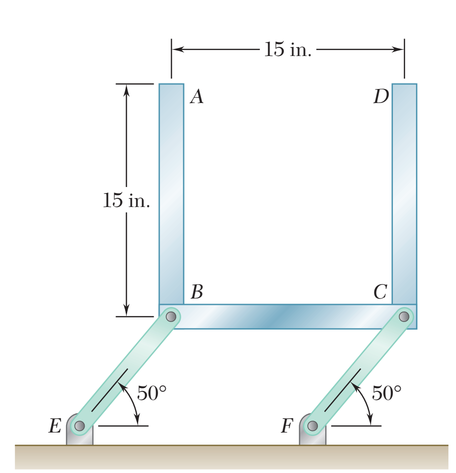


Figura P16.17

16.18 En el instante mostrado, la velocidad angular de los eslabones *BE* y *CF* es de 6 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj y disminuye a razón de 12 rad/s^2. Si la longitud de cada eslabón es de 300 mm y se desprecia el peso de los eslabones, determine *a*) la fuerza **P** y *b*) la fuerza correspondiente en cada eslabón. El peso de la varilla *AD* es de 6 kg.

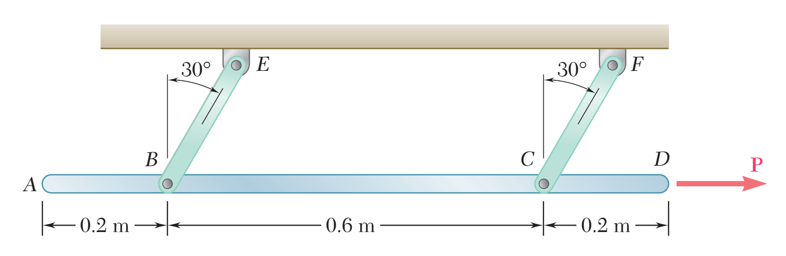


Figura *P16.18*

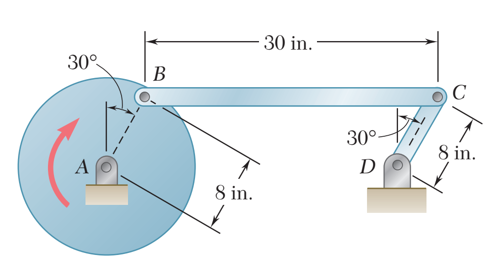


Figura *P16.19*

16.19 La barra *BC* de 15 lb conecta un disco centrado en *A* con la manivela *CD*. Si se sabe que el disco fue hecho rotar a una velocidad constante de 180 rpm, determine, para la posición que se muestra, las componentes verticales de las fuerzas que ejercen los pasadores en *B* y en *C* sobre la barra *BC*.

16.20 El ensamble triangular soldado ABC se guía mediante dos pasadores que se deslizan libremente en ranuras curvas paralelas con radio de 6 in. El ensamble soldado pesa 16 lb y su centro de masa está localizado en el punto G. Si en el instante mostrado la velocidad de cada pasador es de 30 in./s hacia abajo y a lo largo de las ranuras, determine a) la aceleración del ensamble, b) las reacciones en A y B.

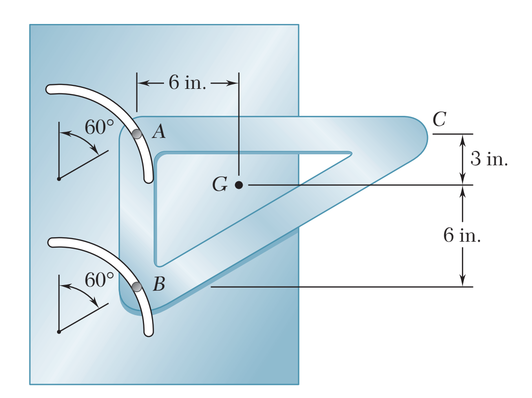


Figura P16.20

***16.21** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para las barras verticales AB del problema 16.17.

***16.22** Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la biela BC del problema 16.19.

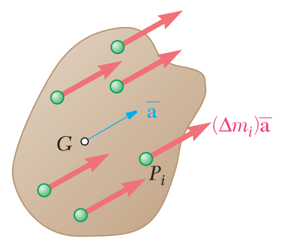


Figura P16.23

16.23 Para una placa rígida en traslación, demuestre que el sistema de las fuerzas efectivas consiste en vectores $(\Delta m_i)\bar{\mathbf{a}}$ fijos a las diversas partículas de la placa, donde $\bar{\mathbf{a}}$ es 1a aceleración del centro de masa G de la placa. Además, que al calcular su suma y la suma de sus momentos alrededor de G, las fuerzas efectivas se reducen a un solo vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G.

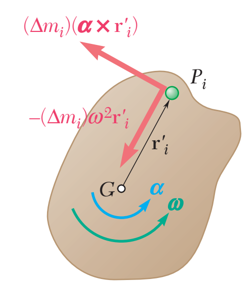


Figura P16.24

16.24 Para una placa rígida en rotación centroidal, demuestre que el sistema de las fuerzas efectivas consiste en los vectores $-(\Delta m_i)\omega^2\mathbf{r}'_i$ y $(\Delta m_i)(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'_i)$ asociados a 1as diversas partículas P_i de la placa, donde $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular de la placa, y $\mathbf{r}'_i$ denota la posición de la partícula P_i relativa al centro de masa G de la placa. Demuestre también, al calcular su suma y la suma de sus momentos alrededor de G, que las fuerzas efectivas se reducen a un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

16.25 Un volante de 6 000 lb tarda 10 minutos en detenerse a partir de una velocidad angular de 300 rpm. Si el radio de giro del volante es igual a 36 in., determine la magnitud promedio del par debido a la fricción cinética en los cojinetes.

16.26 El rotor de un motor eléctrico tiene una velocidad angular de 3 600 rpm cuando se interrumpen la carga y la energía eléctrica. El rotor de 50 kg, que tiene un radio de giro centroidal de 180 mm, se detiene posteriormente. Si la fricción cinética produce un par de 3.5 N · m de magnitud que se ejerce sobre el rotor, determine el número de revoluciones que el rotor realiza antes de detenerse.

16.27 El disco de 180 mm de radio está en reposo cuando se pone en contacto con una banda que se mueve a velocidad constante. Si se desprecia el peso del eslabón AB y se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es de 0.40, determine la aceleración angular del disco mientras ocurre deslizamiento.

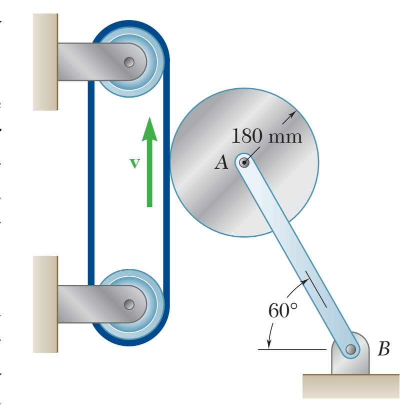


Figura P16.27

16.28 Retome el problema 16.27, y ahora suponga que la dirección del movimiento se invierte.

16.29 El tambor de freno, de 150 mm de radio, está unido a un volante más grande que no se muestra. El momento de inercia de la masa total del tambor y del volante es de 75 kg · m². Se usa un freno de banda para controlar el movimiento del sistema y el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es de 0.25. Si la fuerza **P** de 100 N se aplica cuando la velocidad angular inicial del sistema es de 240 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine el tiempo requerido para que el sistema se detenga. Demuestre que se obtiene el mismo resultado si la velocidad angular inicial del sistema es de 240 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

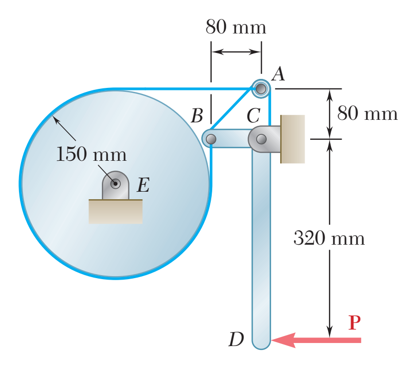


Figura P16.29

16.30 El tambor de freno, de 8 in. de radio, está unido a un volante más grande que no se muestra. El momento de inercia de la masa total del tambor y del volante es de 14 lb · ft · s² y el coeficiente de fricción cinética entre el tambor y la zapata del freno es de 0.35. Si la velocidad angular del volante es de 360 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se aplica una fuerza **P** de 75 lb de magnitud al pedal *C*, determine el numero de revoluciones realizadas por el volante antes de detenerse.

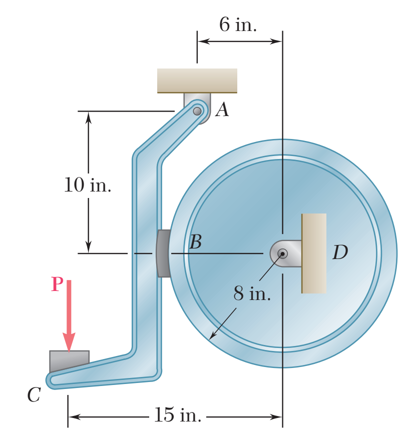


Figura P16.30

16.31 Retome el problema 16.30, y ahora suponga que la velocidad angular inicial del volante es de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

16.32 El volante que se muestra tiene un radio de 500 mm, una masa de 120 kg y un radio de giro de 375 mm. Un bloque *A* de 15 kg se une a un alambre que está enrollado alrededor del volante, y el sistema se suelta desde el reposo. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine *a*) la aceleración del bloque *A* y *b*) la velocidad del bloque *A* después de que éste se ha movido 1.5 m.

16.33 Para determinar el momento de inercia de la masa de un volante de 600 mm de radio, se une un bloque de 12 kg a un alambre que está enrollado alrededor del volante. Se suelta el bloque y se observa que desciende 3 m en 4.6 s. Para eliminar el cálculo de la fricción de rodamiento se usa un segundo bloque de 24 kg y se observa que desciende 3 m en 3.1 s. Si se supone que el momento del par debido a la fricción permanece constante, determine el momento de inercia de la masa del volante.

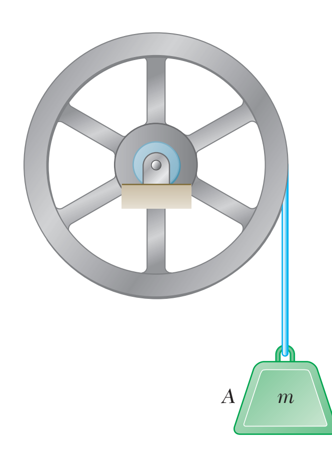


Figura *P16.32* y *P16.33*

16.34 Cada una de las poleas dobles que se muestran tiene un momento de inercia de masa de 15 lb · ft · s² y está inicialmente en reposo. El radio exterior es de 18 in. y el interior de 9 in. Determine *a*) la aceleración angular de cada polea y *b*) la velocidad angular de cada polea después de que el punto *A* en la cuerda se ha movido 10 ft.

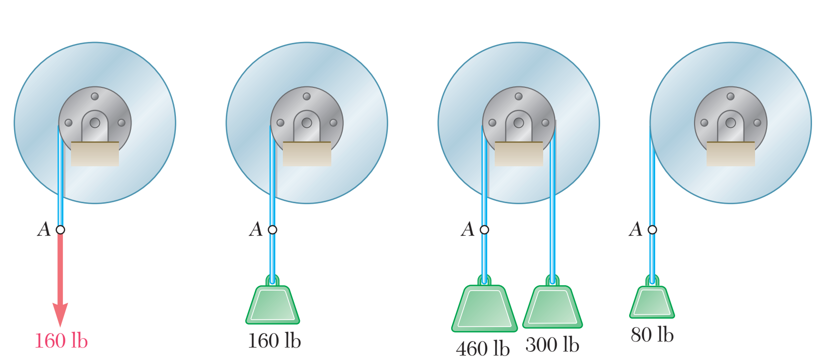


Figura P16.34

16.35 Cada uno de los engranes A y B pesa 20 lb y tiene un radio de giro de 7.5 in.; el engrane C pesa 5 lb y tiene un radio de giro de 3 in. Si un par **M** de magnitud constante 50 lb · in. se aplica al engrane C, determine *a*) la aceleración angular del engrane A, *b*) la fuerza tangencial que ejerce el engrane C sobre el engrane A.

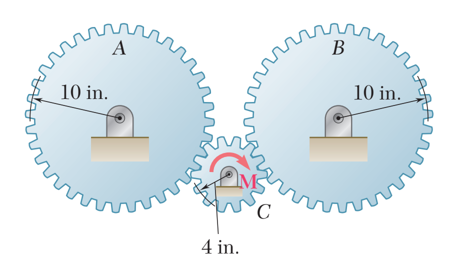


Figura P16.35

16.36 Retome el problema 16.35, y ahora suponga que el par **M** se aplica al disco A.

16.37 y 16.38 Dos discos uniformes y dos cilindros están ensamblados como se indica. El disco A pesa 20 lb y el disco B pesa 12 lb. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la aceleración *a*) del cilindro C, *b*) del cilindro D.

16.37 Los discos A y B están empernados entre sí y los cilindros están unidos a cuerdas separadas que están enrolladas sobre los discos.

16.38 Los cilindros están unidos a una sola cuerda que pasa sobre los discos. Suponga que no ocurre deslizamiento entre la cuerda y los discos.

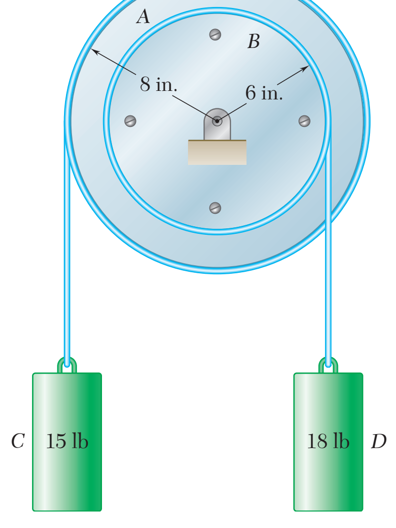


Figura P16.37

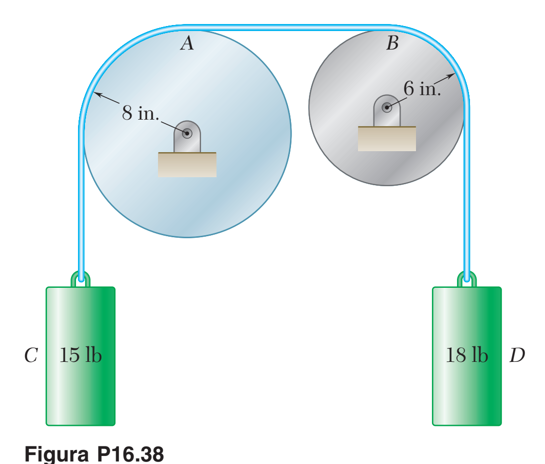


Figura P16.38

16.39 El disco A tiene una masa de 6 kg y una velocidad angular inicial de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj; el disco B tiene una masa de 3 kg que inicialmente está en reposo. Los discos se ponen en contacto aplicando una fuerza horizontal de 20 N de magnitud al eje del disco A. Si $\mu_k = 0.15$ entre los discos y se ignora la fricción de rodamiento, determine *a*) la aceleración angular de cada disco y *b*) la velocidad final angular de cada disco.

16.40 Retome el problema 16.39, y ahora suponga que inicialmente el disco A está en reposo y que el disco B tiene una velocidad angular de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

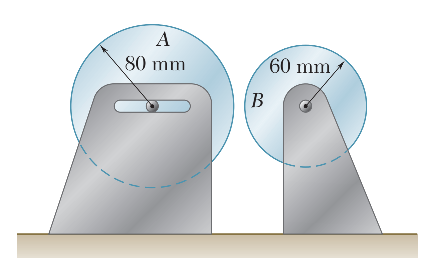


Figura P16.39

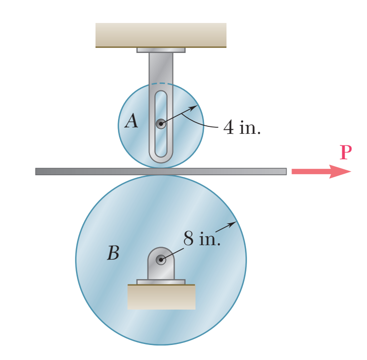


Figura P16.41

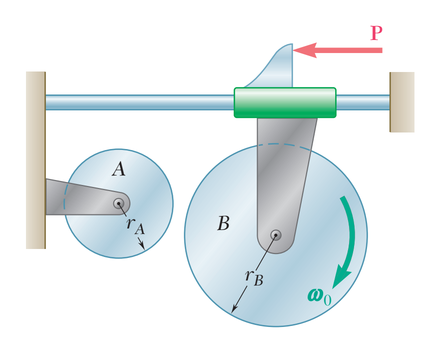


Figura *P16.43* y P.16.45

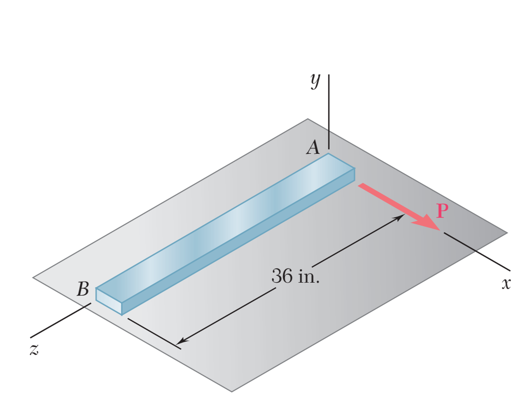


Figura P16.48

16.41 Una banda de masa despreciable pasa entre los cilindros A y B y se jala hacia la derecha con una fuerza **P**. Los cilindros A y B pesan, respectivamente, 5 y 20 lb. El eje del cilindro A puede deslizarse libremente en una ranura vertical y los coeficientes de fricción entre la banda y cada uno de los cilindros son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$. Para $P = 3.6$ lb, determine *a*) si ocurre deslizamiento entre la banda y algún cilindro, *b*) la aceleración angular de cada cilindro.

16.42 Retome el problema 16.41, ahora con $P = 2.00$ lb.

16.43 El disco A de 6 lb tiene un radio $r_A = 3$ in. y una velocidad angular inicial $\boldsymbol{\omega}_0 = 375$ rpm en el sentido de las manecillas del reloj. El disco B de 30 lb tiene un radio $r_B = 5$ in. y está en reposo. Una fuerza **P** de 2.5 lb de magnitud se aplica después para poner en contacto los discos. Si $\mu_k = 0.25$ entre los discos y se desprecia la fricción de rodamiento, determine *a*) la aceleración angular de cada disco y *b*) la velocidad angular final de cada disco.

16.44 Retome el problema 16.43, y ahora suponga que el disco A está inicialmente en reposo y que el disco B tiene una velocidad angular de 375 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

16.45 El disco B tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0$ cuando se pone en contacto con el disco A, que está en reposo. Demuestre que *a*) las velocidades angulares finales de los discos son independientes de los coeficientes de fricción μ_k entre los discos siempre que $\mu_k \neq 0$, *b*) que la velocidad angular final del disco B depende sólo de $\boldsymbol{\omega}_0$ y del cociente de las masas m_A y m_B de los dos discos.

16.46 Muestre que el sistema de las fuerzas efectivas de una placa rígida en movimiento plano se reduce a un solo vector, y exprese la distancia desde el centro de masa G de la placa a la línea de acción de este vector en términos del radio de giro centroidal $\bar{k}$ de la placa, la magnitud $\bar{a}$ de la aceleración G, y la aceleración angular α.

16.47 Para una placa rígida en movimiento plano, demuestre que el sistema de las fuerzas efectivas que consiste en los vectores $(\Delta m_i)\bar{\mathbf{a}}$, $-(\Delta m_i)\omega^2\mathbf{r}'_i$, y $(\Delta m_i)(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'_i)$ asociados a las diferentes partículas P_i de la placa, donde $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa G de la placa, $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa, $\boldsymbol{\alpha}$ es su aceleración angular y $\mathbf{r}'_i$ denota el vector de posición de la partícula P_i, relativa a G. Muestre además, por medio de su suma y la suma de sus momentos alrededor de G, que las fuerzas efectivas se reducen a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G y a un par $\bar{I}\alpha$.

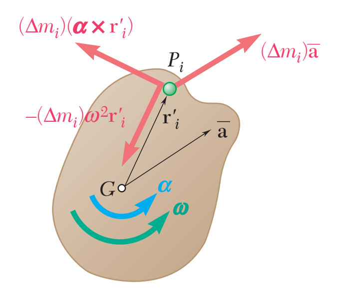


Figura P16.47

16.48 Una barra ligera y uniforme AB descansa sobre una superficie horizontal sin fricción y una fuerza **P** de 0.25 lb de magnitud se aplica en A en una dirección perpendicular a la barra. Si ésta tiene una masa de 1.75 lb, determine la aceleración de *a*) el punto A y *b*) el punto B.

16.49 *a*) En el problema 16.48, determine el punto de la barra *AB* en el cual debe aplicarse la fuerza **P** si la aceleración del punto *B* debe ser igual a cero. *b*) Si $P = 0.25$ lb, determine la aceleración correspondiente del punto *A*.

16.50 y 16.51 Una fuerza **P** de 3 N de magnitud se aplica a la cinta enrollada alrededor del cuerpo indicado. Si el cuerpo descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, determine la aceleración de *a*) el punto *A* y *b*) el punto *B*.

16.50 Un aro delgado con 2.4 kg de masa.
16.51 Un disco uniforme con 2.4 kg de masa.

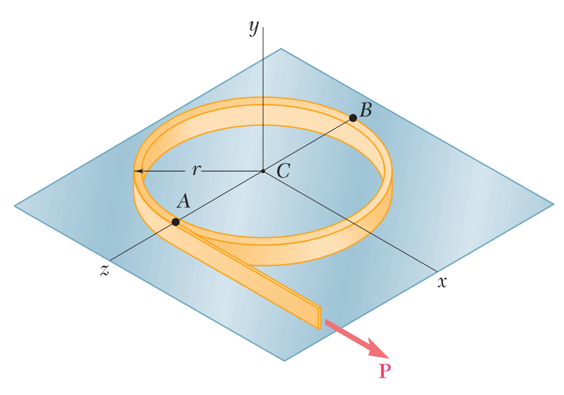


Figura P16.50

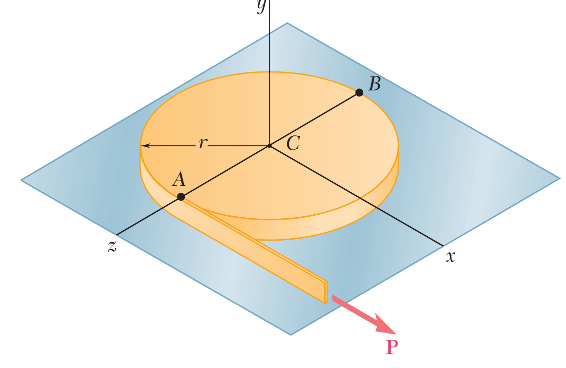


Figura P16.51 y P16.52

16.52 Una fuerza **P** se aplica a una cinta enrollada alrededor de un disco uniforme que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Demuestre que para cada rotación de 360° del disco, el centro del mismo se moverá a una distancia π_r.

16.53 Un satélite de 120 kg tiene un radio de giro de 600 mm alrededor del eje *y* y es simétrico respecto al plano *zx*. Su orientación se cambia al lanzar cuatro pequeños cohetes *A*, *B*, *C* y *D*, cada uno de los cuales produce una fuerza de empuje **T** de 16.20 N dirigida como se muestra en la figura. Determine la aceleración angular del satélite y la aceleración de su centro de masa *G* cuando *a*) se lanzan los cuatro cohetes, *b*) se lanzan todos los cohetes excepto el *D*.

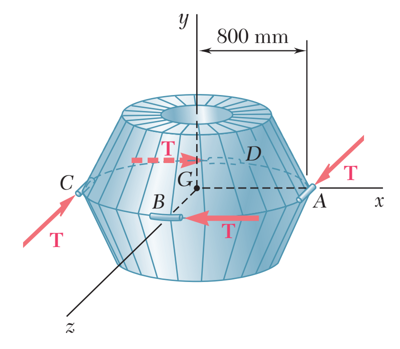


Figura *P16.53*

16.54 Una placa rectangular uniforme de 5 kg de masa se suspende de cuatro alambres verticales, y se aplica una fuerza **P** de 6 N de magnitud en la esquina *C*, como se muestra en la figura. Inmediatamente después de aplicar **P**, determine la aceleración de *a*) el punto medio del borde *BC*, *b*) la esquina *B*.

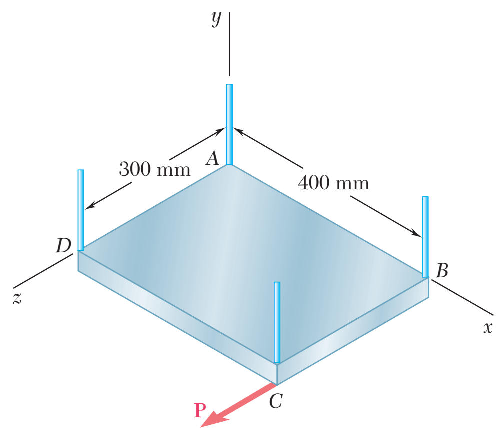


Figura *P16.54*

16.55 Una rueda dentada de 3 kg tiene un radio de giro centroidal de 70 mm y se encuentra suspendida de una cadena, como se muestra en la figura. Determine la aceleración de los puntos A y B de la cadena, si se sabe que $T_A = 14$ N y $T_B = 18$ N.

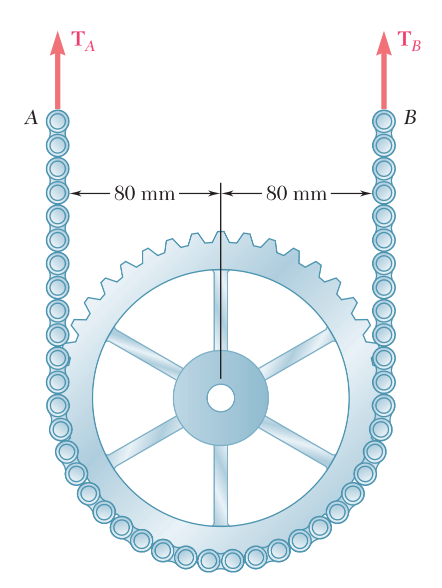


Figura P16.55

16.56 Retome el problema 16.55, y ahora suponga que $T_A = 14$ N y que $T_B = 12$ N.

16.57 y 16.58 Una viga de 15 ft y 500 lb de peso se baja por medio de dos cables que se desenrollan de grúas elevadas. Cuando la viga se acerca al suelo, los operadores de la grúa aplican los frenos para recargar el movimiento de desenrollado. Si la desaceleración del cable A es de 20 ft/s^2 y la del cable B es de 2 ft/s^2, determine la tensión en cada cable.

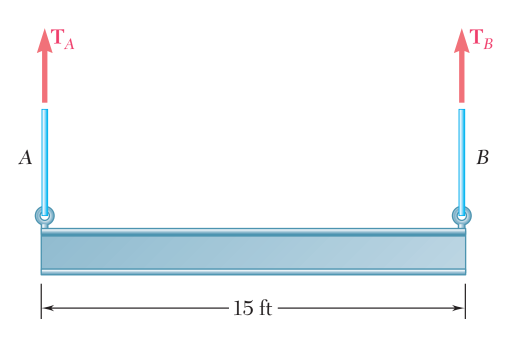


Figura P16.57

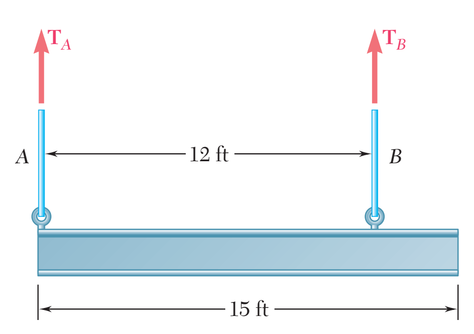


Figura P16.58

16.59 El rollo de acero que se muestra en la figura tiene una masa de 1 200 kg, un radio centroidal de giro de 150 mm y se eleva por medio de dos cables que pasan alrededor de su eje. Si se sabe que para cada cable $T_A = 3\,100$ N y $T_B = 3\,300$ N, determine *a*) la aceleración angular del rollo y *b*) la aceleración de su centro de masa.

16.60 El rollo de acero que se muestra en la figura tiene una masa de 1 200 kg, un radio centroidal de giro de 150 mm y se eleva por medio de dos cables que pasan alrededor de su eje. Si se sabe que en el instante que se muestra la aceleración del rollo es de 150 mm/s^2 hacia abajo y que para cada cable $T_A = 3\,000$ N, determine *a*) el valor correspondiente de la tensión T_B y *b*) la aceleración angular del rollo.

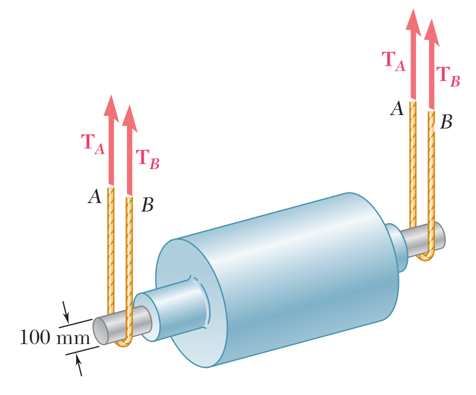


Figura P16.59 y P16.60

16.61 Al jalar lanzar la cuerda de un yo-yo, una persona hace que éste gire, mientras permanece a la misma altura sobre el piso. Si se denota la masa del yo-yo con m, el radio del tambor interior sobre el cual se enrolla la cuerda con r y el radio centroidal de giro del yo-yo con $\bar{k}$, determine la aceleración angular del yo-yo.

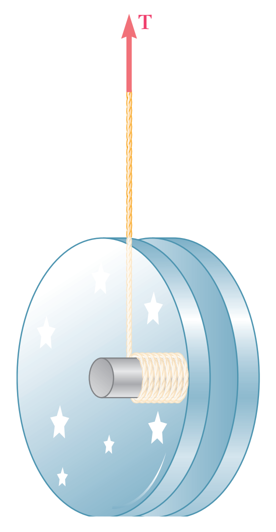


Figura *P16.61* y *P16.62*

16.62 El yo-yo de 3 oz que se muestra en la figura tiene un radio centroidal de giro de 1.25 in. El radio del tambor interior sobre el cual se enrolla la cuerda es de 0.25 in. Si en el instante mostrado la aceleración del centro del yo-yo es de 3 ft/s^2 hacia arriba, determine *a*) la tensión **T** requerida en la cuerda, *b*) la correspondiente aceleración angular del yo-yo.

16.63 a 16.65 Una viga *AB* de masa m y sección transversal uniforme se suspende de dos resortes en la forma indicada. Si el resorte 2 se rompe, determine en ese instante *a*) la aceleración angular de la viga, *b*) la aceleración del punto *A* y *c*) la aceleración del punto *B*.

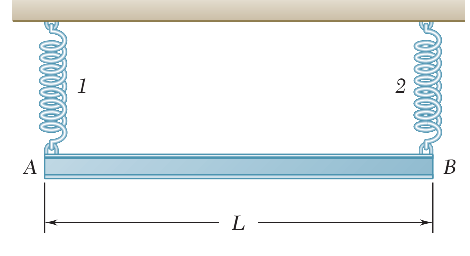


Figura P16.63

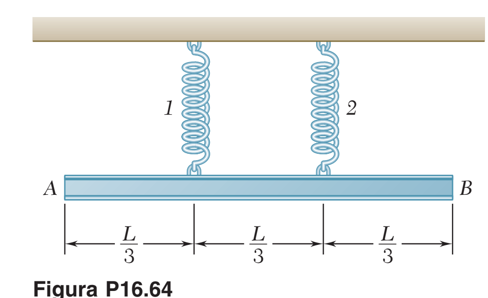


Figura P16.64

Figura P16.65

16.66 a 16.68 Una placa delgada con la forma indicada y masa m se suspende de dos resortes del modo que se muestra. Si el resorte 2 se rompe, determine la aceleración en ese instante *a*) del punto A y *b*) del punto B.

16.66 Una placa circular de diámetro b.

16.67 Un aro delgado de diámetro b.

16.68 Una placa cuadrada de lado b.

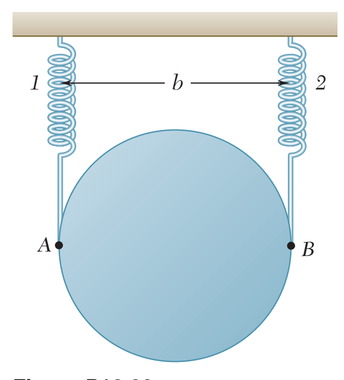


Figura P16.66

Figura P16.67

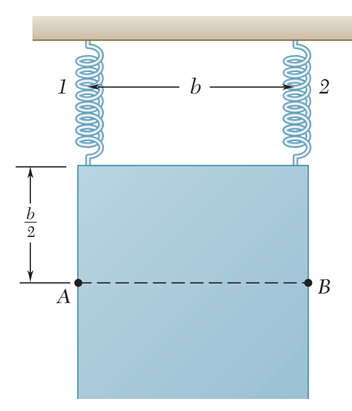


Figura P16.68

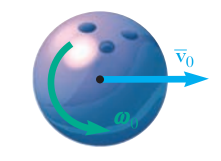


Figura P16.69

16.69 Un jugador de boliche lanza hacia los pinos una bola de 8 in. de diámetro y 12 lb de masa con una velocidad hacia adelante $\mathbf{v}_0$ de 15 ft/s y un contragiro $\boldsymbol{\omega}_0$ de 9 rad/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre la bola y el carril es de 0.10, determine *a*) el tiempo t_1 en el cual la bola empezará a rodar sin deslizarse, *b*) la velocidad de la bola en el tiempo t_1 y *c*) la distancia que la bola ha recorrido en el tiempo t_1.

16.70 Retome el problema 16.69, y ahora suponga que el jugador de boliche lanza la bola con la misma velocidad hacia adelante pero con un contragiro de 18 rad/s.

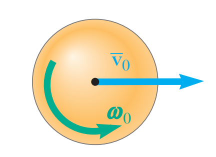


Figura *P16.71*

16.71 Se lanza una esfera de radio r y masa m a lo largo de una superficie horizontal rugosa con las velocidades iniciales indicadas. Si la velocidad final de la esfera debe ser cero, exprese, en términos de v_0, r y μ_k, *a*) la magnitud requerida de $\boldsymbol{\omega}_0$, *b*) el tiempo t_1 requerido para que la esfera se detenga y *c*) la distancia que se moverá la esfera antes de quedar en reposo.

16.72 Retome el problema 16.71, y ahora suponga que la esfera se reemplaza por un aro delgado de radio r y masa m.

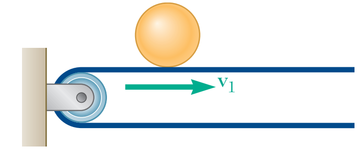


Figura *P16.73*

16.73 Una esfera uniforme de radio r y masa m se coloca sin velocidad inicial sobre una banda que se mueve hacia la derecha con velocidad constante $\mathbf{v}_1$. Denotando por μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y la banda, determine *a*) el tiempo t_1 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizar, *b*) las velocidades lineal y angular de la esfera en el tiempo t_1.

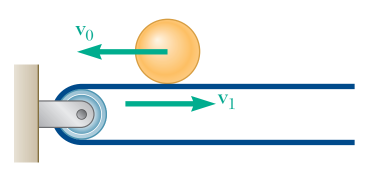


Figura *P16.74*

16.74 Una esfera de radio r y masa m tiene una velocidad lineal $\mathbf{v}_0$ dirigida hacia la izquierda y ninguna velocidad angular cuando se coloca sobre una banda que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $\mathbf{v}_1$. Si después del primer deslizamiento sobre la banda la esfera no tendrá velocidad lineal relativa al suelo cuando empiece a rodar sobre la banda sin deslizar, establezca en términos de v_1 y del coeficiente de fricción cinética μ_k entre la esfera y la banda *a*) el valor requerido de v_0, *b*) el tiempo t_1 al cual la esfera empezará a rodar sobre la banda y *c*) la distancia que la esfera habrá recorrido con relación al suelo en el tiempo t_1.

16.8. MOVIMIENTO PLANO RESTRINGIDO O VINCULADO

La mayoría de las aplicaciones de ingeniería tienen que ver con cuerpos rígidos que se mueven bajo restricciones determinadas. Por ejemplo, las manivelas deben girar alrededor de un eje fijo, las ruedas deben rodar sin patinar, y las bielas describir ciertos movimientos prescritos. En tales casos, existen relaciones definidas entre las componentes de la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa G del cuerpo considerado y su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$; se dice que el movimiento correspondiente es un *movimiento restringido.*

La solución de un problema que implica un movimiento plano restringido requiere un *análisis cinemático* preliminar del problema. Considere, por ejemplo, una varilla ligera AB de longitud l y masa m cuyos extremos están conectados a bloques de masa despreciable que se deslizan a lo largo de correderas horizontales y verticales sin fricción. Se tira de la varilla mediante una fuerza $\mathbf{P}$ aplicada en A (figura 16.11). Se sabe de la sección 15.8 que la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa G de la varilla puede determinarse en cualquier instante dado a partir de la posición de la varilla, su velocidad angular y su aceleración angular en ese instante. Suponga, por ejemplo, que se conocen los valores de θ, $\boldsymbol{\omega}$ y α en un instante dado, y que se desea determinar el valor correspondiente de la fuerza $\mathbf{P}$, así como las reacciones en A y B. Primero se debe *determinar las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración del centro de masa G* mediante el método de la sección 15.8. Después se aplica el principio de d'Alembert (figura 16.12), utilizando las expresiones que se obtuvieron para $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$. Las fuerzas desconocidas $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{N}_B$ se determinan después al escribir y resolver las ecuaciones apropiadas.

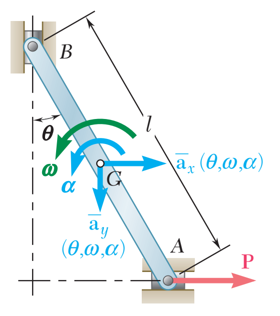


Figura 16.11

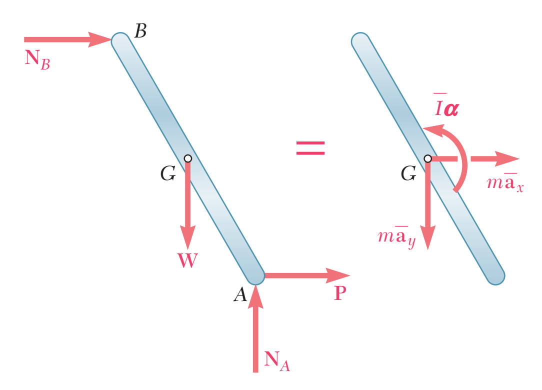


Figura 16.12

Supóngase ahora que se conoce la fuerza aplicada $\mathbf{P}$, el ángulo θ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la varilla en un instante dado, y que se desea encontrar la aceleración angular α de la varilla y las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración de su centro de masa en ese instante, así como las reacciones en A y B. El estudio cinemático preliminar del problema tendrá como objetivo *expresar las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración de G en términos de la aceleración angular α de la varilla.* Esto se hará expresando primero la aceleración de un punto de referencia adecuado tal como A en términos de la aceleración angular α. Las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración de G pueden determinarse entonces en términos de α, y las expresiones obtenidas incorporarse en la figura 16.12. Se obtienen tres ecuaciones en términos de α, N_A y N_B y se resuelven para tres incógnitas (véase el problema resuelto 16.10). Advierta que también es posible utilizar el método de equilibrio diná-

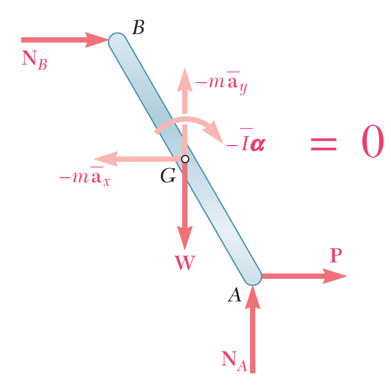


Figura 16.13

mico para obtener la solución de los dos tipos de problemas considerados (figura 16.13).

Cuando un mecanismo consta de *varias partes móviles*, el método descrito se puede utilizar con cada parte del mecanismo. El procedimiento requerido para determinar las diferentes incógnitas es en ese caso similar al procedimiento que se sigue en la situación del equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos conectados (sección 6.11).

Antes se analizaron dos casos particulares de movimiento plano restringido: la traslación de un cuerpo rígido, en la cual la aceleración angular del cuerpo se restringe a cero, y la rotación centroidal, en la que la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa del cuerpo se restringe a cero. Los otros casos particulares de movimiento plano restringido son de interés especial: la *rotación no centroidal* de un cuerpo rígido y el *movimiento de rodamiento* de un disco o rueda. Es posible analizar estos dos casos mediante uno de los métodos generales descritos antes. Sin embargo, en vista del rango de sus aplicaciones, éstos merecen unos cuantos comentarios especiales.

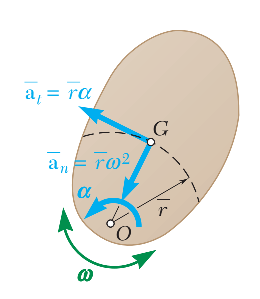


Figura 16.14

Rotación no centroidal. El movimiento de un cuerpo rígido que está restringido a girar alrededor de un eje fijo que no pasa por su centro de masa se denomina *rotación no centroidal.* El centro de masa G del cuerpo se mueve a lo largo de un círculo de radio $\bar{r}$ centrado en el punto O, donde el eje de rotación interseca al plano de referencia (figura 16.14). Al denotar, respectivamente, por $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ la velocidad angular y la aceleración angular de la línea OG, se obtienen las siguientes expresiones para las componentes tangencial y normal de la aceleración de G:

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \qquad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2 \tag{16.7}$$

Puesto que la línea OG pertenece al cuerpo, su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ también representan la velocidad angular y la aceleración angular del cuerpo en su movimiento relativo a G. Las ecuaciones (16.7) definen la relación cinemática que existe entre el movimiento del centro de masa G y el movimiento del cuerpo en torno a G. Éstas deben usarse para eliminar $\bar{a}_t$ y $\bar{a}_n$ de las ecuaciones que se obtienen al aplicar el principio de d'Alembert (figura 16.15) o el método del equilibrio dinámico (figura 16.16).

Se obtiene una relación interesante al igualar los momentos alrededor del punto fijo O de las fuerzas y los vectores mostrados, respectivamente, en las partes *a*) y *b*) de la figura 16.15. Se escribe

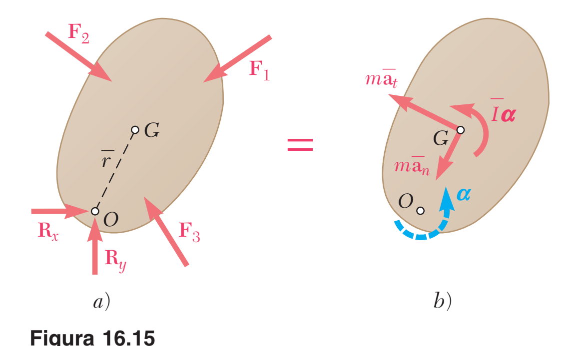


Figura 16.15

Figura 16.16

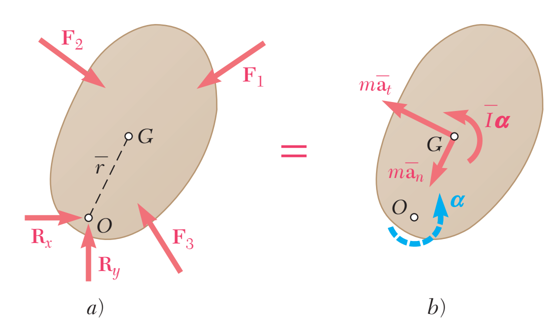


Figura P16.15 (*repetida*)

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \bar{I}\alpha + (m\bar{r}\alpha)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha$$

Sin embargo, de acuerdo con el teorema de ejes paralelos, se tiene $\bar{I} + m\bar{r}^2 = I_O$, donde I_O denota el momento de inercia del cuerpo rígido alrededor del eje fijo. Por lo tanto, se escribe

$$\Sigma M_O = I_O\alpha \qquad (16.8)$$

Aunque la fórmula (16.8) expresa una relación importante entre la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor del punto fijo O y el producto $I_O\alpha$, es necesario comprender con toda claridad que esta fórmula no significa que el sistema de fuerzas externas es equivalente a un par de momento $I_O\alpha$. El sistema de las fuerzas efectivas y, por lo tanto, el sistema de las fuerzas externas, se reduce a un par sólo cuando O coincide con G —esto es, *sólo cuando la rotación es centroidal* (sección 16.4)—. En el caso más general de rotación no centroidal, el sistema de fuerzas externas no se reduce a un par.

Un caso particular de rotación no centroidal es de interés especial —caso de *rotación uniforme*, en el cual la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es constante—. Puesto que $\boldsymbol{\alpha}$ es cero, el par de inercia en la figura 16.16 se anula y el vector de inercia se reduce a su componente normal. Esta componente (denominada también *fuerza centrífuga*) representa la tendencia de cuerpo rígido a apartarse del eje de rotación.

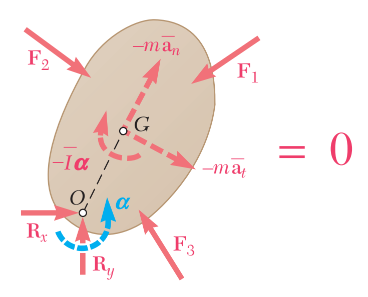


Figura P16.16 (*repetida*)

Movimiento de rodamiento. Otro caso importante de movimiento plano es el movimiento de un disco o rueda que gira sobre una superficie plana. Si el disco está restringido a rodar sin deslizarse, la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ de su centro de masa G y su aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ no son independientes. Suponiendo que el disco esté equilibrado, de manera que su centro de masa y su centro geométrico coincidan, se escribe primero que la distancia $\bar{x}$ recorrida por G durante una rotación θ del disco es $\bar{x} = r\theta$, donde r es el radio del disco. Al diferenciar dos veces esta relación se escribe

$$\bar{a} = r\alpha \qquad (16.9)$$

Si se recuerda que el sistema de las fuerzas efectivas en movimiento plano se reduce a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$, se encuentra que en el caso particular de movimiento de rodamiento de un disco equilibrado, las fuerzas efectivas se reducen a un vector de magnitud $mr\alpha$ fijo en G y a un par de magnitud $\bar{I}\alpha$. Así, se puede expresar que las fuerzas externas son equivalentes al vector y al par que se muestran en la figura 16.17.

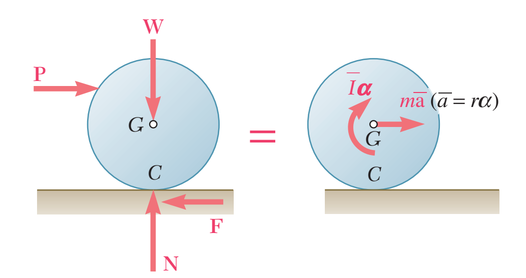


Figura 16.17

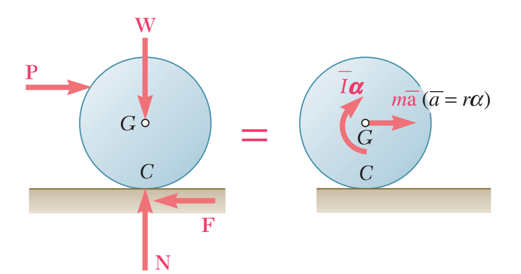


Figura 16.17 (*repetida*)



Fotografía 16.4 Cuando una bola cae en el callejón de boleo, primero gira y desliza, y luego rueda sin patinar.

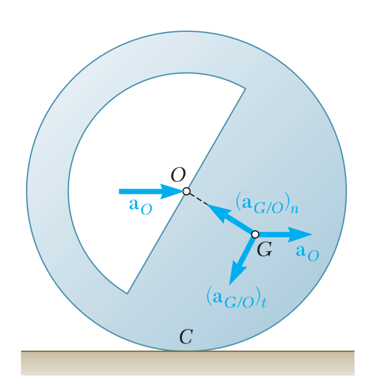


Figura 16.18

Cuando un disco *rueda sin deslizarse,* no hay movimiento relativo entre el punto del disco en contacto con el suelo y el suelo mismo. En consecuencia, respecto a lo que concierne al cálculo de la fuerza de fricción **F**, un disco que rueda puede compararse con un bloque en reposo sobre una superficie. La magnitud F de la fuerza de fricción puede tener cualquier valor, siempre y cuando este valor no exceda el valor máximo $F_m = \mu_s N$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática y N es la magnitud de la fuerza normal. En el caso de un disco que rueda, la magnitud F de la fuerza de fricción debe, por lo tanto, determinarse de manera independiente de N al resolver la ecuación que se obtuvo de la figura 16.17.

Cuando el *deslizamiento es inminente,* la fuerza de fricción alcanza su valor máximo $F_m = \mu_s N$ y puede obtenerse de N.

Cuando el disco *gira y se desliza* al mismo tiempo, existe un movimiento relativo entre el punto del disco que está en contacto con el suelo y el suelo mismo, y la fuerza de fricción tiene la magnitud $F_k = \mu_k N$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética. En este caso, sin embargo, el movimiento del centro de masa G del disco y la rotación del disco en torno a G son independientes, y $\bar{a}$ no es igual a $r\alpha$.

Estos tres casos diferentes pueden resumirse como sigue:

Rodamiento, sin deslizamiento:	$F \leq \mu_s N$	$\bar{a} = r\alpha$
Rodamiento, deslizamiento inminente:	$F = \mu_s N$	$\bar{a} = r\alpha$
Rodamiento y deslizamiento:	$F = \mu_k N$	$\bar{a}$ *y* α *independiente*

Cuando no se sabe si el disco se desliza o no, primero debe suponerse que rueda sin deslizarse. Si se encuentra que F es más pequeña o igual que $\mu_s N$ se demuestra que la suposición es correcta. Si se determina que F es mayor que $\mu_s N$ la suposición es incorrecta y el problema debe iniciarse de nuevo, suponiendo rodamiento y deslizamiento.

Cuando un disco está *desequilibrado,* esto es, cuando su centro de masa G no coincide con su centro geométrico O, la relación (16.9) no se cumple entre $\bar{a}$ y α. Sin embargo, se cumple una relación similar entre la magnitud a_O de la aceleración del centro geométrico y la aceleración angular α de un disco desequilibrado que rueda sin deslizarse. Se tiene

$$a_O = r\alpha \qquad (16.10)$$

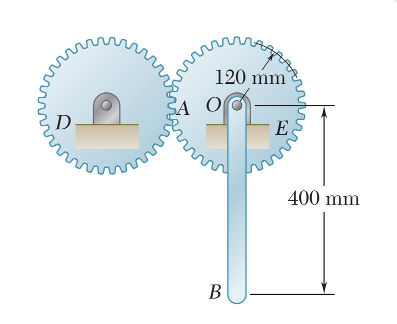
Para determinar $\bar{a}$ en términos de la aceleración angular α y de la velocidad angular ω del disco, es posible utilizar la fórmula de la aceleración relativa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_G &= \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{G/O} \\ &= \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{G/O})_t + (\mathbf{a}_{G/O})_n \end{aligned} \qquad (16.11)$$

donde las tres aceleraciones componentes obtenidas tienen las direcciones indicadas en la figura 16.18 y las magnitudes $a_O = r\alpha$, $(a_{G/O})_t = (OG)\alpha$ y $(a_{G/O})_n = (OG)\omega^2$.

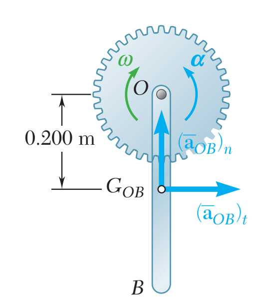
PROBLEMA RESUELTO 16.6

La parte *AOB* de un mecanismo se compone de una barra de acero *OB* de 400 mm soldada a un engrane *E* de 120 mm de radio, que puede girar alrededor de una flecha horizontal *O*. La impulsa un engrane *D* y, en el instante que se muestra, tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 8 rad/s y una aceleración angular en el sentido contrario de las manecillas del reloj de 40 rad/s^2. Si la barra *OB* tiene una masa de 3 kg y el engrane *E* una masa de 4 kg y un radio de giro de 85 mm, determine *a*) la fuerza tangencial ejercida por el engrane *D* sobre el engrane *E*, *b*) las componentes de la reacción en la flecha *O*.



SOLUCIÓN

En la determinación de las fuerzas efectivas del cuerpo rígido *AOB*, el engrane *E* y la barra *OB* se consideran por separado. Por lo tanto, las componentes de la aceleración del centro de masa G_{OB} de la barra se determinarán primero:

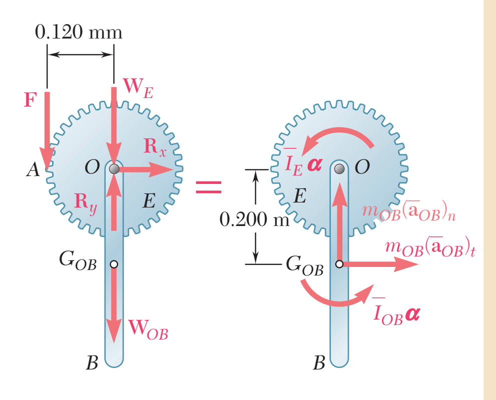


$$(\bar{a}_{OB})_t = \bar{r}\alpha = (0.200 \text{ m})(40 \text{ rad/s}^2) = 8 \text{ m/s}^2$$
$$(\bar{a}_{OB})_n = \bar{r}\omega^2 = (0.200 \text{ m})(8 \text{ rad/s})^2 = 12.8 \text{ m/s}^2$$

Ecuaciones de movimiento. Se han dibujado dos bosquejos de cuerpo rígido *AOB*. El primero muestra las fuerzas externas consistentes en el peso $\mathbf{W}_E$ del engrane *E*, el peso $\mathbf{W}_{OB}$ de la barra *OB*, la fuerza *F* ejercida por el engrane *D*, y las componentes $\mathbf{R}_x$ y $\mathbf{R}_y$ de la reacción en *O*. Las magnitudes de los pesos son, respectivamente,

$$W_E = m_E g = (4 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 39.2 \text{ N}$$
$$W_{OB} = m_{OB} g = (3 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 29.4 \text{ N}$$

El segundo bosquejo muestra las fuerzas efectivas, que consisten en el par $\bar{I}_E\boldsymbol{\alpha}$ (puesto que el engrane *E* está en rotación centroidal) y en un par y dos componentes vectoriales en el centro de masa de *OB*. Puesto que se conocen las aceleraciones, se calculan las magnitudes de estas componentes y pares:



$$\bar{I}_E\alpha = m_E\bar{k}_E^2\alpha = (4 \text{ kg})(0.085 \text{ m})^2(40 \text{ rad/s}^2) = 1.156 \text{ N}\cdot\text{m}$$
$$m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t = (3 \text{ kg})(8 \text{ m/s}^2) = 24.0 \text{ N}$$
$$m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n = (3 \text{ kg})(12.8 \text{ m/s}^2) = 38.4 \text{ N}$$
$$\bar{I}_{OB}\alpha = (\tfrac{1}{12}m_{OB}L^2)\alpha = \tfrac{1}{12}(3 \text{ kg})(0.400 \text{ m})^2(40 \text{ rad/s}^2) = 1.600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Al expresar que este sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, se escriben las siguientes ecuaciones:

$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{ef}}$:

$$F(0.120 \text{ m}) = \bar{I}_E\alpha + m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t(0.200 \text{ m}) + \bar{I}_{OB}\alpha$$
$$F(0.120 \text{ m}) = 1.156 \text{ N}\cdot\text{m} + (24.0 \text{ N})(0.200 \text{ m}) + 1.600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$F = 63.0$ N　　　**F** = 63.0 N↓ ◀

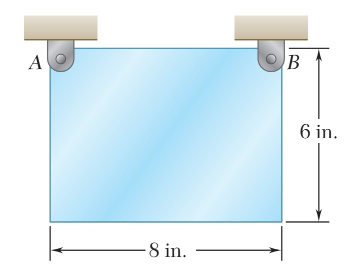
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}$:　　$R_x = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t$

$R_x = 24.0$ N　　　$\mathbf{R}_x$ = 24.0 N → ◀

$+\uparrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}$:　　$R_y - F - W_E - W_{OB} = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n$

$R_y - 63.0 \text{ N} - 39.2 \text{ N} - 29.4 \text{ N} = 38.4 \text{ N}$

$R_y = 170.0$ N　　　$\mathbf{R}_y$ 170.0 N↑ ◀

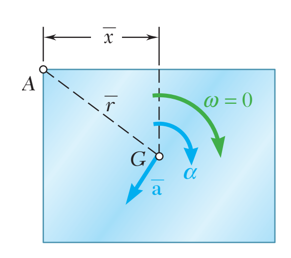


PROBLEMA RESUELTO 16.7

Una placa rectangular de 6 × 8 in. que pesa 60 lb está suspendida de dos pasadores A y B. Si repentinamente se quita el pasador B, determine *a*) la aceleración angular de la placa, *b*) las componentes de la reacción en el pasador A, inmediatamente después de quitar el pasador B.



SOLUCIÓN



***a*) Aceleración angular.** Se observa que cuando la placa gira alrededor del punto A, su centro de masa G describe un radio circular $\bar{r}$ con centro en A.

Puesto que la placa se suelta desde el reposo ($\boldsymbol{\omega} = 0$), la componente normal de la aceleración de G es cero. La magnitud de la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ del centro de masa G es, en consecuencia, $\bar{a} = \bar{r}\alpha$. Se dibuja el diagrama mostrado para expresar que las fuerzas externas son equivalentes a las fuerzas efectivas:

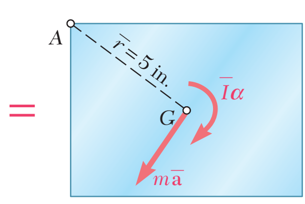
$$+\circlearrowright \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{ef}}: \qquad W\bar{x} = (m\bar{a})\bar{r} + \bar{I}\alpha$$

Puesto que $\bar{a} = \bar{r}\alpha$, se tiene

$$W\bar{x} = m(\bar{r}\alpha)\bar{r} + \bar{I}\alpha \qquad \alpha = \frac{W\bar{x}}{\frac{W}{g}\bar{r}^2 + \bar{I}} \tag{1}$$

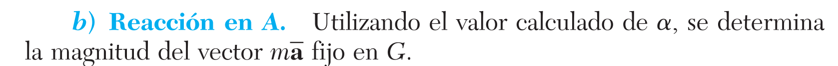
El momento centroidal de inercia de la placa es

$$\bar{I} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{60 \text{ lb}}{12(32.2 \text{ ft/s}^2)}[(\tfrac{8}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{6}{12} \text{ ft})^2]$$
$$= 0.1078 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$



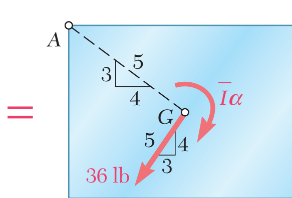
Al sustituir este valor de $\bar{I}$ junto con $W = 60$ lb, $\bar{r} = \frac{5}{12}$ ft, y $\bar{x} = \frac{4}{12}$ ft en la ecuación (1), se obtiene

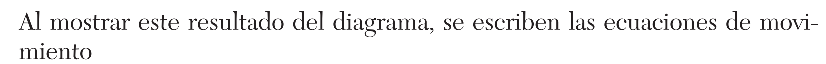
$$\alpha = +46.4 \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} = 46.4 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \blacktriangleleft$$



***b*) Reacción en *A*.** Utilizando el valor calculado de α, se determina la magnitud del vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G.

$$m\bar{a} = m\bar{r}\alpha = \frac{60 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(\tfrac{5}{12} \text{ ft})(46.4 \text{ rad/s}^2) = 36.0 \text{ lb}$$



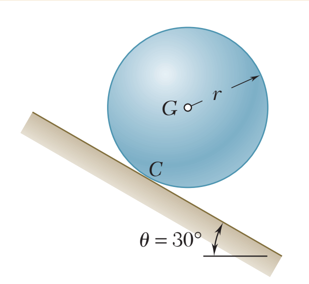


Al mostrar este resultado del diagrama, se escriben las ecuaciones de movimiento

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad A_x = -\tfrac{3}{5}(36 \text{ lb})$$
$$= -21.6 \text{ lb} \qquad \mathbf{A}_x = 21.6 \text{ lb} \leftarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \qquad A_y - 60 \text{ lb} = -\tfrac{4}{5}(36 \text{ lb})$$
$$A_y = +31.2 \text{ lb} \qquad \mathbf{A}_y = 31.2 \text{ lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

El par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ no participa en las últimas dos ecuaciones; a pesar de eso debe indicarse sobre el diagrama.

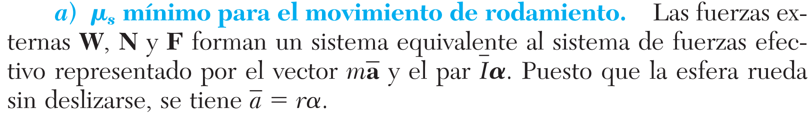


PROBLEMA RESUELTO 16.8

Una esfera, de radio r y peso W, se suelta sin velocidad inicial sobre una pendiente y rueda sin deslizarse. Determine *a*) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática compatible con el movimiento de rodamiento, *b*) la velocidad del centro G de la esfera después de que ésta ha rodado 10 ft, *c*) la velocidad de G si la esfera desciende 10 ft sobre una pendiente de 30° sin fricción.



SOLUCIÓN



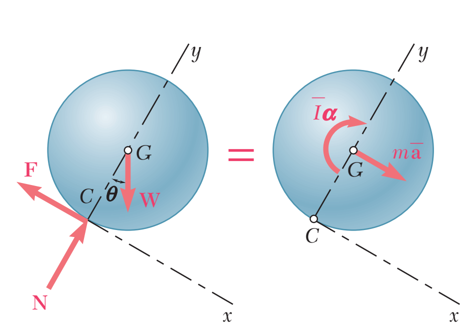
***a*) μ_s mínimo para el movimiento de rodamiento.** Las fuerzas externas **W**, **N** y **F** forman un sistema equivalente al sistema de fuerzas efectivo representado por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Puesto que la esfera rueda sin deslizarse, se tiene $\bar{a} = r\alpha$.

$$+\circlearrowright\Sigma M_C = \Sigma(M_C)_{\text{ef}}: \qquad (W \text{ sen } \theta)r = (m\bar{a})r + \bar{I}\alpha$$
$$(W \text{ sen } \theta)r = (mr\alpha)r + \bar{I}\alpha$$

Al notar que $m = W/g$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$, se escribe

$$(W \text{ sen } \theta)r = \left(\frac{W}{g}r\alpha\right)r + \frac{2}{5}\frac{W}{g}r^2\alpha \qquad \alpha = +\frac{5g \text{ sen } \theta}{7r}$$

$$\bar{a} = r\alpha = \frac{5g \text{ sen } \theta}{7} = \frac{5(32.2 \text{ ft/s}^2) \text{ sen } 30°}{7} = 11.50 \text{ ft/s}^2$$



$$+\searrow\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad W \text{ sen } \theta - F = m\bar{a}$$
$$W \text{ sen } \theta - F = \frac{W}{g}\frac{5g \text{ sen } \theta}{7}$$
$$F = +\tfrac{2}{7}W \text{ sen } \theta = \tfrac{2}{7}W \text{ sen } 30° \qquad \mathbf{F} = 0.143W \measuredangle 30°$$

$$+\nearrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \qquad N - W \cos \theta = 0$$
$$N = W \cos \theta = 0.866W \qquad \mathbf{N} = 0.866W \measuredangle 60°$$

$$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{0.143W}{0.866W} \qquad \mu_s = 0.165 \blacktriangleleft$$

***b*) Velocidad de la esfera rodante.** Se tiene movimiento uniformemente acelerado:

$$\bar{v}_0 = 0 \qquad \bar{a} = 11.50 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{x} = 10 \text{ ft} \qquad \bar{x}_0 = 0$$
$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \qquad \bar{v}^2 = 0 + 2(11.50 \text{ ft/s}^2)(10 \text{ ft})$$
$$\bar{v} = 15.17 \text{ ft/s} \qquad \bar{\mathbf{v}} = 15.17 \text{ ft/s} \measuredangle 30° \blacktriangleleft$$

***c*) Velocidad de la esfera deslizante.** Suponiendo que no hay fricción en este caso, se tiene $F = 0$ y se obtiene

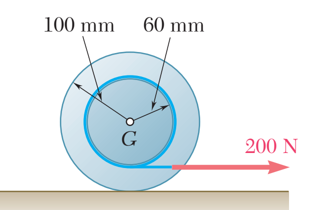
$$+\circlearrowright\Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}: \qquad 0 = \bar{I}\alpha \qquad \alpha = 0$$

$$+\searrow\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad W \text{ sen } 30° = m\bar{a} \qquad 0.50W = \frac{W}{g}\bar{a}$$

$$\bar{a} = +16.1 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}} = 16.1 \text{ ft/s}^2 \measuredangle 30°$$

Al sustituir $\bar{a} = 16.1$ ft/s^2 en las ecuaciones para movimiento uniformemente acelerado, se obtiene

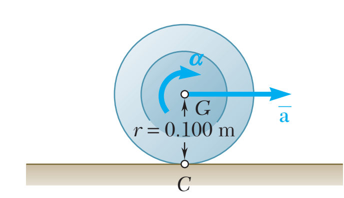
$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \qquad \bar{v}^2 = 0 + 2(16.1 \text{ ft/s}^2)(10 \text{ ft})$$
$$\bar{v} = 17.94 \text{ ft/s} \qquad \bar{\mathbf{v}} = 17.94 \text{ ft/s} \measuredangle 30° \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.9

Una cuerda se enrolla alrededor del tambor interno de una rueda y se jala horizontalmente con una fuerza de 200 N. La rueda tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de 70 mm. Si se sabe que $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$, determine la aceleración de G y la aceleración angular de la rueda.

SOLUCIÓN



***a)* Suposición de rodamiento sin deslizamiento.** En este caso se tiene

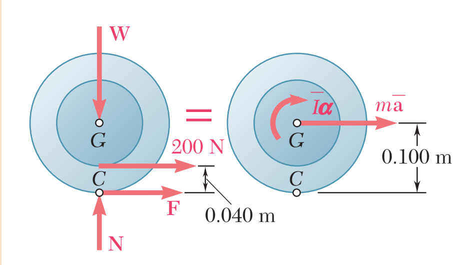
$$\bar{a} = r\alpha = (0.100 \text{ m})\alpha$$

Se puede determinar si esta suposición se justifica al comparar la fuerza de fricción que se obtiene con la fuerza de fricción máxima disponible. El momento de inercia de la rueda es

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = (50 \text{ kg})(0.070 \text{ m})^2 = 0.245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Ecuaciones de movimiento



$$+\circlearrowright \Sigma M_C = \Sigma(M_C)_{\text{ef}}: \qquad (200 \text{ N})(0.040 \text{ m}) = m\bar{a}(0.100 \text{ m}) + \bar{I}\alpha$$

$$8.00 \text{ N} \cdot \text{m} = (50 \text{ kg})(0.100 \text{ m})\alpha(0.100 \text{ m}) + (0.245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = +10.74 \text{ rad/s}^2$$

$$\bar{a} = r\alpha = (0.100 \text{ m})(10.74 \text{ rad/s}^2) = 1.074 \text{ m/s}^2$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad F + 200 \text{ N} = m\bar{a}$$

$$F + 200 \text{ N} = (50 \text{ kg})(1.074 \text{ m/s}^2)$$

$$F = -146.3 \text{ N} \qquad \mathbf{F} = 146.3 \text{ N} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}:$$

$$N - W = 0 \qquad N = W = mg = (50 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$$

$$\mathbf{N} = 490.5 \text{ N} \uparrow$$

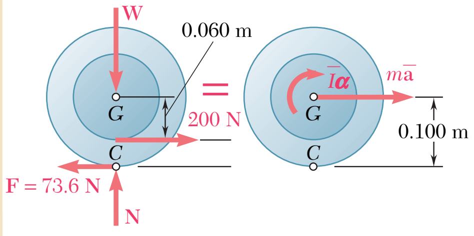
Fuerza de fricción máxima disponible

$$F_{\text{máx}} = \mu_s N = 0.20(490.5 \text{ N}) = 98.1 \text{ N}$$

Puesto que $F > F_{\text{máx}}$, el movimiento supuesto es imposible.

***b)* Rotación y deslizamiento.** Puesto que la rueda debe girar y deslizar al mismo tiempo, se dibuja un nuevo diagrama, donde $\bar{\mathbf{a}}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son independientes y donde

$$F = F_k = \mu_k N = 0.15(490.5 \text{ N}) = 73.6 \text{ N}$$



Del cálculo de la parte *a*, parece ser que **F** debe dirigirse hacia la izquierda. Se escriben las siguientes ecuaciones de movimiento:

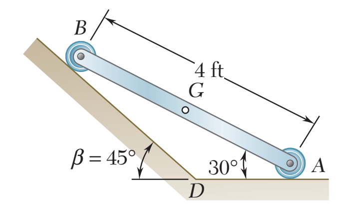
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad 200 \text{ N} - 73.6 \text{ N} = (50 \text{ kg})\bar{a}$$

$$\bar{a} = +2.53 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}} = 2.53 \text{ m/s}^2 \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowright \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}:$$

$$(73.6 \text{ N})(0.100 \text{ m}) - (200 \text{ N})(0.060 \text{ m}) = (0.245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

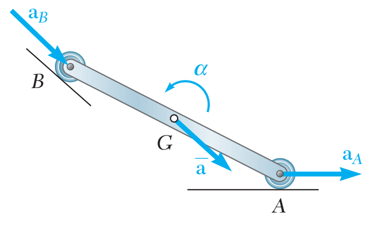
$$\alpha = -18.94 \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} = 18.94 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.10

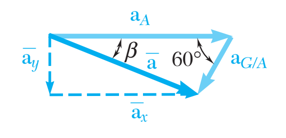
Los extremos de una barra de 4 ft y 50 lb pueden moverse libremente y sin fricción a lo largo de dos correderas rectas en la forma que se indica. Si la barra se suelta sin velocidad desde la posición indicada, determine *a*) la aceleración angular de la barra, *b*) las reacciones en *A* y *B*.

SOLUCIÓN



Cinemática del movimiento. Puesto que el movimiento está restringido, la aceleración de *G* debe relacionarse con la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Para obtener esta relación se determina primero la magnitud de la aceleración $\mathbf{a}_A$ del punto *A* en términos de α. Suponiendo que $\boldsymbol{\alpha}$ está dirigida en la dirección contraria de las manecillas del reloj y advirtiendo que $a_{B/A} = 4\alpha$, se escribe

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$[a_B \searrow 45°] = [a_A \rightarrow] + [4\alpha \swarrow 60°]$$



Al notar que $\phi = 75°$ y utilizar la ley de los senos, se obtiene

$$a_A = 5.46\alpha \qquad a_B = 4.90\alpha$$

La aceleración de *G* se obtiene ahora al escribir

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G/A}$$
$$\bar{\mathbf{a}} = [5.46\alpha \rightarrow] + [2\alpha \swarrow 60°]$$

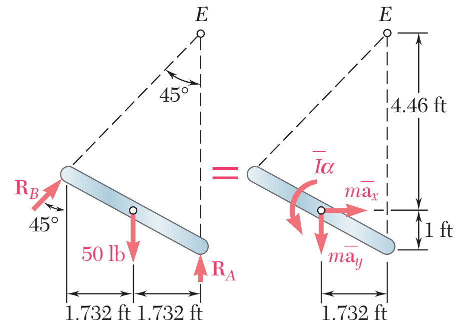
Al descomponer $\bar{\mathbf{a}}$ en las componentes *x* y *y* se obtiene

$$\bar{a}_x = 5.46\alpha - 2\alpha \cos 60° = 4.46\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_x = 4.46\alpha \rightarrow$$
$$\bar{a}_y = -2\alpha \text{ sen } 60° = -1.732\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_y = 1.732\alpha \downarrow$$

Cinética del movimiento. Se dibujan unos diagramas de cuerpo libre de la ecuación que expresen que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas representadas por el vector de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_x$ y $m\bar{\mathbf{a}}_y$ fijo en *G* y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Se calculan las siguientes magnitudes:

$$\bar{I} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(4 \text{ ft})^2 = 2.07 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \qquad \bar{I}\alpha = 2.07\alpha$$

$$m\bar{a}_x = \frac{50}{32.2}(4.46\alpha) = 6.93\alpha \qquad m\bar{a}_y = -\frac{50}{32.2}(1.732\alpha) = -2.69\alpha$$



Ecuaciones de movimiento

$+\circlearrowleft \Sigma M_E = \Sigma(M_E)_{\text{ef}}$:

$$(50)(1.732) = (6.93\alpha)(4.46) + (2.69\alpha)(1.732) + 2.07\alpha$$
$$\alpha = +2.30 \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} = 2.30 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}$: $\quad R_B \text{ sen } 45° = (6.93)(2.30) = 15.94$

$$R_B = 22.5 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_B = 22.5 \text{ lb} \angle 45° \blacktriangleleft$$

$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}$: $\quad R_A + R_B \cos 45° - 50 = -(2.69)(2.30)$

$$R_A = -6.19 - 15.94 + 50 = 27.9 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_A = 27.9 \text{ lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se consideró el *movimiento plano de cuerpos rígidos bajo restricciones.* Se encontró que los tipos de restricciones implicadas en problemas de ingeniería varían de manera amplia. Por ejemplo, un cuerpo rígido quizás esté restringido a girar alrededor de un eje fijo o a rodar sobre una superficie dada, o tal vez esté conectado mediante pasadores a collarines u otros cuerpos.

1. *La solución de un problema que implique el movimiento restringido de un cuerpo rígido* constará, en general, de dos pasos. Primero, se considerará la *cinemática de movimiento* y luego se resolverá la *parte cinética del problema.*

2. *El análisis cinemático del movimiento* se realiza utilizando los métodos estudiados en el capítulo 15. Debido a las restricciones, se relacionarán las aceleraciones lineales y angulares. (Éstas *no* serán independientes, como lo fueron en la última sección.) Es necesario establecer *relaciones entre las aceleraciones* (tanto angular como lineal), y la meta debe ser expresar todas las aceleraciones en términos de una *sola aceleración desconocida.* Éste es el primer paso que se sigue en cada uno de los problemas resueltos de esta lección.

a) Para un cuerpo en rotación no centroidal, las componentes de la aceleración del centro de masa son $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$ y $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$, donde ω por lo general se conoce [problemas resueltos 16.6 y 16.7].

b) Para un disco o rueda rodante, la aceleración del centro de masa es $\bar{a} = r\alpha$ [problema resuelto 16.8].

c) Para un cuerpo en movimiento plano general, el mejor procedimiento, si ni $\bar{a}$ ni α se conocen o es posible obtenerlas con facilidad, es expresar $\bar{a}$ en términos de α [problema resuelto 16.10].

3. *El análisis cinético del movimiento* se efectúa del modo siguiente:

a) Se inicia dibujando un diagrama de cuerpo libre de la ecuación. Esto se lleva a cabo en todos los problemas resueltos de cada sección. En cada caso el diagrama del lado izquierdo muestra las fuerzas externas, incluyendo las fuerzas aplicadas, las reacciones y el peso del cuerpo. Los diagramas del lado derecho muestran los vectores $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

b) Después, se reduce el número de incógnitas en la ecuación de diagramas de cuerpo libre utilizando las relaciones entre las aceleraciones que se encontraron en el análisis cinemático. Así, se está listo para considerar ecuaciones que pueden escribirse al sumar componentes o momentos. Se elige primero una ecuación que implique una sola incógnita. Luego de resolver con respecto a esta última se sustituye el valor obtenido en las otras ecuaciones, las cuales se resolverán para las incógnitas restantes.

(*continúa*)

4. *Cuando se resuelven problemas en los que intervienen discos o ruedas rodantes,* téngase presente lo siguiente:

a) Si el deslizamiento es inminente, la fuerza de fricción que se ejerce sobre el cuerpo rodante ha alcanzado su valor máximo, $F_m = \mu_s N$, donde N es la fuerza normal ejercida sobre el cuerpo y μ_s es el coeficiente de *fricción estática* entre las superficies de contacto.

b) Si el deslizamiento no es inminente, la fuerza de fricción F puede tener *cualquier valor* más pequeño que F_m y, por tanto, debe considerarse como una incógnita independiente. Después que se ha determinado F es necesario verificar que ésta es más pequeña que F_m; si no es así, *el cuerpo* no *gira,* sino que rueda y se desliza como se describe en el siguiente párrafo.

c) Si el cuerpo gira y se desliza al mismo tiempo, entonces no está *rodando* y la aceleración $\bar{a}$ del centro de masa es *independiente* de la aceleración angular α del cuerpo: $\bar{a} \neq r\alpha$. Por otro lado, la fuerza de fricción tiene un valor bien definido, $F = \mu_k N$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética entre las superficies de contacto.

d) En el caso de un disco o rueda rodantes desbalanceados, la relación $\bar{a} = r\alpha$ entre la aceleración $\bar{a}$ del centro de masa G y la aceleración angular α del disco o rueda *ya no existe.* Sin embargo, se cumple una relación similar entre la aceleración a_O del *centro geométrico* O y la aceleración angular α del disco o rueda: $a_O = r\alpha$. Esta relación se puede utilizar para expresar $\bar{a}$ en términos de α y ω (figura 16.18).

5. *En el caso de un sistema de cuerpos rígidos conectados,* el objetivo del *análisis cinemático* debe ser determinar todas las aceleraciones a partir de los datos proporcionados o expresarlas en términos de una sola incógnita. (En sistemas con varios grados de libertad, será necesario utilizar tantas incógnitas como grados de libertad.)

El *análisis cinético* por lo general se efectuará dibujando una ecuación de diagramas de cuerpo libre para el sistema completo, así como para uno o varios de los cuerpos rígidos implicados. En el último caso deben incluirse las fuerzas tanto internas como externas, y es necesario tener cuidado para representar con vectores iguales y opuestos las fuerzas que dos cuerpos ejercen entre sí.

Problemas

16.75 Demuestre que el par $\bar{I}\alpha$ de la figura 16.15 se elimina al asociar los vectores $m\bar{\mathbf{a}}_t$ y $m\bar{\mathbf{a}}_n$ en el punto P, llamado el *centro de percusión*, localizado en la línea OG a una distancia $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ del centro de masa del cuerpo.

Figura P16.75

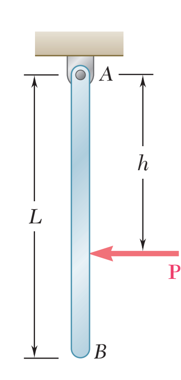


Figura P16.76

16.76 Una barra ligera y uniforme de longitud $L = 36$ in. y peso $W = 4$ lb cuelga libremente de una articulación en A. Una fuerza horizontal $\mathbf{P}$ de 1.5 lb de magnitud se aplica en B hacia la izquierda ($h = L$), determine *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) las componentes de la reacción en A.

16.77 En el problema 16.76, determine *a*) la distancia h para la cual la componente horizontal de la reacción en A es cero y *b*) la aceleración angular correspondiente de la barra.

16.78 Una barra ligera y uniforme de longitud $L = 900$ mm y masa $m = 4$ kg cuelga libremente de una articulación en C. Una fuerza horizontal $\mathbf{P}$ de 75 N de magnitud se aplica en el extremo B. Si $\bar{r} = 225$ mm, determine *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) las componentes de la reacción en A.

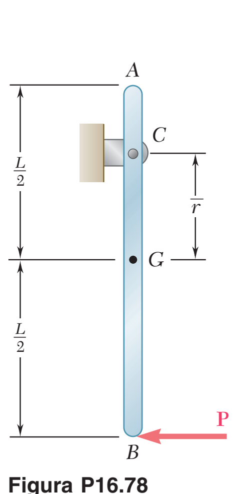


Figura P16.78

16.79 En el problema 16.78, determine *a*) la distancia $\bar{r}$ para la cual la componente horizontal de la reacción en C es cero y *b*) la correspondiente aceleración angular de la barra.

16.80 Una barra delgada uniforme de longitud l y masa m gira alrededor de un eje vertical AA' con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine la tensión en la barra a una distancia x del eje de rotación.

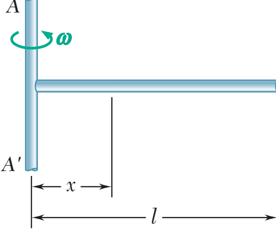


Figura *P16.80*

16.81 Un gran volante está montado sobre una flecha horizontal y gira a una razón constante de 1 200 rpm. Los datos experimentales indican que la fuerza total que ejerce el volante sobre la flecha varía de 55 kN hacia arriba a 85 kN hacia abajo. Determine *a*) la masa del volante, *b*) la distancia desde el centro del eje hasta el centro de masa del volante.

16.82 Un disco de turbina con masa de 26 kg gira a razón constante de 9 600 rpm. Si el centro de masa del disco coincide con el centro de rotación *O*, determine la reacción en *O* inmediatamente después de que una sola aspa en *A* con masa de 45 g, se afloja y se desprende.

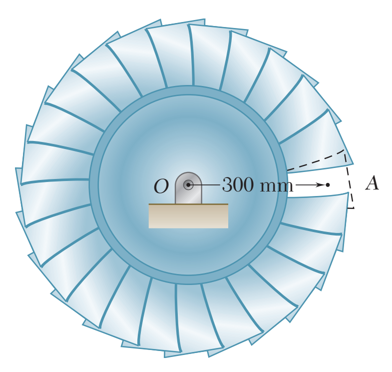


Figura P16.82

16.83 El obturador que se muestra se formó al quitar un cuarto a un disco de 0.75 in. de radio y se usa para interrumpir un haz luminoso que se emite desde una lente en *C*. Si se sabe que el obturador tiene un peso de 0.125 lb y gira a una razón constante de 24 ciclos por segundo, determine la magnitud de la fuerza ejercida por el obturador sobre la flecha en *A*.

16.84 y 16.85 Una barra uniforme de longitud *L* y masa *m* se sostiene en la forma indicada. Si el cable unido en *B* se rompe de manera repentina, determine *a*) la aceleración del extremo *B* y *b*) la reacción en el soporte articulado.

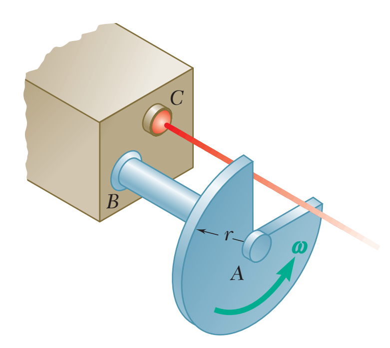


Figura *P16.83*

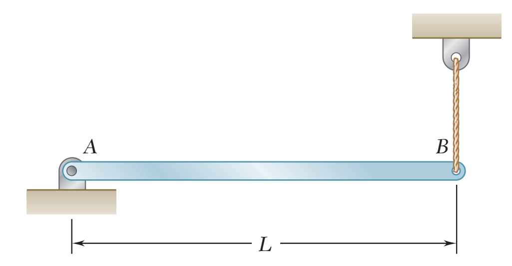


Figura P16.84

16.86 Un cono uniforme delgado de masa *m* puede girar libremente alrededor de la barra horizontal *AB*. Si el cono se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine *a*) la aceleración de la punta *D*, *b*) la reacción en *C*.

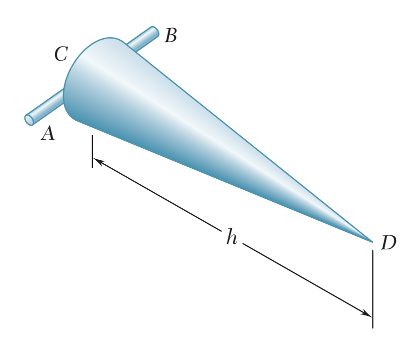


Figura P16.86

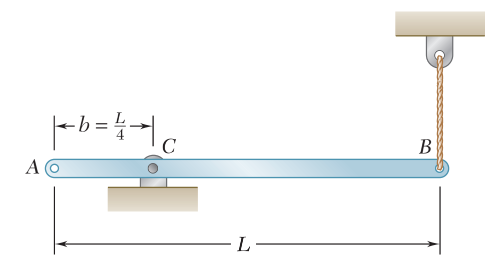


Figura P16.85

16.87 El objeto *ABC* consiste en dos barras delgadas soldadas entre sí en el punto *B*. La barra *AB* tiene una masa de 1 kg y la barra *BC* tiene una masa de 2 kg. Si la magnitud de la velocidad angular de *ABC* es de 10 rad/s cuando $\theta = 0$, determine las componentes de la reacción en el punto *C* cuando $\theta = 0$.

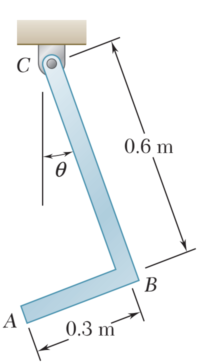


Figura P16.87

16.88 Una varilla delgada AB de 8 lb y una varilla delgada BC de 5 lb están conectadas mediante un pasador en B y por medio de la cuerda AC. El ensamble puede girar en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y un par **M** aplicado a la varilla BC. Si en la posición mostrada la velocidad angular del ensamble es cero y la tensión en la cuerda AC es igual a 6 lb, determine *a*) la aceleración angular del ensamble, *b*) la magnitud del par **M**.

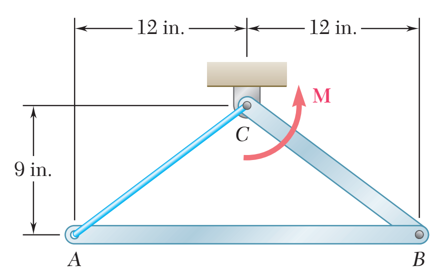


Figura P16.88

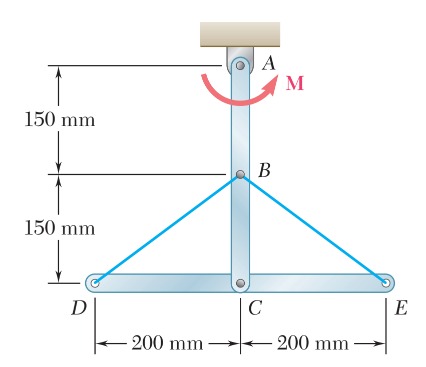


Figura P16.89

16.89 Dos barras uniformes, ABC con masa de 3 kg y DCE con masa de 4 kg, están conectadas mediante un pasador en C y por medio de dos cuerdas BD y BE. El ensamble en forma de T gira en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y de un par **M** que se aplica a la barra ABC. Si en el instante mostrado la tensión en la cuerda BD es de 8 N, determine *a*) la aceleración angular del ensamble, *b*) el par **M**.

16.90 Una barra ligera de 1.5 kg está soldada a un disco uniforme de 5 kg en la forma que se muestra. El ensamble oscila libremente alrededor de C en un plano vertical. Si en la posición indicada el ensamble tiene una velocidad angular de 10 rad/s en dirección de las manecillas del reloj, determine *a*) la aceleración angular del ensamble, *b*) las componentes de la reacción en C.

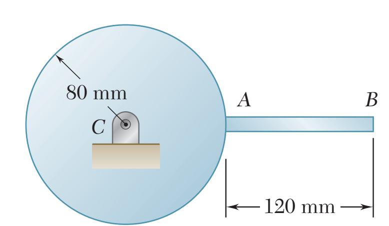


Figura *P16.90*

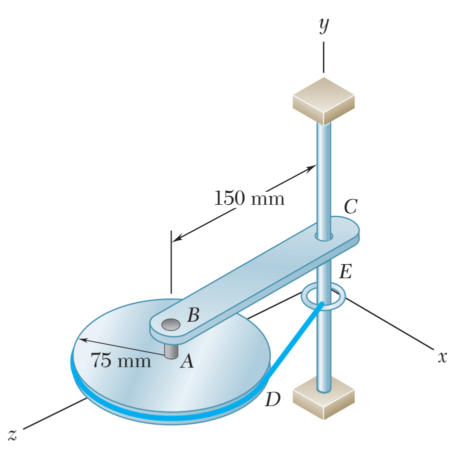


Figura *P16.91*

16.91 Un disco uniforme de 5 kg está unido a una barra uniforme BC de 3 kg mediante un pasador sin fricción AB. Una cuerda elástica se enrolla alrededor del borde del disco y se une a un anillo en E. Tanto E como la barra BC pueden girar con libertad alrededor del eje vertical. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando la tensión en la cuerda elástica es de 15 N, determine *a*) la aceleración angular del disco, *b*) la aceleración del centro del disco.

16.92 Obtenga la ecuación $\Sigma M_C = I_C\alpha$ para el disco rodante de la figura 16.17, donde ΣM_C representa la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor del centro instantáneo C e I_C es el momento de inercia del disco alrededor de C.

16.93 Demuestre que en el caso de un disco desequilibrado, la ecuación que se obtuvo en el problema 16.92 sólo es válida cuando el centro de masa G, el centro geométrico O y el centro instantáneo C se encuentran en una línea recta.

16.94 Un neumático de radio r y radio de giro centroidal $\bar{k}$ se suelta desde el reposo sobre una pendiente y rueda sin deslizarse. Obtenga una expresión para la aceleración del centro del neumático en términos de r, $\bar{k}$, β y g.

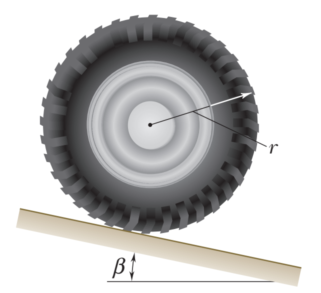


Figura *P16.94*

16.95 Un volante está rígidamente unido a una flecha de 1.5 in. de radio que puede rodar a lo largo de rieles paralelos en la forma que se indica. Cuando se suelta desde el reposo, el sistema rueda 16 ft en 40 s. Determine el radio de giro centroidal del sistema.

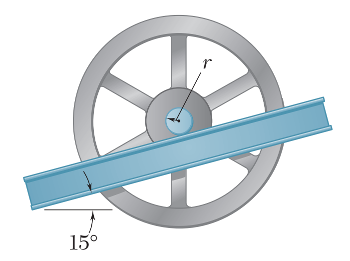


Figura P16.95 y P16.96

16.96 Un volante de radio de giro centroidal $\bar{k}$ está rígidamente unido a un eje que puede rodar a lo largo de rieles paralelos. Si se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el eje y los rieles, deduzca una expresión para el máximo ángulo de inclinación β para el cual no ocurrirá deslizamiento.

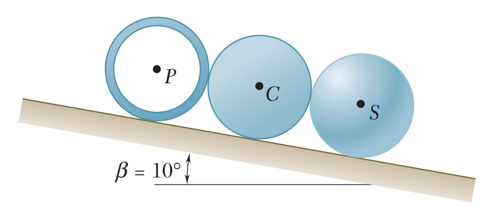


Figura P16.97

16.97 Una esfera homogénea S, un cilindro uniforme C y un tubo delgado P están en contacto cuando se sueltan desde el reposo sobre la pendiente que se muestra. Si los tres objetos ruedan sin deslizarse, determine después de 4 s de movimiento, la distancia libre entre *a*) el tubo y el cilindro y *b*) el cilindro y la esfera.

16.98 a 16.101 Un tambor de 4 in. de radio está unido a un disco de 8 in. de radio. El disco y el tambor tienen una masa combinada de 10 lb y un radio de giro combinado de 6 in. Se une una cuerda en la forma indicada y se jala con una fuerza **P** de 5 lb de magnitud. Si los coeficientes de fricción estática y cinética son, respectivamente, $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) si el disco se desliza o no y *b*) la aceleración angular del disco y la aceleración de G.

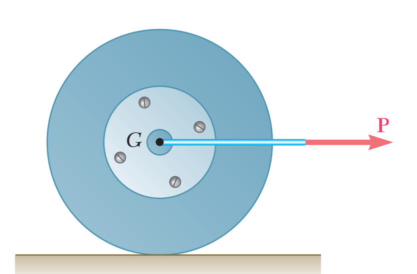


Figura P16.98 y P16.102

16.102 a 16.105 Un tambor de 60 mm de radio se une a un disco de 120 mm de radio. El disco y el tambor tienen una masa total de 6 kg y un radio de giro combinado de 90 mm. Se ata una cuerda en la forma mostrada y se jala con una fuerza **P** de 20 N de magnitud. Si el disco rueda sin deslizarse, determine *a*) la aceleración angular del mismo y la aceleración de G y *b*) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática compatible con este movimiento.

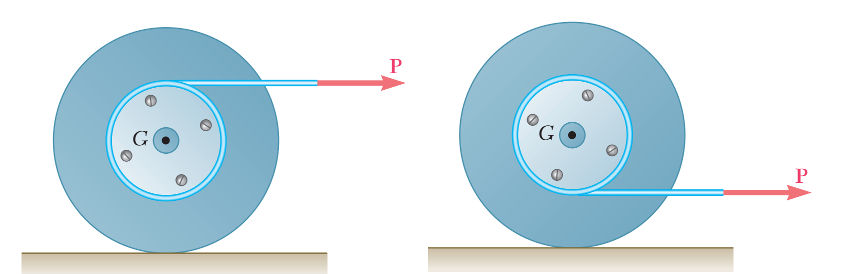


Figura P16.99 y *P16.103*

Figura P16.100 y *P16.104*

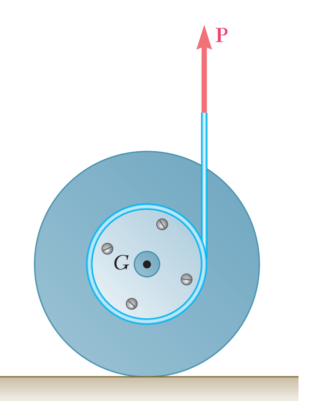


Figura P16.101 y P16.105

16.106 a 16.108 Una barra de masa m se mantiene en la forma mostrada entre cuatro discos, cada uno con masa m' y radio $r = 75$ mm. Determine la aceleración de la barra inmediatamente después de haber sido liberada desde el reposo, si las fuerzas normales sobre los discos son suficientes para evitar cualquier deslizamiento y se supone que *a*) $m = 5$ kg y $m' = 2$ kg, *b*) la masa m' de los discos es despreciable, *c*) la masa m de la barra es despreciable.

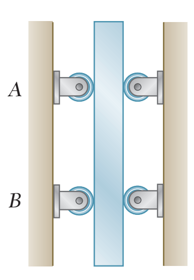


Figura P16.106

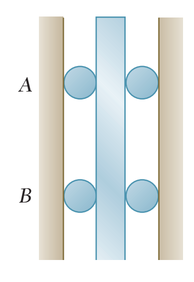


Figura P16.107

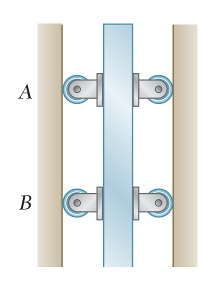


Figura P16.108

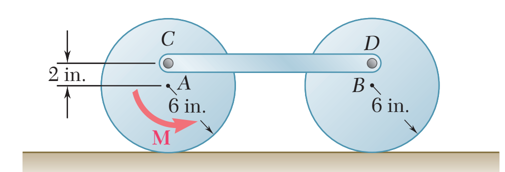


Figura P16.109

16.109 Dos discos uniformes A y B, cada uno con un peso de 4 lb, se conectan mediante una barra CD de 3 lb como se muestra en la figura. Un par **M** en sentido contrario al de las manecillas del reloj, con momento de 1.5 lb · ft, se aplica al disco A. Si se sabe que los discos ruedan sin deslizarse, determine *a*) la aceleración del centro de cada disco, *b*) la componente horizontal de la fuerza ejercida sobre el disco B por el pasador D.

16.110 El engrane C tiene un peso de 10 lb y un radio de giro centroidal de 3 in. La barra uniforme AB tiene un peso de 6 lb y el engrane D es estacionario. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición que se muestra, determine *a*) la aceleración angular del engrane C y *b*) la aceleración del punto B.

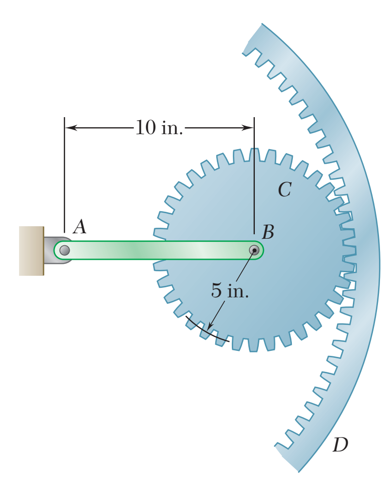


Figura P16.110

Figura P16.111

16.111 La mitad de un cilindro uniforme de masa m está en reposo cuando se aplica una fuerza **P** en la forma mostrada. Si se supone que la sección rueda sin deslizarse, determine *a*) su aceleración angular, *b*) el valor mínimo de μ_s que sea compatible con el movimiento.

16.112 Retome el problema 16.111, y ahora suponga que la fuerza **P** aplicada en el punto B está dirigida horizontalmente hacia la derecha.

16.113 Una pequeña abrazadera de masa m_B se une en B al aro de masa m_h. El sistema se suelta desde el reposo cuando $\theta = 90°$ y rueda sin deslizarse. Si $m_h = 3m_B$, determine *a*) la aceleración angular del aro y *b*) las componentes horizontal y vertical de la aceleración de B.

16.114 Una pequeña abrazadera de masa m_B se une a B en un aro de masa m_h. Si el sistema se suelta desde el reposo y rueda sin deslizarse, obtenga una expresión para la aceleración angular del aro en términos de m_B, m_h, r y θ.

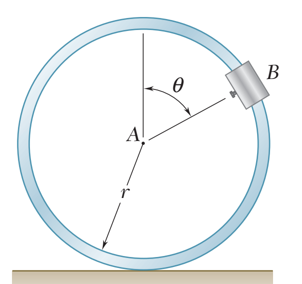


Figura P16.113 y *P16.114*

16.115 El centro de gravedad G de una rueda de tracción desequilibrada de 1.5 kg se ubica a una distancia $r = 18$ mm de su centro geométrico B. El radio de la rueda es $R = 60$ mm y su radio de giro centroidal es de 44 mm. En el instante que se muestra, el centro B de la rueda tiene una velocidad de 0.35 m/s y una aceleración de 1.2 m/s^2, ambas dirigidas hacia la izquierda. Si se sabe que la rueda gira sin deslizarse y si se desprecia la masa del yugo de tracción AB, determine la fuerza **P** horizontal aplicada al yugo.

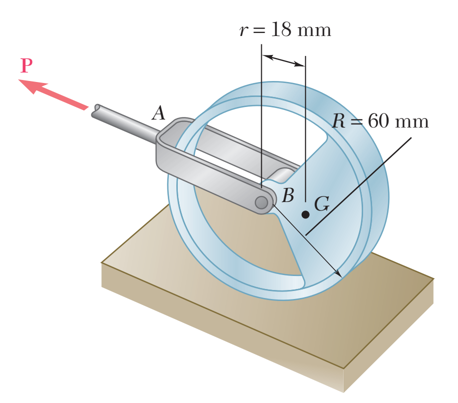


Figura *P16.115*

16.116 Una barra de 2 kg está unida a un cilindro uniforme de 5 kg mediante un pasador cuadrado P, como se muestra en la figura. Si $r = 0.4$ m, $h = 0.2$ m, $\theta = 20°$, $L = 0.5$ m y $\omega = 2$ rad/s en el instante mostrado, determine las reacciones en P en este instante, suponiendo que el cilindro rueda sin deslizarse hacia abajo sobre el plano inclinado.

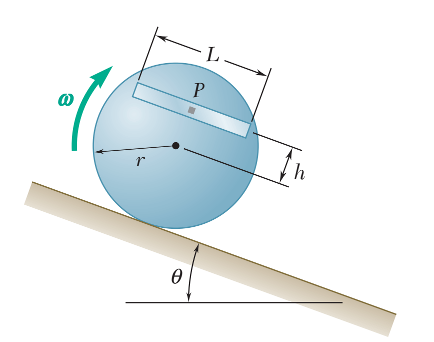


Figura P16.116

16.117 Los extremos de una varilla uniforme AB de 10 kg están unidos a collarines de masa despreciable que se deslizan sin fricción a lo largo de barras fijas. Si la varilla se suelta desde el reposo cuando $\theta = 25°$, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la varilla, *b*) la reacción en A, *c*) la reacción en B.

16.118 Los extremos de una varilla uniforme AB de 10 kg están unidos a collarines de masa despreciable que se deslizan sin fricción a lo largo de barras fijas. Se aplica una fuerza vertical **P** al collarín B cuando $\theta = 25°$, lo que ocasiona que el collarín parta desde el reposo con una aceleración hacia arriba de 12 m/s^2. Determine *a*) la fuerza **P**, *b*) la reacción en A.

16.119 El movimiento de la barra uniforme AB de 8 lb se guía mediante ruedas pequeñas de peso despreciable que ruedan sin fricción a lo largo de las ranuras mostradas. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición indicada, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la barra, *b*) la reacción en B.

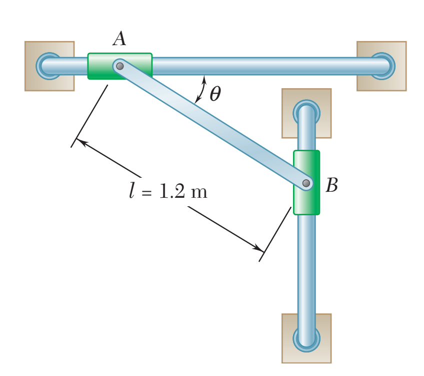


Figura P16.117 y P16.118

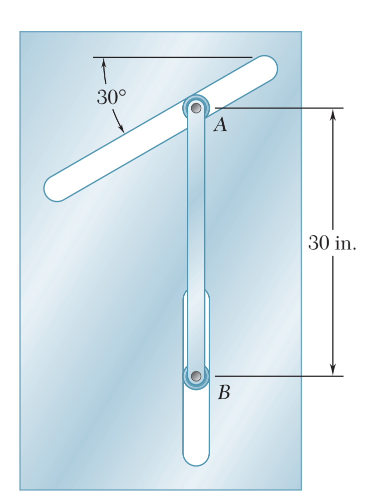


Figura P16.119

16.120 La varilla uniforme *AB* de 4 lb está unida a collarines de masa despreciable que pueden deslizarse sin fricción a lo largo de las barras fijas mostradas. La varilla *AB* se encuentra en reposo en la posición $\theta = 25°$, cuando se aplica una fuerza horizontal **P** al collarín *A*, lo que ocasiona que éste inicie su movimiento hacia la izquierda con una aceleración de 12 ft/s^2. Determine *a*) la fuerza **P**, *b*) la reacción en *B*.

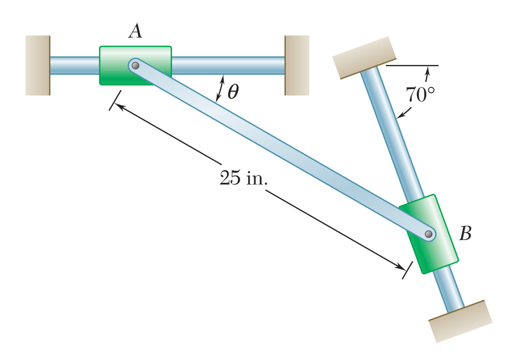


Figura P16.120 y P16.121

16.121 La varilla uniforme *AB* de 4 lb está unida a collarines de masa despreciable que pueden deslizarse sin fricción a lo largo de las barras fijas mostradas. Si la varilla *AB* se suelta desde el reposo en la posición $\theta = 25°$, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la varilla, *b*) la reacción en *B*.

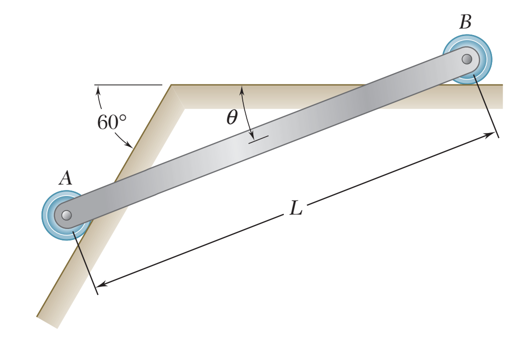


Figura *P16.122*

16.122 El movimiento de una barra uniforme *AB* de 5 kg de masa y longitud $L = 750$ mm se guía por medio de dos ruedas pequeñas de masa despreciable que ruedan sobre la superficie mostrada. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 20°$, determine inmediatamente después de la aceleración *a*) la aceleración angular de la barra y *b*) la reacción en *A*.

16.123 El extremo *A* de la varilla uniforme *AB* de 8 kg está unido a un collarín que puede deslizarse sin fricción sobre una barra vertical. El extremo *B* de la varilla está unido a un cable vertical *BC*. Si la varilla se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la varilla, *b*) la reacción en *A*.

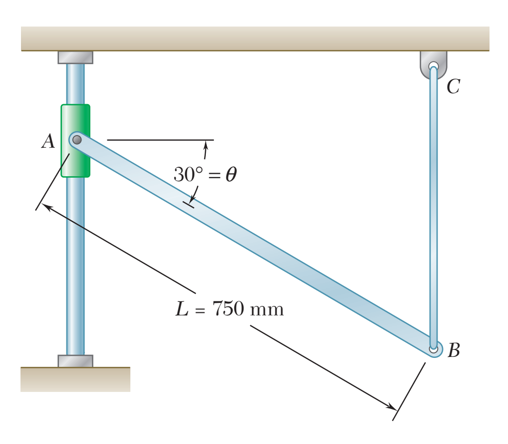


Figura *P16.123*

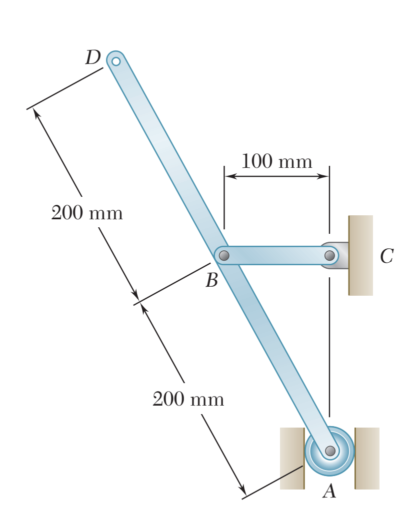


Figura P16.124

16.124 La barra uniforme *ABD* de 4 kg está conectada a una manivela *BC* y dispone de una pequeña rueda que puede rodar sin fricción a lo largo de una ranura vertical. Si en el instante que se muestra la manivela *BC* gira con una velocidad angular de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y con una aceleración angular de 15 rad/s^2 en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la reacción en *A*.

16.125 La barra uniforme *BD* de 250 mm y 5 kg de masa está conectada como se muestra al disco *A* y a un collarín de masa despreciable, el cual puede deslizarse libremente a lo largo de una barra vertical. Si se sabe que el disco *A* gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la velocidad constante de 500 rpm, determine las reacciones en *D* cuando $\theta = 0$.

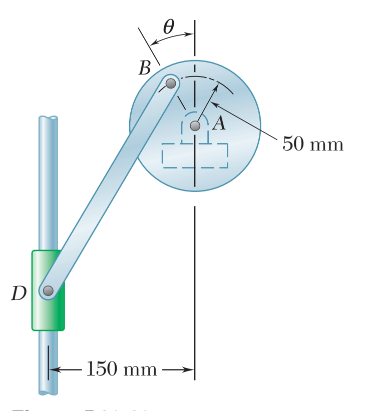


Figura P16.125

16.126 Retome el problema 16.125 cuando $\theta = 90°$.

16.127 La barra uniforme *BD* de 15 in. pesa 8 lb y está conectada como se muestra a la manivela *AB* y al collarín *D* de masa despreciable, el cual puede deslizarse libremente a lo largo de una barra horizontal. Si se sabe que la manivela *AB* gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a razón constante de 300 rpm, determine la reacción en *D* cuando $\theta = 0$.

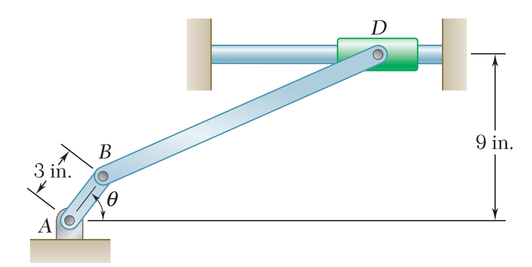


Figura P16.127

16.128 Retome el problema 16.127 cuando $\theta = 90°$.

16.129 La barra uniforme *AB* de 3 kg de masa está conectada a la manivela *BD* y a un collarín de peso despreciable, el cual puede deslizarse libremente a lo largo de la barra *EF*. Si se sabe que en la posición mostrada la manivela *BD* gira con una velocidad angular de 15 rad/s y una aceleración angular de 60 rad/s^2, ambas en el sentido de las manecillas del reloj, determine la reacción en *A*.

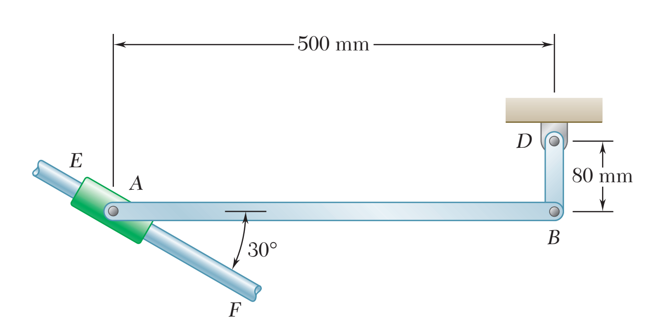


Figura P16.129

16.130 En el problema 16.129, determine la reacción en *A* si se sabe que en la posición mostrada la manivela *BD* gira con una velocidad angular de 15 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y una aceleración angular de 60 rad/s^2 en el sentido contrario.

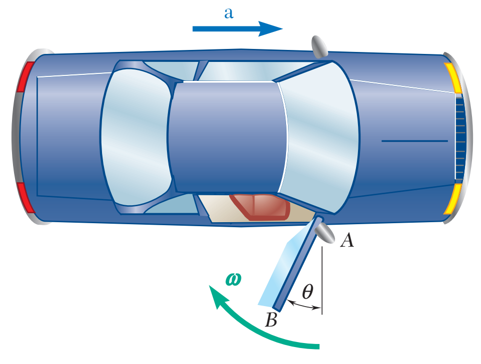


Figura *P16.131*

16.131 Un conductor arranca su automóvil con la puerta del lado del conductor abierta ($\theta = 0$). La puerta de 80 lb tiene un radio de giro centroidal $\bar{k} = 12.5$ in., y su centro de masa se localiza a una distancia $r = 22$ in. de su eje de rotación vertical. Si se sabe que el conductor mantiene una aceleración constante de 6 ft/s^2, determine la velocidad angular de la puerta cuando se cierra de golpe ($\theta = 90°$).

16.132 Para el automóvil del problema 16.131, determine la aceleración constante mínima que el conductor puede mantener si la puerta ha de cerrarse perfectamente, si se sabe que, cuando la puerta golpee el marco, su velocidad angular debe ser al menos de 2 rad/s para que opere el mecanismo de la cerradura.

16.133 Dos barras uniformes de 8 lb se conectan para formar el varillaje mostrado. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine la reacción en *D* inmediatamente después de soltar el varillaje desde el reposo en la posición mostrada.

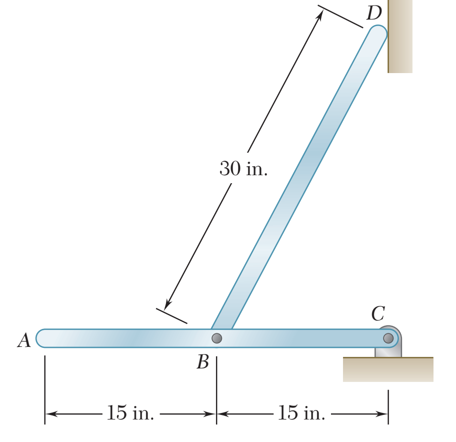


Figura P16.133

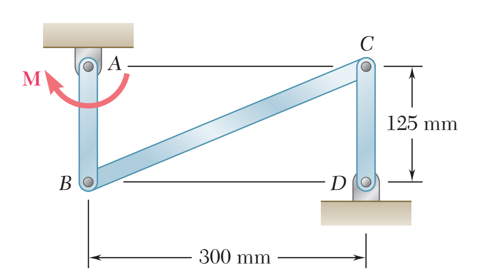


Figura P16.134

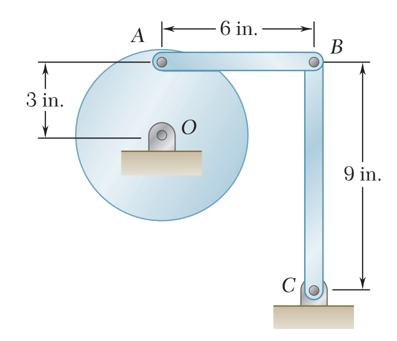


Figura P16.136 y *P16.137*

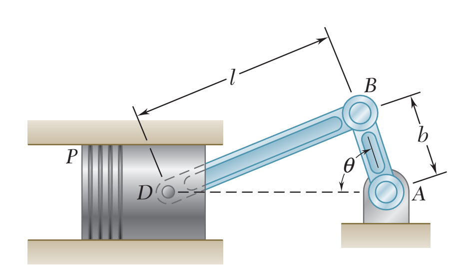


Figura P16.138

16.134 El varillaje *ABCD* se forma conectando la barra *BC* de 3 kg a las barras *AB* y *CD* de 1.5 kg. El movimiento del varillaje se controla mediante el par **M** aplicado a la barra *AB*. Si en el instante mostrado la velocidad angular de la barra *AB* es de 24 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y no hay aceleración angular, determine *a*) el par **M**, *b*) las componentes de la fuerza ejercida en *B* sobre la barra *BC*.

16.135 Retome el problema 16.134, y ahora suponga que en el instante indicado la barra *AB* tiene una velocidad angular de 24 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y una aceleración angular de 160 rad/s^2 en el sentido contrario.

16.136 La barra *AB* de 4 lb y la barra *BC* de 6 lb están conectadas como se muestra a un disco que se pone a girar en un plano vertical a una velocidad angular constante de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Para la posición indicada, determine las fuerzas ejercidas en *A* y *B* sobre la barra *AB*.

16.137 La barra *AB* de 4 lb y la barra *BC* de 6 lb están conectadas como se indica a un disco que se pone a girar en un plano vertical. Si en el instante indicado el disco tiene una aceleración angular de 18 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj y no tiene velocidad angular, determine las componentes de las fuerzas ejercidas en *A* y *B* sobre la barra *AB*.

16.138 En el sistema motriz mostrado, $l = 250$ mm y $b = 100$ mm. Se supone que la biela *BD* es una barra uniforme y ligera de 1.2 kg que está unida al pistón *P* de 1.8 kg. Durante una prueba del sistema, la manivela *AB* se pone a girar con una velocidad angular constante de 600 rpm en el sentido de las manecillas del reloj sin ninguna fuerza aplicada a la cara del pistón. Determine las fuerzas ejercidas sobre los puntos *B* y *D* de la biela cuando $\theta = 180°$. (Desprecie el efecto del peso de la biela.)

16.139 Retome el problema 16.138 cuando $\theta = 90°$.

16.140 Dos barras idénticas *AC* y *CE*, cada una de peso *W*, se unen para formar el varillaje mostrado. Si se sabe que en el instante indicado la fuerza **P** ocasiona que el rodillo conectado en *D* se mueva hacia la izquierda con una velocidad constante $\mathbf{v}_D$, determine la magnitud de la fuerza **P** en términos de *L*, *W*, v_D y θ.

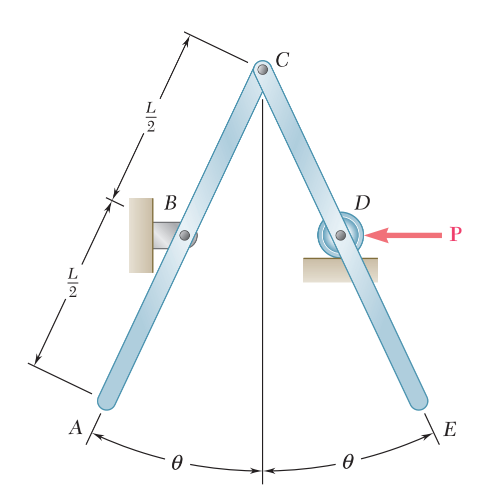


Figura *P16.140*

16.141 El poste uniforme ABC de 50 kg y 6 m de largo tiene, en el instante mostrado, una velocidad angular de 1 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el punto C se desliza hacia la derecha. Una fuerza horizontal **P** de 500 N actúa en B. Si el coeficiente de fricción cinética entre el poste y el suelo es de 0.3, determine en este instante *a*) la aceleración del centro de gravedad, *b*) la fuerza normal entre el poste y el suelo.

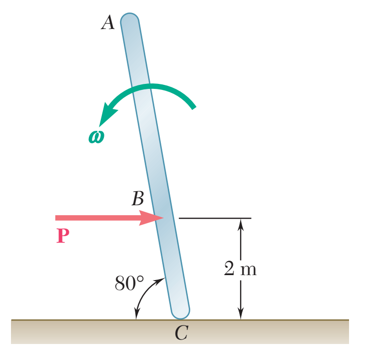


Figura P16.141

***16.142** Un disco uniforme de masa $m = 4$ kg y radio $r = 150$ mm está soportado por una banda $ABCD$ que se encuentra empernada al disco en B y en C. Si la banda se rompe de manera súbita en un punto localizado entre A y B, determine *a*) la aceleración del centro del disco, *b*) la tensión en la parte CD de la banda.

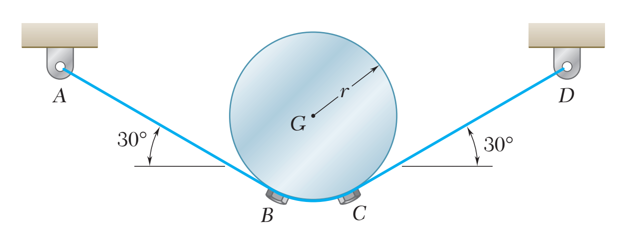


Figura P16.142

***16.143** Dos discos, cada uno con masa m y radio r, se conectan de la forma mostrada por medio de una cadena continua de masa despreciable. Si de manera repentina se quita un pasador en el punto C de la cadena, determine *a*) la aceleración angular de cada disco, *b*) la tensión en la parte izquierda de la cadena y *c*) la aceleración del centro del disco B.

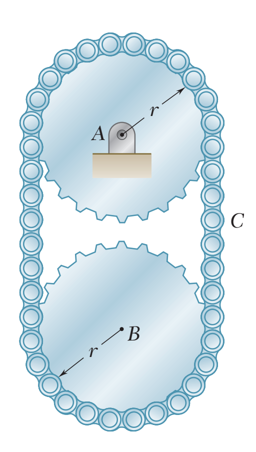


Figura P16.143

***16.144** Una barra uniforme AB, con peso de 30 lb y longitud de 3 ft, se une al carrito C de 40 lb. Si se desprecia la fricción, determine inmediatamente después de que el sistema se libera desde el reposo, *a*) la aceleración del carrito, *b*) la aceleración angular de la barra.

***16.145** Una barra ligera y uniforme AB de masa m se suspende como se muestra de un disco uniforme que tiene la misma masa m. Determine las aceleraciones de los puntos A y B inmediatamente después de que se ha aplicado una fuerza horizontal **P** en B.

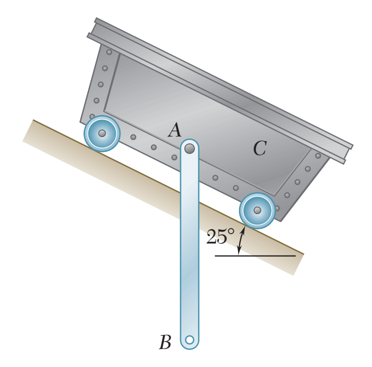


Figura P16.144

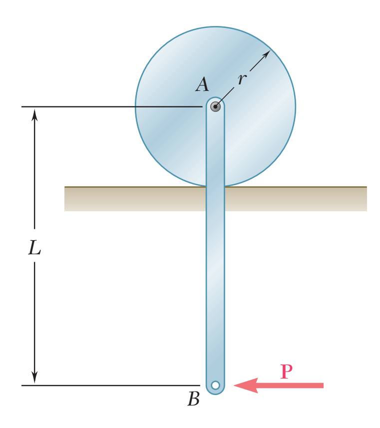


Figura *P16.145*

***16.146** La varilla delgada *AB* de 5 kg está conectada mediante un pasador a un disco uniforme de 8 kg, como se muestra en la figura. Inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo, determine la aceleración de *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

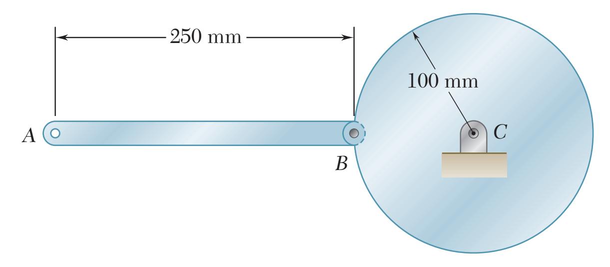


Figura P16.146

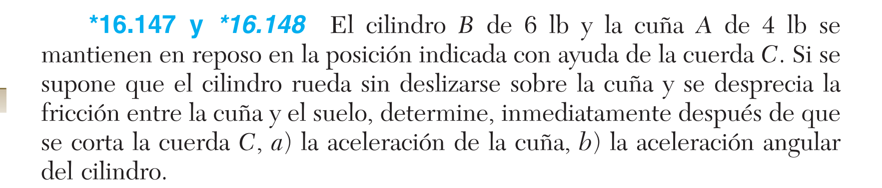


Figura P16.147

***16.147 y *16.148** El cilindro *B* de 6 lb y la cuña *A* de 4 lb se mantienen en reposo en la posición indicada con ayuda de la cuerda *C*. Si se supone que el cilindro rueda sin deslizarse sobre la cuña y se desprecia la fricción entre la cuña y el suelo, determine, inmediatamente después de que se corta la cuerda *C*, *a*) la aceleración de la cuña, *b*) la aceleración angular del cilindro.

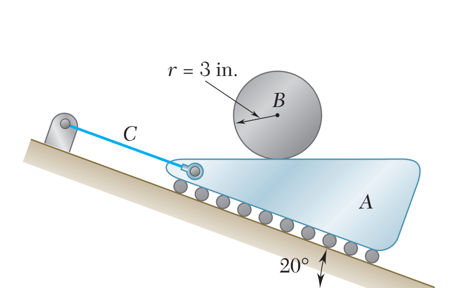


Figura *P16.148*

***16.149** Cada una de las barras *AB* y *BC* de 3 kg tiene una longitud de $L = 500$ mm. Se aplica una fuerza horizontal **P** de 20 N a la barra *BC* como se muestra en la figura. Si $b = L$ (**P** se aplica en *C*), determine la aceleración angular de cada barra.

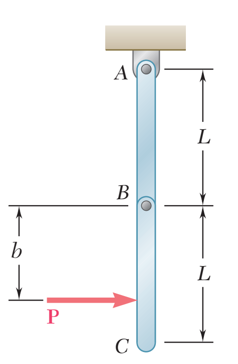


Figura *P16.149* y *P16.150*

***16.150** Cada una de las barras *AB* y *BC* de 3 kg tiene una longitud $L = 500$ mm. Se aplica una fuerza horizontal **P** de 20 N a la barra *BC*. Para la posición indicada, determine *a*) la distancia *b* para la cual la barra se mueve como si formara un cuerpo rígido, *b*) la aceleración angular correspondiente de las barras.

***16.151** *a*) Determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en la barra del problema 16.76. *b*) Muestre que la respuesta del inciso *a*) es independiente del peso de la barra.

***16.152** Dibuje los diagramas de cortante y momento flector para la barra del problema 16.84 inmediatamente después de que se rompe el cable en *B*.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 16

En este capítulo se estudió la *cinética de cuerpos rígidos*, esto es, las relaciones que existen entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, la forma y la masa del cuerpo y el movimiento que se produce. Salvo por las primeras dos secciones, las cuales se aplicaron al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido, el análisis se restringió al *movimiento plano de placas rígidas* y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia. El estudio del movimiento plano de cuerpos rígidos no simétricos y del movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se considerará en el capítulo 18.

Ecuaciones fundamentales de movimiento de un cuerpo rígido

Se recordaron primero [sección 16.2] las dos ecuaciones fundamentales que se dedujeron en el capítulo 14 para el movimiento de un sistema de partículas y se observó que se aplican al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. La primera ecuación define el movimiento del centro de masa G del cuerpo; se tiene

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{16.1}$$

donde m es la masa del cuerpo y $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración de G. La segunda se relaciona con el movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia centroidal; se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{16.2}$$

donde $\dot{\mathbf{H}}_G$ es la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo alrededor de su centro de masa G. Juntas, las ecuaciones (16.1) y (16.2) expresan que *el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema compuesto por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ en G y el par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$* (figura 16.19).

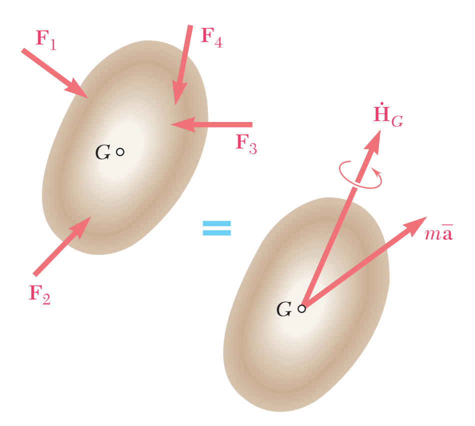


Figura 16.19

Cantidad de movimiento angular en movimiento plano

Restringiendo el análisis en este punto y para el resto del capítulo al movimiento plano de placas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia, se demostró [sección 16.3] que la cantidad de movimiento angular del cuerpo podría expresarse como

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \tag{16.4}$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje centroidal perpendicular al plano de referencia y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (16.4) se obtuvo

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \tag{16.5}$$

que muestra que en el caso restringido que se consideró aquí, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido

puede representarse mediante un vector de la misma dirección que $\boldsymbol{\alpha}$ (esto es, perpendicular al plano de referencia) y con magnitud $\bar{I}\alpha$.

Ecuaciones para el movimiento plano de un cuerpo rígido

Se concluye de lo anterior [sección 16.4] que el movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia se define mediante las tres ecuaciones escalares

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \qquad (16.6)$$

Principio de d'Alembert

Se concluye además que *las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son realmente* ***equivalentes*** *a las fuerzas efectivas de las diversas partículas que forman el cuerpo.* Este enunciado, conocido como *principio de d'Alembert,* puede expresarse en la forma del diagrama vectorial que se muestra en la figura 16.20, donde las fuerzas efectivas se han representado mediante un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G y un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. En el caso particular de una placa en *traslación,* las fuerzas efectivas que se muestran en la parte *b*) de esta figura se reducen a un solo vector $m\bar{\mathbf{a}}$ en tanto que en el caso particular de una placa en *rotación centroidal,* se reducen a un solo par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$; en otro caso de movimiento plano, tanto el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ como el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ deben incluirse.

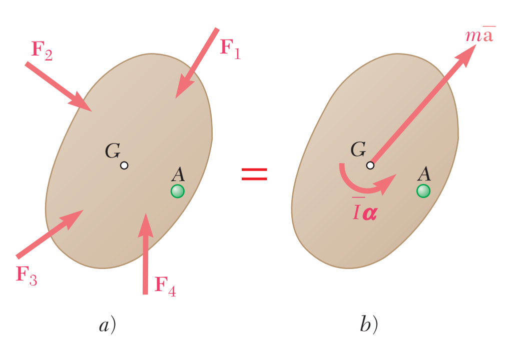


Figura 16.20

Ecuación de cuerpo libre de diagramas

Cualquier problema en el que intervenga el movimiento plano de una placa rígida se resuelve dibujando una *ecuación de diagramas de cuerpo libre* similar al de la figura 16.20 [sección 16.6]. Es posible obtener tres ecuaciones de movimiento al igualar las componentes x, las componentes y y los momentos alrededor de un punto arbitrario A, de las fuerzas y vectores que participan [problemas resueltos 16.1, 16.2, 16.4 y 16.5]. Una solución alternativa se obtiene al agregar a las fuerzas externas un *vector de inercia* $-m\bar{\mathbf{a}}$ de sentido opuesto al de $\bar{\mathbf{a}}$, fijo en G, y un *par de inercia* $-\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ de sentido opuesto al de $\boldsymbol{\alpha}$. El sistema que se obtiene de este modo es equivalente a cero y se dice que la placa está en *equilibrio dinámico.*

Cuerpos rígidos conectados

El método que acaba de describirse se emplea también para resolver problemas que implican el movimiento plano de varios cuerpos rígidos conectados [sección 16.7]. Se dibuja una ecuación de diagramas de cuerpo libre para cada parte del sistema, y las ecuaciones de movimiento obtenidas se resuelven de manera simultánea. Sin embargo, en algunos casos es posible dibujar un solo diagrama para todo el sistema, en el que se incluyan todas las fuerzas externas, así como los vectores $m\bar{\mathbf{a}}$ y los pares $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ asociados con las diversas partes del sistema [problema resuelto 16.3].

Movimiento plano restringido

En la segunda parte del capítulo se estudian cuerpos rígidos *que se mueven bajo restricciones determinadas* [sección 16.8]. Si bien el análisis cinético del movimiento plano restringido de una placa rígida es el mismo que antes, debe complementarse con un *análisis cinemático* que persigue expresar las componentes $\bar{a}_x$ y $\bar{a}_y$ de la aceleración del centro de masa G de la placa en términos de su aceleración angular α. Los problemas que se resuelven de este modo incluyen la *rotación no centroidal* de barras y placas [problemas resueltos 16.6 y 16.7], el *movimiento de rodamiento* de esferas y ruedas [problemas resueltos 16.8 y 16.9], y el movimiento plano de *diversos tipos de varillajes* [problema resuelto 16.10].

Problemas de repaso

16.153 El eje de un disco de 5 in. de radio se encaja dentro de una ranura que forma un ángulo de 30° con la vertical. El disco se encuentra en reposo cuando se pone en contacto con una banda transportadora que se mueve a velocidad constante. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es de 0.20 y se desprecia la fricción de rodamiento, determine la aceleración angular del disco mientras ocurre el deslizamiento.

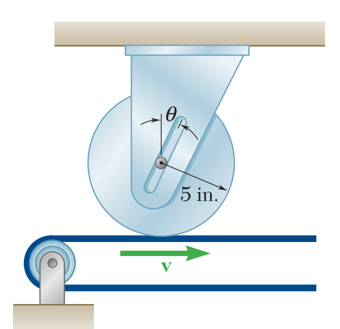


Figura P16.153

16.154 Retome el problema 16.153, y ahora suponga que se invierte la dirección del movimiento de la banda transportadora.

16.155 Unos cilindros idénticos de masa m y radio r se empujan mediante una serie de brazos móviles. Si se supone que el coeficiente de fricción entre todas las superficies es $\mu < 1$ y se denota con a la magnitud de la aceleración de los brazos, obtenga una expresión para *a*) el valor máximo permisible de a si cada cilindro debe rodar sin deslizarse, *b*) el valor mínimo permisible de a si cada cilindro debe moverse hacia la derecha y sin girar.

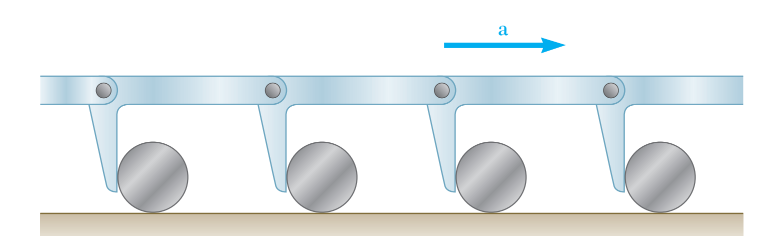


Figura *P16.155*

16.156 Un ciclista avanza a una velocidad de 20 mph sobre un camino horizontal. La distancia entre los ejes de la bicicleta es de 42 in., y el centro de masa del ciclista y la bicicleta se ubica a 26 in. debajo del eje delantero y 40 in. arriba del suelo. Si el ciclista aplica los frenos sólo sobre la rueda delantera, determine la distancia más corta en la que puede detenerse sin ser lanzado sobre la rueda delantera.

16.157 La varilla uniforme AB de peso W se suelta desde el reposo cuando $\beta = 70°$. Si se supone que la fuerza de fricción entre el extremo A y la superficie es suficientemente para evitar el deslizamiento, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la varilla, *b*) la reacción normal en A, *c*) la fuerza de fricción en A.

16.158 La varilla uniforme AB de peso W se suelta desde el reposo cuando $\beta = 70°$. Si se supone que la fuerza de fricción entre el extremo A y la superficie es cero, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la varilla, *b*) la aceleración del centro de masa de la varilla, *c*) la reacción en A.

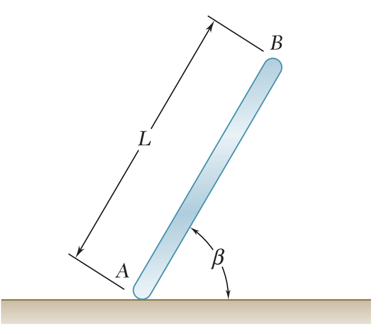


Figura P16.157 y *P16.158*

16.159 Una placa uniforme de masa m se cuelga en cada una de las formas mostradas. Para cada caso determine, inmediatamente después de que la conexión B se ha liberado, a) la aceleración angular de la placa, b) la aceleración de su centro de masa.

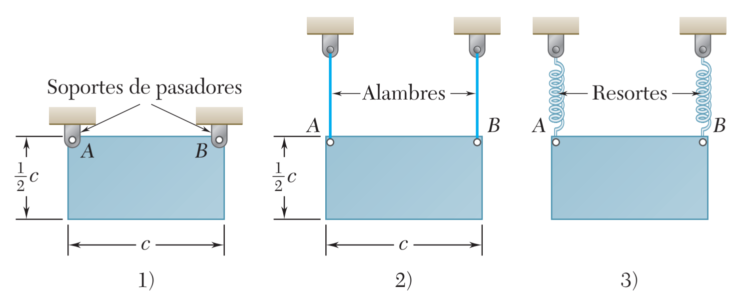


Figura P16.159

16.160 La barra delgada AB de peso W se mantiene en equilibrio mediante dos contrapesos, cada uno con un peso de $\frac{1}{2}W$. Si el alambre B se corta, determine la aceleración en ese instante a) del punto A, b) del punto B.

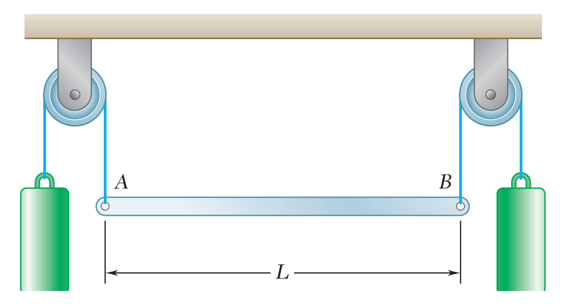


Figura P16.160

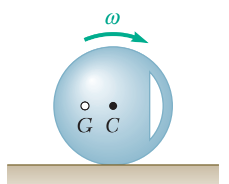


Figura P16.161

16.161 El centro de masa G de una rueda de 5 kg con radio R = 300 mm se localiza a una distancia r = 100 mm de su centro geométrico C. El radio de giro centroidal es $\bar{k}$ = 150 mm. Cuando la rueda gira sin deslizarse, su velocidad angular varía y se observa que $\boldsymbol{\omega}$ = 8 rad/s en la posición mostrada. Determine la aceleración angular correspondiente de la rueda.

16.162 Dos barras delgadas, cada una de longitud l y masa m, se sueltan desde el reposo en la posición mostrada. Si un pequeño botón, ubicado en el extremo B de la varilla AB se apoya sobre la barra CD, determine, inmediatamente después de la liberación a) la aceleración del extremo C de la barra CD, b) la fuerza ejercida sobre el botón.

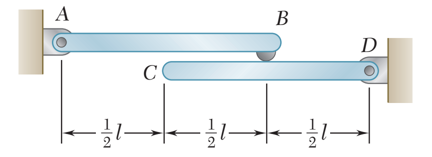


Figura *P16.162*

16.163 El movimiento de una placa cuadrada con lados de 150 mm y masa de 2.5 kg, está guiado mediante pasadores en las esquinas *A* y *B* que se deslizan por ranuras cortadas en una pared vertical. Inmediatamente después de que la placa se libera desde el reposo en la posición mostrada, determine *a*) la aceleración angular de la placa, *b*) la reacción en la esquina *A*.

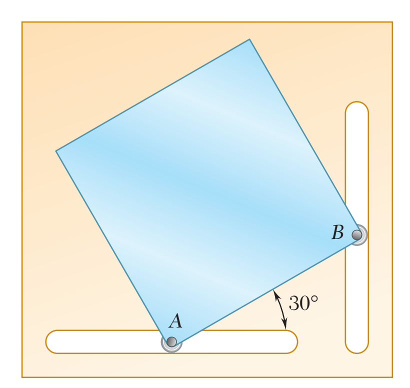


Figura P16.163

16.164 Retome el problema 16.163, y ahora suponga que la placa se conecta con un solo pasador en la esquina *A*.

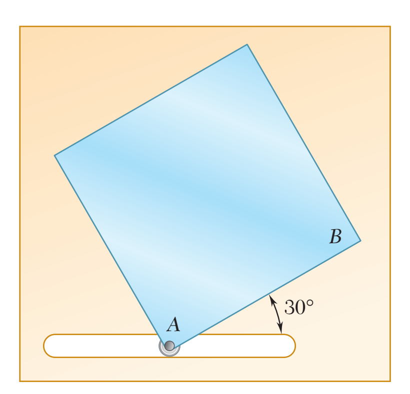


Figura P16.164

Problemas de computadora

16.C1 La barra AB de 5 lb se suelta desde el reposo en la posición mostrada. *a*) Si se supone que la fuerza de fricción entre el extremo A y la superficie es suficientemente grande para evitar el deslizamiento, use software para calcular la reacción normal y la fuerza de fricción en A inmediatamente después de la liberación para valores de β desde 0 hasta 85°. *b*) Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la barra y el piso es en realidad igual a 0.50, determine el rango de valores de β para los cuales la barra se deslizará inmediatamente después de haber sido liberada desde el reposo.

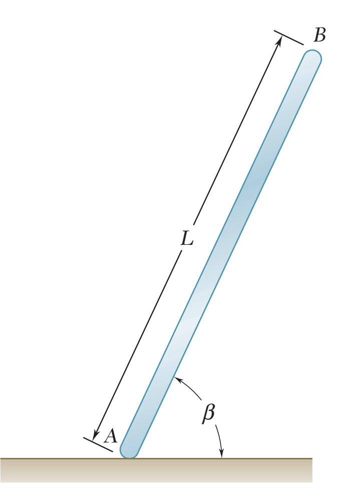


Figura P16.C1

16.C2 El extremo A de una barra AB de 5 kg se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante v_A = 15 m/s. Con software calcule y grafique las reacciones normales en los extremos A y B de la barra para valores de θ desde 0 hasta 50°. Determine el valor de θ con el cual el extremo B de la barra pierde contacto con la pared.

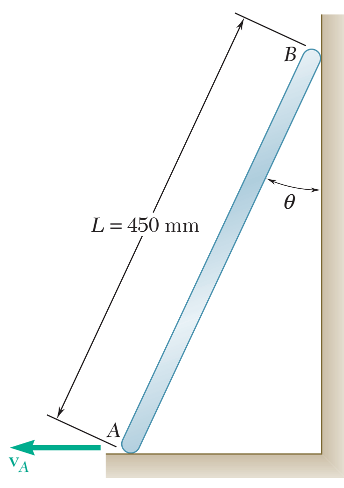


Figura P16.C2

16.C3 Un cilindro de 30 lb, diámetro $b = 8$ in. y altura $h = 6$ in. se coloca sobre una plataforma CD de 10 lb, la cual se mantiene en la posición indicada por medio de tres cables. Se desea determinar el valor mínimo de μ_s entre el cilindro y la plataforma para la cual el cilindro no se desliza sobre la plataforma, inmediatamente después de que se corta el cable AB. Con software calcule y grafique el valor mínimo permisible de μ_s para valores de θ desde 0 hasta 30°. Si se sabe que el valor real de μ_s es 0.60, determine el valor de θ en el cual el deslizamiento es inminente.

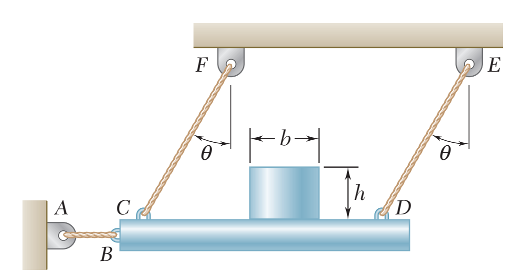


Figura P16.C3

16.C4 Para el sistema motriz del problema 15.C3 del capítulo 15, las masas del pistón P y la biela BD son 2.5 y 3 kg, respectivamente. Si durante una prueba del sistema no se aplica ninguna fuerza a la cara del pistón, use software para calcular y graficar las componentes horizontal y vertical de las reacciones dinámicas ejercidas sobre la biela en B y D para valores de θ desde 0 hasta 180°.

16.C5 Una barra uniforme y ligera AB de masa m se suspende de los resortes AC y BD en la forma que se muestra. Con software, calcule y grafique las aceleraciones de los extremos A y B, inmediatamente después de que el resorte AC se rompe, para valores de θ desde 0 hasta 90°.

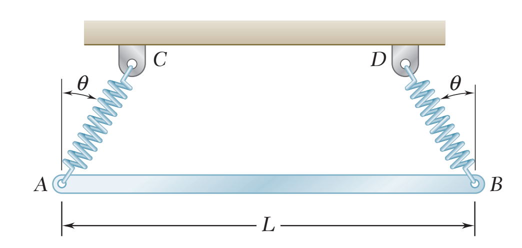


Figura P16.C5

En este capítulo se agregarán los métodos de la energía y la cantidad de movimiento a las herramientas disponibles para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos. Por ejemplo, las fuerzas ejercidas sobre las manos de este gimnasta mientras oscila de un anillo a otro pueden determinarse mediante el uso del principio de la conservación de la energía y la aplicación directa de la segunda ley de Newton.



CAPÍTULO 17

Movimiento plano de cuerpos rígidos: métodos de la energía y la cantidad de movimiento



CAPÍTULO 17 MOVIMIENTO PLANO DE CUERPOS RÍGIDOS: MÉTODOS DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

17.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se usa el método del trabajo y la energía y el del impulso y la cantidad de movimiento para analizar el movimiento plano de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos.

Primero se considera el método del trabajo y la energía. En las secciones 17.2 a 17.5 se definen el trabajo de una fuerza y de un par, y se obtendrá una expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano. El principio del trabajo y la energía se utiliza después para resolver problemas en los que participan desplazamientos y velocidades. En la sección 17.6 se aplica al principio de la conservación de la energía a la solución de una diversidad de problemas de ingeniería.

En la segunda parte del capítulo, el principio del impulso y la cantidad de movimiento se aplica en la solución de problemas que implican velocidades y tiempo (secciones 17.8 y 17.9) y se presentará y estudiará el concepto de la conservación de la cantidad de movimiento angular (sección 17.10).

En la última parte del capítulo (secciones 17.11 y 17.12) se consideran problemas que incluyen el impacto excéntrico de cuerpos rígidos. Como se hizo en el capítulo 13, donde se analiza el impacto de partículas, se usará el coeficiente de restitución entre cuerpos que chocan aunado al principio del impulso y la cantidad de movimiento en la solución de problemas de impacto. También se demuestra que el método utilizado se aplica no sólo cuando los cuerpos que chocan se mueven con libertad después del impacto, sino también cuando los cuerpos están sujetos a restricciones parciales en su movimiento.

17.2. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA PARA UN CUERPO RÍGIDO

El principio del trabajo y la energía se utilizará ahora para analizar el movimiento plano de cuerpos rígidos. Como se señaló en el capítulo 13, este método en particular se adapta bien a la solución de problemas en los que intervienen velocidades y desplazamientos. Su ventaja principal radica en el hecho de que el trabajo de fuerzas y la energía cinética de partículas son cantidades escalares.

Para aplicar el principio del trabajo y la energía en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido, se supondrá otra vez que el cuerpo rígido está compuesto por un gran número n de partículas de masa Δm_i. Si se recuerda la ecuación (14.30) de la sección 14.8, se escribe

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (17.1)$$

donde T_1, T_2 = valores inicial y final de la energía cinética total de las partículas que forman al cuerpo rígido

$U_{1\rightarrow 2}$ = trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las diversas partículas del cuerpo

La energía cinética total

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i v_i^2 \qquad (17.2)$$

se obtiene al sumar cantidades escalares positivas, y ella misma es una cantidad escalar positiva. Después se verá cómo puede determinarse T para diversos tipos de movimiento de un cuerpo rígido.



Fotografía 17.1 El trabajo realizado por la fricción reduce la energía cinética del neumático.

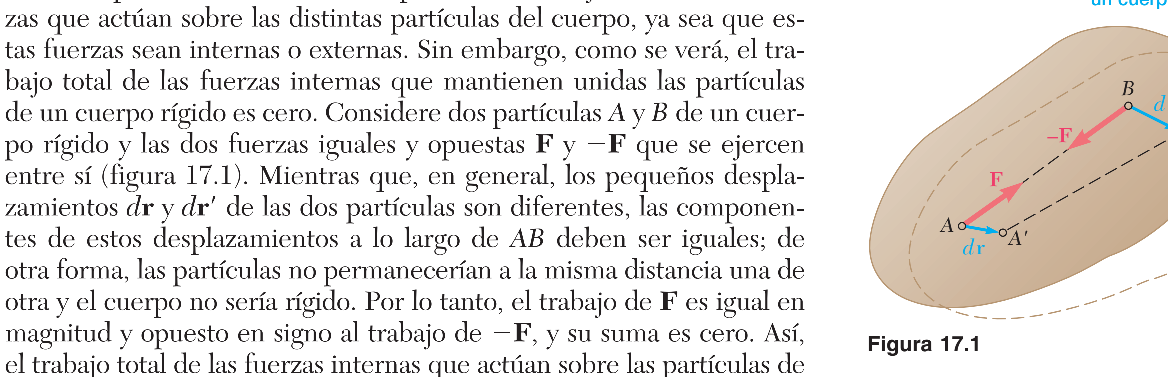


Figura 17.1

La expresión $U_{1\rightarrow 2}$ en (17.1) representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas del cuerpo, ya sea que estas fuerzas sean internas o externas. Sin embargo, como se verá, el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unidas las partículas de un cuerpo rígido es cero. Considere dos partículas A y B de un cuerpo rígido y las dos fuerzas iguales y opuestas **F** y −**F** que se ejercen entre sí (figura 17.1). Mientras que, en general, los pequeños desplazamientos $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de estos desplazamientos a lo largo de AB deben ser iguales; de otra forma, las partículas no permanecerían a la misma distancia una de otra y el cuerpo no sería rígido. Por lo tanto, el trabajo de **F** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de −**F**, y su suma es cero. Así, el trabajo total de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido es cero, y *la expresión* $U_{1\rightarrow 2}$ *en la ecuación* (17.1) *se reduce al trabajo de las fuerzas externas* y éstas actúan sobre el cuerpo durante el desplazamiento considerado.

17.3. TRABAJO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN CUERPO RÍGIDO

En la sección 13.2 se vio que el trabajo de una fuerza **F** durante un desplazamiento de su punto de aplicación desde A_1 hasta A_2 es

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{17.3}$$

o

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds \tag{17.3′}$$

donde F es la magnitud de la fuerza, α es el ángulo que forma con la dirección de movimiento de su punto de aplicación A y s es la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria.

Al calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, es a menudo conveniente determinar el trabajo de un par sin considerar por separado el trabajo de cada una de las fuerzas que lo forman. Considere las dos fuerzas **F** y −**F** que forman un par de momento **M** y que actúan sobre un cuerpo rígido (figura 17.2). Cualquier desplazamiento pequeño del cuerpo rígido que lleve a A y B, respectivamente, hacia A' y B'' puede dividirse en dos partes: en una parte los puntos A y B experimentan iguales desplazamientos $d\mathbf{r}_1$; en la otra, A' permanece fija mientras que B' se mueve hacia B'' a lo largo de un desplazamiento $d\mathbf{r}_2$ de magnitud $ds_2 = r\, d\theta$. En la primera parte del movimiento, el trabajo de **F** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de −**F** y su suma es cero. En la segunda parte del movimiento sólo trabaja la fuerza **F**, y su trabajo es $dU = F\, ds_2 = Fr\, d\theta$. Pero el producto Fr es igual a la magnitud M del momento del par. De tal modo, el trabajo de un par de momento **M** que actúa sobre un cuerpo rígido es

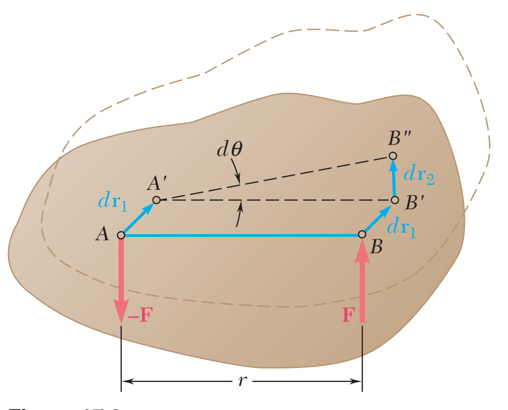


Figura 17.2

$$dU = M\, d\theta \tag{17.4}$$

donde $d\theta$ es el pequeño ángulo, expresado en radianes, que el cuerpo gira. Adviértase de nuevo que el trabajo debe expresarse en unidades obtenidas al multiplicar unidades de fuerza por unidades de longitud. El trabajo del par durante una rotación finita del cuerpo rígido se ob-

tiene integrando ambos miembros de (17.4) desde el valor inicial θ_1 del ángulo θ hasta su valor final θ_2. Se escribe

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \tag{17.5}$$

Cuando el momento **M** *del par es constante*, la fórmula (17.5) se reduce a

$$U_{1\rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \tag{17.6}$$

En la sección 13.2 se señaló que varias fuerzas que se encuentran en los problemas de cinética *no realizan trabajo.* Son fuerzas aplicadas en puntos fijos o que actúan en una dirección perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación. Entre las fuerzas que no trabajan se han listado las siguientes: la reacción en un pasador sin fricción cuando el cuerpo soportado gira alrededor del pasador; la reacción en una superficie sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie, y el peso del cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve horizontalmente. Además es posible agregar ahora que *cuando un cuerpo rígido rueda sin deslizarse sobre una superficie fija, la fuerza de fricción* **F** *en el punto de contacto C no realiza trabajo.* La velocidad $\mathbf{v}_C$ del punto de contacto C es cero, y el trabajo de la fuerza de fricción **F** durante un desplazamiento pequeño del cuerpo rígido es

$$dU = F\,ds_C = F(v_C\,dt) = 0$$

17.4. ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

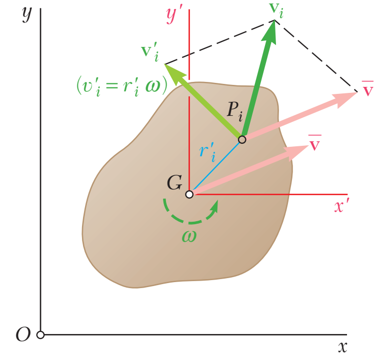


Figura 17.3

Considere un cuerpo rígido de masa m en movimiento plano. Recuerde de la sección 14.7 que, si la velocidad absoluta $\mathbf{v}_i$ de cada partícula P_i del cuerpo se expresa como la suma de la velocidad $\overline{\mathbf{v}}$ del centro de masa G del cuerpo y de la velocidad $\mathbf{v}'_i$ de la partícula relativa al sistema de referencia $Gx'y'$ fijo en G y de orientación fija (figura 17.3), la energía cinética del sistema de partículas que forman al cuerpo rígido puede escribirse en la forma

$$T = \tfrac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\,v_i'^2 \tag{17.7}$$

Pero la magnitud v'_i de la velocidad relativa de P_i es igual al producto $r'_i\omega$ de la distancia r'_i de P_i desde el eje que pasa por G perpendicular al plano de movimiento y de la magnitud ω de la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Al sustituir en (17.7), se tiene

$$T = \tfrac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i'^2\,\Delta m_i\right)\omega^2 \tag{17.8}$$

o, puesto que la suma representa el momento de inercia $\overline{I}$ del cuerpo alrededor del eje que pasa por G,

$$T = \tfrac{1}{2}m\overline{v}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{I}\omega^2 \tag{17.9}$$

Hay que observar que en el caso particular de un cuerpo en traslación ($\boldsymbol{\omega} = 0$), la expresión que se obtiene se reduce a $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$, en tanto que en el caso de una rotación centroidal ($\bar{v} = 0$), se reduce a $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$. Se concluye que la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano puede descomponerse en dos partes: 1) la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo, y 2) la energía cinética $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ asociada con la rotación del cuerpo alrededor de G.

Rotación no centroidal. La relación (17.9) es válida para cualquier tipo de movimiento plano y, en consecuencia, se usa para expresar la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje fijo que pasa por O (figura 17.4). Sin embargo, en ese caso la energía cinética del cuerpo puede expresarse de manera más directa al notar que la velocidad v_i de la partícula P_i es igual al producto $r_i\omega$ de la distancia r_i de P_i desde el eje fijo y la magnitud ω de la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Al sustituir en (17.2), se escribe

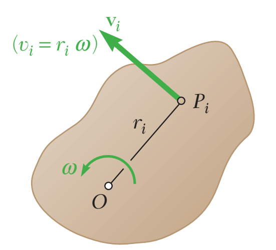


Figura 17.4

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\,\Delta m_i\right)\omega^2$$

o, ya que la última suma representa el momento de inercia I_O del cuerpo alrededor del eje fijo que pasa por O,

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \tag{17.10}$$

Observe que los resultados obtenidos no están limitados al movimiento de placas planas o al de cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia, y es posible aplicarlos al estudio del movimiento plano de cualquier cuerpo rígido, sin que importe su forma. Sin embargo, puesto que la ecuación (17.9) se aplica a cualquier movimiento plano mientras que la ecuación (17.10) sólo se aplica en casos que implican rotación no centroidal, la ecuación (17.9) se utilizará en la solución de todos los problemas resueltos.

17.5. SISTEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS

Cuando un problema implica varios cuerpos rígidos, cada cuerpo rígido puede considerarse por separado y el principio del trabajo y la energía aplicarse a cada cuerpo. Al sumar las energías cinéticas de todas las partículas y al considerar el trabajo de todas las fuerzas que participan, es posible escribir también la ecuación del trabajo y la energía para el sistema completo. Así, se tiene

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \tag{17.11}$$

donde T representa la suma aritmética de las energías cinéticas de los cuerpos rígidos que forman al sistema (todos los términos son positivos) y $U_{1\rightarrow 2}$ representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre los distintos cuerpos, ya sea que estas fuerzas sean *internas* o *externas* consideradas desde el punto de vista de un todo.

El método del trabajo y la energía es particularmente útil al resolver problemas que implican miembros conectados por medio de pasadores, bloques y poleas que se conectan mediante cuerdas inextensibles, y engranes dentados. En todos estos casos, las fuerzas internas se presentan por pares de fuerzas iguales y opuestas, y los puntos de aplicación de las fuerzas en cada par *se mueven distancias iguales* durante un pequeño desplazamiento del sistema. Como resultado, el trabajo de las fuerzas internas es cero, y $U_{1\rightarrow 2}$ se reduce al trabajo de las *fuerzas externas al sistema.*

17.6. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En la sección 13.6 se analizó que el trabajo de fuerzas conservativas, como el peso de un cuerpo o la fuerza que ejerce un resorte, pueden expresarse como el cambio en la energía potencial. Cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de las fuerzas conservativas, el principio del trabajo y la energía enunciado en la sección 17.2 se expresa en una forma modificada. Al sustituir $U_{1\rightarrow 2}$ de (13.19′) en (17.1), se escribe

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17.12}$$

La fórmula (17.12) indica que cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de la energía cinética y de la energía potencial del sistema permanece constante.* Hay que observar que en el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido, la energía cinética del cuerpo debe incluir tanto el término *traslacional* $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ y el término *rotacional* $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$.

Como ejemplo de la aplicación del principio de la conservación de la energía, se considerará una barra esbelta AB, de longitud l y masa m, cuyas extremidades se conectan a bloques de masa insignificante con deslizamiento a lo largo de sendas correderas horizontal y vertical. Se supone que la barra se suelta sin ninguna velocidad inicial desde la posición horizontal (figura 17.5*a*) y se desea determinar su velocidad angular después de que ha girado un ángulo θ (figura 17.5*b*).

Puesto que la velocidad inicial es cero, se tiene que $T_1 = 0$. Al medir la energía potencial desde el nivel de la corredera horizontal se escribe $V_1 = 0$. Después de que la barra ha girado el ángulo θ, el centro

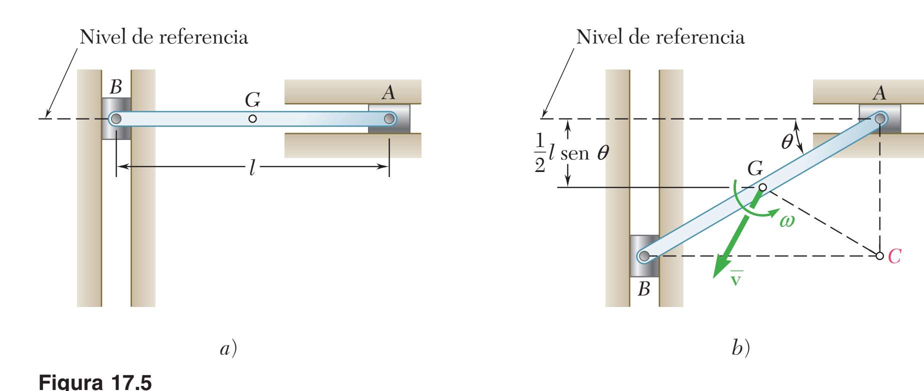


Figura 17.5

de gravedad G de la barra se encuentra a la distancia $\frac{1}{2}l$ sen θ por debajo del nivel de referencia y se tiene

$$V_2 = -\tfrac{1}{2}Wl \text{ sen } \theta = -\tfrac{1}{2}mgl \text{ sen } \theta$$

Al observar que en esta posición el centro instantáneo de la barra se ubica en C y que $CG = \frac{1}{2}l$, se escribe $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}l\omega$ y se obtiene

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}l\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{12}ml^2)\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2$$

Al aplicar el principio de conservación de la energía, se escribe

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 - \tfrac{1}{2}mgl \text{ sen } \theta$$
$$\omega = \left(\frac{3g}{l} \text{ sen } \theta\right)^{1/2}$$

Las ventajas del método del trabajo y la energía, así como sus desventajas, se indicaron en la sección 13.4. Aquí es preciso agregar que el método del trabajo y la energía debe complementarse con la aplicación del principio de d'Alembert cuando se van a determinar reacciones en ejes fijos, rodillos o bloques corredizos. Por ejemplo, para calcular las reacciones en los extremos A y B de la barra mostrada en la figura 17.5*b*, se debe trazar un diagrama para expresar que el sistema de fuerzas externas aplicado a la barra es equivalente al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la barra, sin embargo, se determina mediante el método del trabajo y la energía antes de resolver las ecuaciones de movimiento para las reacciones. El análisis completo del movimiento de la barra y de las fuerzas que se ejercen sobre ésta requiere, por lo tanto, del uso combinado del método del trabajo y la energía y del principio de equivalencia de las fuerzas externas y efectivas.

17.7. POTENCIA

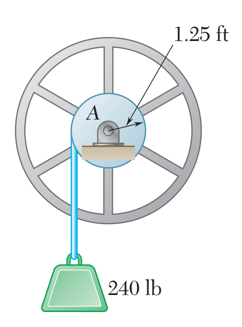
En la sección 13.5, la *potencia* fue definida como la rapidez con la cual se realiza el trabajo. En el caso de un cuerpo sobre el que actúa la fuerza **F**, y que se mueve a velocidad **v**, la potencia se expresó del modo siguiente:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (13.13)$$

Para el caso de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y se somete a la acción de un par de momento **M** paralelo al eje de rotación, se tiene, de acuerdo con la ecuación (17.4),

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{M\,d\theta}{dt} = M\omega \qquad (17.13)$$

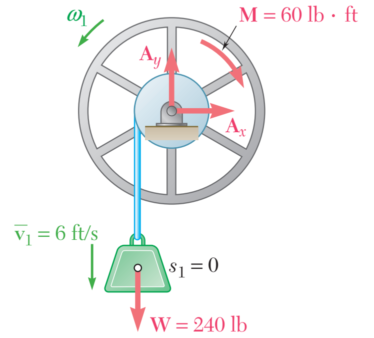
Las distintas unidades que se utilizan para medir la potencia, como el watt y el caballo de fuerza, se definieron en la sección 13.5.

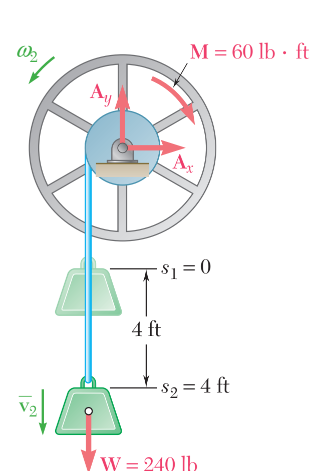


PROBLEMA RESUELTO 17.1

Un bloque de 240 lb se suspende de un cable inextensible que está enrollado alrededor de un tambor de 1.25 ft de radio unido rígidamente a un volante. El tambor y el volante tienen un momento de inercia centroidal combinado $\bar{I} = 10.5 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$. En el instante mostrado, la velocidad del bloque es de 6 ft/s dirigida hacia abajo. Si el cojinete en A está mal lubricado y la fricción en el mismo es equivalente a un par **M** de 60 lb · ft de magnitud, determine la velocidad del bloque después de que éste se ha movido 4 ft hacia abajo.

SOLUCIÓN





Se considera el sistema formado por el volante y el bloque. Puesto que el cable es inextensible, se cancela el trabajo realizado por las fuerzas internas ejercidas por el cable. Se muestran las posiciones inicial y final del sistema y las fuerzas externas que actúan sobre el mismo.

Energía cinética. ***Posición 1.***

Bloque: $\bar{v}_1 = 6 \text{ ft/s}$

Volante: $\omega_1 = \dfrac{\bar{v}_1}{r} = \dfrac{6 \text{ ft/s}}{1.25 \text{ ft}} = 4.80 \text{ rad/s}$

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{240 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(6 \text{ ft/s})^2 + \frac{1}{2}(10.5 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2)(4.80 \text{ rad/s})^2 \\
&= 255 \text{ ft} \cdot \text{lb}
\end{aligned}
$$

Posición 2. Al notar que $\omega_2 = \bar{v}_2/1.25$, se escribe

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{240}{32.2}(\bar{v}_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(10.5)\left(\frac{\bar{v}_2}{1.25}\right)^2 = 7.09\bar{v}_2^2
\end{aligned}
$$

Trabajo. Durante el movimiento, sólo el peso **W** del bloque y el par de fricción **M** efectúan trabajo. Al advertir que **W** realiza trabajo positivo y que la fuerza de fricción **M** lleva a cabo trabajo negativo, se escribe

$$
s_1 = 0 \qquad s_2 = 4 \text{ ft}
$$

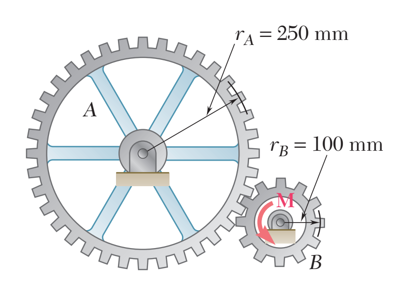
$$
\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \frac{s_2}{r} = \frac{4 \text{ ft}}{1.25 \text{ ft}} = 3.20 \text{ rad}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{1\rightarrow 2} &= W(s_2 - s_1) - M(\theta_2 - \theta_1) \\
&= (240 \text{ lb})(4 \text{ ft}) - (60 \text{ lb} \cdot \text{ft})(3.20 \text{ rad}) \\
&= 768 \text{ ft} \cdot \text{lb}
\end{aligned}
$$

Principio del trabajo y la energía

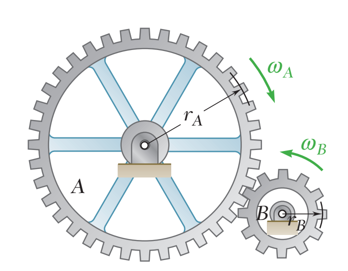
$$
\begin{aligned}
T_1 + U_{1\rightarrow 2} &= T_2 \\
255 \text{ ft} \cdot \text{lb} + 768 \text{ ft} \cdot \text{lb} &= 7.09\bar{v}_2^2 \\
\bar{v}_2 &= 12.01 \text{ ft/s}
\end{aligned}
$$

$\bar{\mathbf{v}}_2 = 12.01 \text{ ft/s} \downarrow$ ◀



PROBLEMA RESUELTO 17.2

El engrane A tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 200 mm; el engrane B tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 80 mm. El sistema está en reposo cuando un par **M** de 6 N · m de magnitud se aplica al engrane B. Si se ignora la fricción determine *a*) el número de revoluciones ejecutadas por el engrane B antes de que su velocidad angular llegue a 600 rpm, *b*) la fuerza tangencial que el engrane B ejerce sobre el engrane A.



SOLUCIÓN

Movimiento del sistema completo. Al observar que las velocidades periféricas de los engranes son iguales se escribe

$$r_A\omega_A = r_B\omega_B \qquad \omega_A = \omega_B\frac{r_B}{r_A} = \omega_B\frac{100 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 0.40\omega_B$$

Para $\omega_B = 600$ rpm se tiene

$$\omega_B = 62.8 \text{ rad/s} \qquad \omega_A = 0.40\omega_B = 25.1 \text{ rad/s}$$
$$\bar{I}_A = m_A\bar{k}_A^2 = (10 \text{ kg})(0.200 \text{ m})^2 = 0.400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$\bar{I}_B = m_B\bar{k}_B^2 = (3 \text{ kg})(0.080 \text{ m})^2 = 0.0192 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Energía cinética. Puesto que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, $T_1 = 0$. Al sumar las energías cinéticas de los dos engranes cuando $\omega_B = 600$ rpm, se obtiene

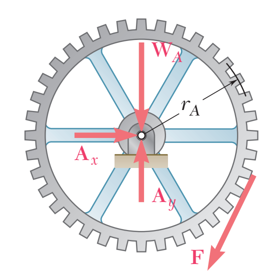
$$T_2 = \tfrac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_B\omega_B^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(25.1 \text{ rad/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0.0192 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(62.8 \text{ rad/s})^2$$
$$= 163.9 \text{ J}$$

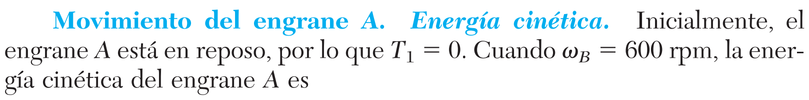
Trabajo. Al denotar por θ_B el desplazamiento angular del engrane B, se tiene

$$U_{1\rightarrow2} = M\theta_B = (6 \text{ N}\cdot\text{m})(\theta_B \text{ rad}) = (6\theta_B) \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1\rightarrow2} = T_2$$
$$0 + (6\theta_B) \text{ J} = 163.9 \text{ J}$$
$$\theta_B = 27.32 \text{ rad} \qquad \theta_B = 4.35 \text{ rev} \quad ◀$$





Movimiento del engrane A. ***Energía cinética.*** Inicialmente, el engrane A está en reposo, por lo que $T_1 = 0$. Cuando $\omega_B = 600$ rpm, la energía cinética del engrane A es

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2 = \tfrac{1}{2}(0.400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(25.1 \text{ rad/s})^2 = 126.0 \text{ J}$$

Trabajo. Se muestran las fuerzas que actúan sobre el engrane A. La fuerza tangencial **F** realiza un trabajo igual al producto de su magnitud y de la longitud $\theta_A r_A$, del arco descrito por el punto de contacto. En vista de que $\theta_A r_A = \theta_B r_B$, se tiene

$$U_{1\rightarrow2} = F(\theta_B r_B) = F(27.3 \text{ rad})(0.100 \text{ m}) = F(2.73 \text{ m})$$

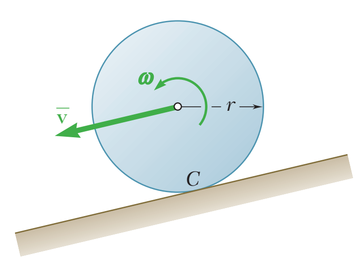
Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1\rightarrow2} = T_2$$
$$0 + F(2.73 \text{ m}) = 126.0 \text{ J}$$
$$F = +46.2 \text{ N} \qquad \mathbf{F} = 46.2 \text{ N} \swarrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 17.3

Una esfera, un cilindro y un aro, que tienen la misma masa y el mismo radio, se sueltan desde el reposo en una rampa. Determine la velocidad de cada cuerpo después de que éste rueda una distancia correspondiente a un cambio en la altura h.

SOLUCIÓN



El problema se resolverá primero en términos generales y después se encontrarán los resultados para cada cuerpo. Se denota la masa por m, el momento centroidal de inercia por $\bar{I}$, el peso por W y el radio por r.

Cinemática. Puesto que cada cuerpo rueda, el centro instantáneo de rotación se localiza en C y se escribe

$$\omega = \frac{\bar{v}}{r}$$

Energía cinética

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2$$

Trabajo. Puesto que la fuerza de fricción $\mathbf{F}$ en el movimiento de rodamiento no realiza trabajo,

$$U_{1\rightarrow 2} = Wh$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2$$

$$0 + Wh = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2 \qquad \bar{v}^2 = \frac{2Wh}{m + \bar{I}/r^2}$$

Al advertir que $W = mg$, se escribe de nuevo el resultado y se obtiene

$$\bar{v}^2 = \frac{2gh}{1 + \bar{I}/mr^2}$$

Velocidades de la esfera, el cilindro y el aro. Al introducir de manera sucesiva la expresión particular para $\bar{I}$, se obtiene

Esfera: $\bar{I} = \tfrac{2}{5}mr^2$ $\qquad \bar{v} = 0.845\sqrt{2gh}$ ◀

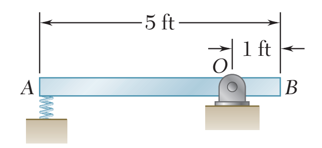
Cilindro: $\bar{I} = \tfrac{1}{2}mr^2$ $\qquad \bar{v} = 0.816\sqrt{2gh}$ ◀

Aro: $\bar{I} = mr^2$ $\qquad \bar{v} = 0.707\sqrt{2gh}$ ◀

Observación. Se comparan los resultados con la velocidad que alcanza un bloque que desliza sin fricción a lo largo de la misma distancia. La solución es idéntica a la anterior salvo que $\omega = 0$; se encuentra $\bar{v} = \sqrt{2gh}$.

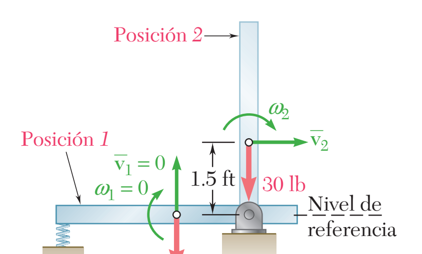
Al comparar los resultados, se observa que la velocidad del cuerpo es independiente tanto de su masa como del radio. Sin embargo, la velocidad depende del cociente $\bar{I}/mr^2 = \bar{k}^2/r^2$, que mide el cociente entre la energía cinética rotacional y la energía cinética traslacional. Así, el aro, el cual tiene la $\bar{k}$ más grande para un radio dado r, alcanza la velocidad más pequeña, en tanto que el bloque deslizante, que no gira, alcanza la mayor velocidad.

PROBLEMA RESUELTO 17.4



Una barra esbelta AB de 30 lb y 5 ft de longitud se articula alrededor de un punto O que se encuentra a 1 ft del extremo B. El otro extremo se presiona contra un resorte de constante $k = 1\,800$ lb/in. hasta que el resorte se comprime 1 in. La barra se encuentra en ese caso en una posición horizontal. Si se suelta desde esta posición, determine la velocidad angular y la reacción del pivote O cuando la barra pasa por una posición vertical.

SOLUCIÓN



Posición 1. *Energía potencial.* Puesto que el resorte se comprime 1 in., se tiene $x_1 = 1$ in.

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}(1\,800 \text{ lb/in.})(1 \text{ in.})^2 = 900 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

Al elegir el nivel de referencia como se muestra, se tiene que $V_g = 0$; por lo tanto,

$$V_1 = V_e + V_g = 900 \text{ in.} \cdot \text{lb} = 75 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Puesto que la velocidad en la posición *1* es cero, se tiene $T_1 = 0$.

Posición 2. *Energía potencial.* La elongación del resorte es cero y se tiene $V_e = 0$. Puesto que el centro de gravedad de la barra se encuentra ahora a 1.5 ft sobre el nivel de referencia,

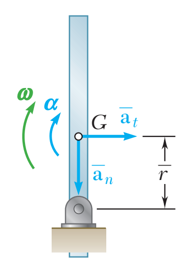
$$V_g = (30 \text{ lb})(+1.5 \text{ ft}) = 45 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$
$$V_2 = V_e + V_g = 45 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Si se denota por $\boldsymbol{\omega}_2$ la velocidad angular de la barra en la posición *2*, se advierte que ésta gira alrededor de O y se escribe $\bar{v}_2 = \bar{r}\omega_2 = 1.5\omega_2$.

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}\frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(5 \text{ ft})^2 = 1.941 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{30}{32.2}(1.5\omega_2)^2 + \tfrac{1}{2}(1.941)\omega_2^2 = 2.019\omega_2^2$$

Conservación de la energía



$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 75 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 2.019\omega_2^2 + 45 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

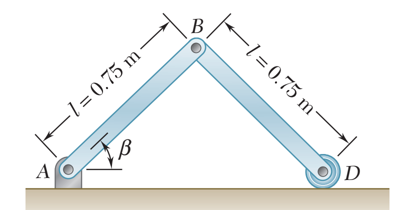
$$\boldsymbol{\omega}_2 = 3.86 \text{ rad/s} \circlearrowright \quad \blacktriangleleft$$

Reacción en la posición 2. Puesto que $\omega_2 = 3.86$ rad/s, las componentes de la aceleración de G cuando la barra pasa por la posición *2* son

$$\bar{a}_n = \bar{r}\omega_2^2 = (1.5 \text{ ft})(3.86 \text{ rad/s})^2 = 22.3 \text{ ft/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}}_n = 22.3 \text{ ft/s}^2 \downarrow$$
$$a_t = \bar{r}\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_t = \bar{r}\alpha \rightarrow$$

Se expresa que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas representado por el vector de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_t$ y $m\bar{\mathbf{a}}_n$ con su origen en G y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

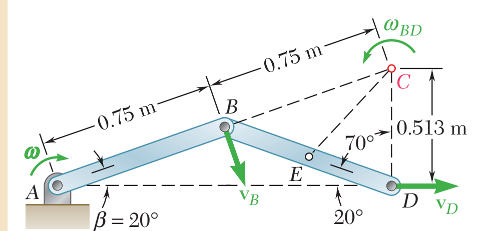
$$+\circlearrowright\Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{ef}}: \qquad 0 = \bar{I}\alpha + m(\bar{r}\alpha)\bar{r} \qquad \alpha = 0$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \qquad R_x = m(\bar{r}\alpha) \qquad R_x = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \qquad R_y - 30 \text{ lb} = -m\bar{a}_n$$
$$R_y - 30 \text{ lb} = -\frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(22.3 \text{ ft/s}^2)$$
$$R_y = +9.22 \text{ lb} \qquad \mathbf{R} = 9.22 \text{ lb} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 17.5

Cada una de las dos barras delgadas que se muestran tiene una longitud de 0.75 m y una masa de 6 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo con $\beta = 60°$, determine *a*) la velocidad angular de la barra *AB* cuando $\beta = 20°$ *b*) la velocidad del punto *D* en el mismo instante.

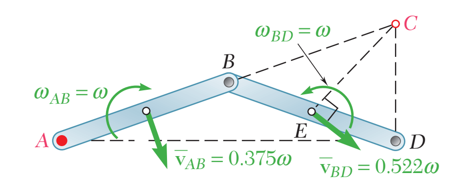
SOLUCIÓN



Cinemática de movimiento cuando $\beta = 20°$. Puesto que $\mathbf{v}_B$ es perpendicular a la barra *AB* y $\mathbf{v}_D$ es horizontal, el centro instantáneo de rotación de la barra *BD* se localiza en *C*. Al considerar la geometría de la figura, se obtiene

$$BC = 0.75 \text{ m} \qquad CD = 2(0.75 \text{ m}) \text{ sen } 20° = 0.513 \text{ m}$$

Al aplicar la ley de los cosenos al triángulo *CDE,* donde *E* se localiza en el centro de masa de la barra *BD,* se encuentra $EC = 0.522$ m. Al denotar mediante ω la velocidad angular de la barra *AB,* se tiene

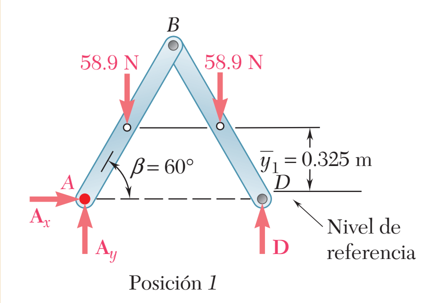


$$\bar{v}_{AB} = (0.375 \text{ m})\omega \qquad \bar{\mathbf{v}}_{AB} = 0.375\omega \searrow$$
$$v_B = (0.75 \text{ m})\omega \qquad \bar{\mathbf{v}}_B = 0.75\omega \searrow$$

Puesto que la barra *BD* parece girar alrededor del punto *C*, se escribe

$$v_B = (BC)\omega_{BD} \qquad (0.75 \text{ m})\omega = (0.75 \text{ m})\omega_{BD} \qquad \boldsymbol{\omega}_{BD} = \omega \circlearrowleft$$
$$\bar{v}_{BD} = (EC)\omega_{BD} = (0.522 \text{ m})\omega \qquad \bar{\mathbf{v}}_{BD} = 0.522\omega \searrow$$

Posición 1. *Energía potencial.* Al elegir el nivel de referencia como se indica, y observar que $W = (6 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 58.86$ N, se tiene

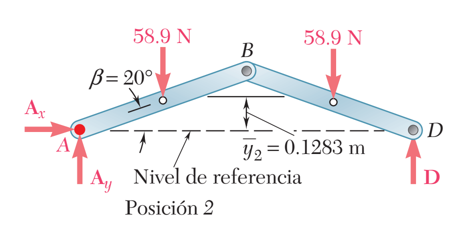


$$V_1 = 2W\bar{y}_1 = 2(58.86 \text{ N})(0.325 \text{ m}) = 38.26 \text{ J}$$

Energía cinética. Puesto que el sistema está en reposo, $T_1 = 0$.

Posición 2. *Energía potencial*

$$V_2 = 2W\bar{y}_2 = 2(58.86 \text{ N})(0.1283 \text{ m}) = 15.10 \text{ J}$$



Energía cinética

$$I_{AB} = \bar{I}_{BD} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \tfrac{1}{12}(6 \text{ kg})(0.75 \text{ m})^2 = 0.281 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_{AB}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_{AB}\omega_{AB}^2 + \tfrac{1}{2}m\bar{v}_{BD}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_{BD}\omega_{BD}^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(6)(0.375\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(0.281)\omega^2 + \tfrac{1}{2}(6)(0.522\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(0.281)\omega^2$$
$$= 1.520\omega^2$$

Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 38.26 \text{ J} = 1.520\omega^2 + 15.10 \text{ J}$$
$$\omega = 3.90 \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\omega}_{AB} = 3.90 \text{ rad/s} \circlearrowright \blacktriangleleft$$

Velocidad del punto *D*

$$v_D = (CD)\omega = (0.513 \text{ m})(3.90 \text{ rad/s}) = 2.00 \text{ m/s}$$
$$\mathbf{v}_D = 2.00 \text{ m/s} \rightarrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentaron los métodos de la energía para determinar la velocidad de cuerpos rígidos en varias posiciones durante su movimiento. Como se vio en el capítulo 13, los métodos de la energía deben considerarse en problemas que implican desplazamientos y velocidades.

1. *El método del trabajo y la energía,* cuando se aplica a todas las partículas que constituyen un cuerpo rígido, produce la ecuación

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (17.1)$$

donde T_1 y T_2 son, respectivamente, los valores inicial y final de la energía cinética total de las partículas que forman el cuerpo y $U_{1\rightarrow 2}$ es el *trabajo realizado por las fuerzas externas* ejercido sobre el cuerpo rígido.

a) Trabajo de fuerzas y pares. A la expresión para el trabajo de una fuerza (capítulo 13) se agregó la expresión para el trabajo de un par y se escribió

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad U_{1\rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \qquad (17.3, 17.5)$$

Cuando el momento de un par es constante, el trabajo del par es

$$U_{1\rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \qquad (17.6)$$

donde θ_1 y θ_2 se expresan en radianes [problemas resueltos 17.1 y 17.2].

b) La energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano se determinó al considerar el movimiento del cuerpo como la suma de una traslación con su centro de masa y una rotación alrededor del centro de masa.

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \qquad (17.9)$$

donde $\bar{v}$ es la velocidad del centro de masa y ω es la velocidad angular del cuerpo [problemas resueltos 17.3 y 17.4].

2. *Para un sistema de cuerpos rígidos* otra vez se utilizó la ecuación

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (17.1)$$

donde T es la suma de las energías cinéticas de los cuerpos que forman el sistema y U es el trabajo que realizan *todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos,* internas y externas. Los cálculos se simplificarán si se tiene en cuenta lo siguiente:

a) Las fuerzas ejercidas entre sí por miembros conectados con pasador o por engranes dentados son iguales y opuestas y, como tienen el mismo punto de aplicación, experimentan desplazamientos pequeños e iguales. Por lo tanto, su *trabajo total es cero* y es posible omitirlo de los cálculos [problema resuelto 17.2].

(*continúa*)

b) Las fuerzas ejercidas por una cuerda inextensible sobre los dos cuerpos que conecta tiene la misma magnitud y sus puntos de aplicación se mueven en distancias iguales, aunque el trabajo de una fuerza es positivo y el de la otra es negativo. Por lo tanto, *su trabajo total es cero* y también es posible omitirlo de nuevo en los cálculos [problema resuelto 17.1].

c) Las fuerzas ejercidas por un resorte sobre los dos cuerpos que conectan también tienen la misma magnitud, aunque sus puntos de aplicación por lo general se moverán diferentes distancias. Por lo tanto, *su trabajo total no suele ser de cero* y debe tomarse en cuenta en los cálculos.

3. El principio de la conservación de la energía puede expresarse como

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (17.12)$$

donde V representa la energía potencial del sistema. Es posible utilizar este principio cuando sobre un cuerpo o sistema de cuerpos actúan fuerzas conservativas, tales como la que ejerce un resorte o la fuerza de la gravedad [problemas resueltos 17.4 y 17.5].

4. La última sección de esta lección se dedicó a la potencia, que es la rapidez a la cual se realiza el trabajo. Para un cuerpo sobre el que actúa un par de momento **M** es posible expresar la potencia como

$$\text{Potencia} = M\omega \qquad (17.13)$$

donde ω es la velocidad angular del cuerpo expresada en rad/s. Como se hizo en el capítulo 13, debe expresar la potencia ya sea en watts o en caballos de fuerza (1 hp = 550 ft · lb/s).

Problemas

17.1 Se requieren 1 500 revoluciones para que un volante de 6 000 lb gire hasta detenerse a partir de una velocidad angular de 300 rpm. Si el radio de giro del volante es de 36 in., determine la magnitud promedio del par debido a la fricción cinética en los cojinetes.

17.2 El rotor de un motor eléctrico tiene una velocidad angular de 3 600 rpm cuando se interrumpen la carga y la energía eléctrica. El rotor de 50 kg, que tiene un radio de giro centroidal de 180 mm, gira hasta detenerse. Si la fricción cinética del rotor produce un par de magnitud igual a 3.5 N · m, determine el número de revoluciones que ejecuta el rotor antes de quedar en reposo.

17.3 Dos discos uniformes del mismo material se unen a una flecha en la forma indicada. El disco *A* tiene un radio *r* y un grosor *b*, mientras que el disco *B* tiene un radio *nr* y un grosor 3*b*. Se aplica un par **M** de magnitud constante cuando el sistema está en reposo y se retira después de que el sistema ha realizado 2 revoluciones. Determine el valor de *n* que produce la máxima velocidad final para un punto sobre el borde del disco *B*.

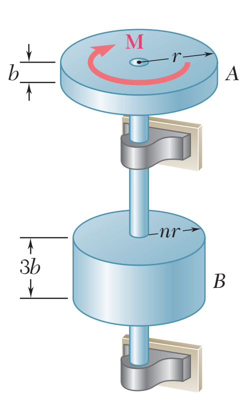


Figura P17.3 y P17.4

17.4 Dos discos uniformes del mismo material se fijan a una flecha en la forma indicada. El disco *A* tiene una masa de 15 kg y un radio $r = 125$ mm. El disco *B* es tres veces más grueso que el disco *A*. Si se aplica un par **M** de 20 N · m de magnitud al disco *A* cuando el sistema está en reposo, determine el radio *nr* del disco *B* si la velocidad angular del sistema debe ser de 600 rpm después de 4 revoluciones.

17.5 El volante de una máquina perforadora tiene una masa de 300 kg y un radio de giro de 600 mm. Cada operación de perforación requiere 2 500 j de trabajo. *a*) Si la velocidad del volante es de 300 rpm justo antes de una perforación, determine la velocidad inmediatamente después de la perforación. *b*) Si se aplica un par constante de 25 N · m al eje del volante, determine el número de revoluciones ejecutadas antes de que la velocidad sea otra vez de 300 rpm.

17.6 El volante de una pequeña máquina de perforación gira a 360 rpm. Cada operación de perforación requiere 1 500 lb · ft de trabajo y se desea que la velocidad del volante después de cada perforación no sea menor de 95 por ciento que la velocidad original. *a*) Determine el momento de inercia requerido del volante. *b*) Si se aplica un par constante de 18 lb · ft a la flecha del volante, determine el número de revoluciones que debe ocurrir entre dos perforaciones sucesivas, si se sabe que la velocidad inicial debe ser de 360 rpm al inicio de cada perforación.

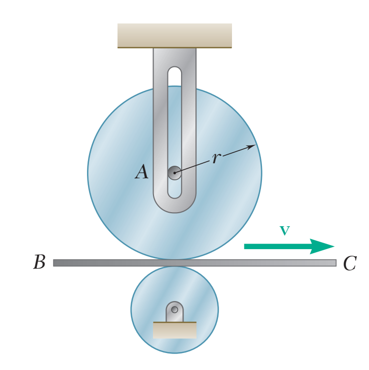


Figura *P17.7* y P17.8

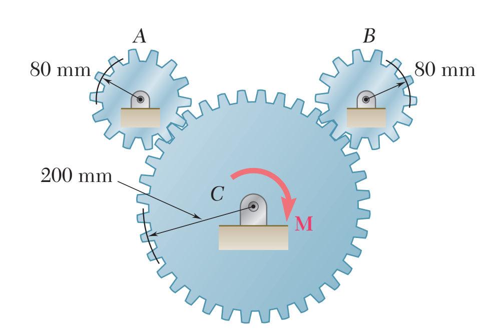


Figura P17.9

17.7 El disco A tiene un grosor constante y se encuentra en reposo cuando está en contacto con la banda BC, la cual se mueve con una velocidad constante $\mathbf{v}$. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda, obtenga una expresión para el número de revoluciones ejecutadas por el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante.

17.8 El disco A con peso de 10 lb y radio $r = 6$ in., se encuentra en reposo cuando está en contacto con la banda BC, la cual se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $v = 40$ ft/s. Si $\mu_k = 0.20$ entre el disco y la banda, determine el número de revoluciones ejecutadas por el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante.

17.9 Cada uno de los engranes A y B tiene una masa de 2.4 kg y un radio de giro de 60 mm, mientras que el engrane C tiene una masa de 12 kg y un radio de giro de 150 mm. Se aplica un par $\mathbf{M}$ con magnitud constante de 10 N · m al engrane C. Determine *a*) el número de revoluciones del engrane C que se requieren para que su velocidad angular aumente de 100 a 450 rpm, *b*) la correspondiente fuerza tangencial que actúa sobre el engrane A.

17.10 Retome el problema 17.9, y ahora suponga que se aplica un par de 10 N · m al engrane B.

17.11 La doble polea que se muestra tiene un peso de 30 lb y un radio de giro centroidal de 6.5 in. El cilindro A y el bloque B están unidos a cuerdas que se enrollan sobre las poleas en la forma que se indica. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque B y la superficie es 0.25. Si se sabe que el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine *a*) la velocidad del cilindro A cuando éste golpea el suelo, *b*) la distancia total que se mueve el bloque B antes de quedar en reposo.

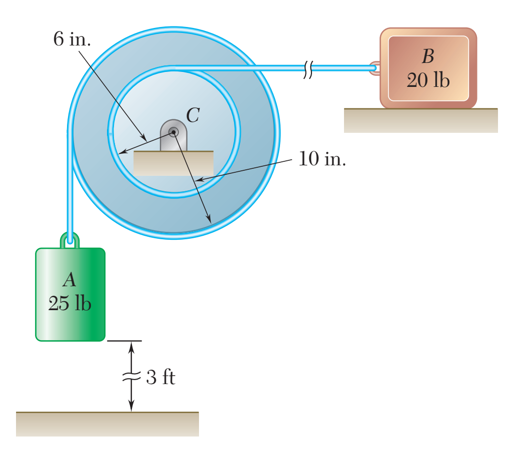


Figura P17.11

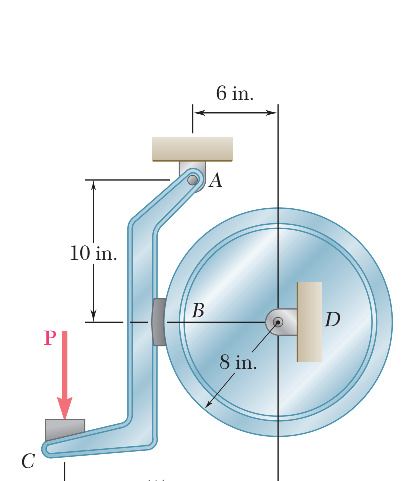


Figura P17.12

17.12 El tambor de freno de 8 in. de radio se fija a un volante más grande que no está mostrado en la figura. El momento de inercia de la masa total del volante y el tambor es igual a 14 lb · ft · s^2 y el coeficiente de fricción cinética entre el tambor y la zapata del freno es de 0.35. Si la velocidad angular inicial del volante es de 360 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la fuerza vertical $\mathbf{P}$ que debe aplicarse al pedal C si el sistema debe detenerse en 100 revoluciones.

17.13 Retome el problema 17.12, y ahora suponga que la velocidad angular inicial del volante es de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

17.14 El tren de engranes mostrado consta de cuatro engranes con el mismo grosor y del mismo material; dos engranes son de radio r, y los otros dos son de radio nr. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica el par $\mathbf{M}_0$ a la flecha C. Si se denota con I_0 el momento de inercia de un engrane de radio r, determine la velocidad angular de la flecha A si el par $\mathbf{M}_0$ se aplica durante una revolución de la flecha C.

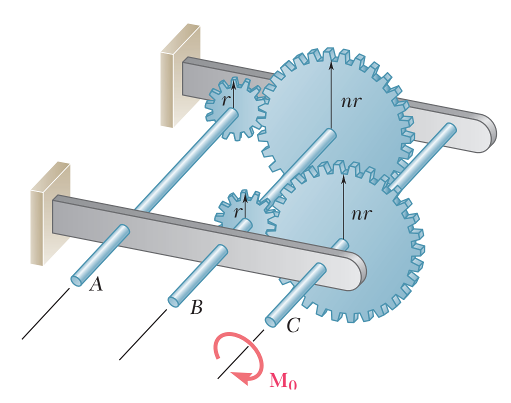


Figura *P17.14*

17.15 Los tres discos de fricción que se muestran en la figura están hechos del mismo material y tienen el mismo grosor. Se sabe que el disco A pesa 12 lb y que los radios de los discos son r_A = 8 in., r_B = 6 in. y r_C = 4 in. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica un par $\mathbf{M}_0$ con magnitud constante de 60 lb · in. al disco A. Si se supone que no ocurre deslizamiento entre los discos, determine el número de revoluciones requerido para que el disco A alcance una velocidad angular de 150 rpm.

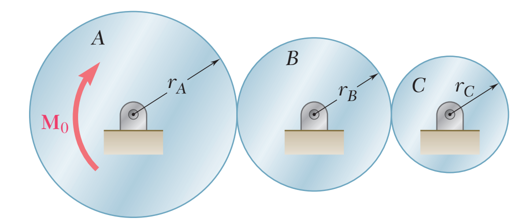


Figura *P17.15*

17.16 y 17.17 Una barra esbelta de 4 kg puede girar en un plano vertical en torno a un pivote en B. Se fija un resorte de constante k = 400 N/m y una longitud no deformada de 150 mm a la barra en la forma indicada. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición que se muestra, determine su velocidad angular después de que haya girado 90°.

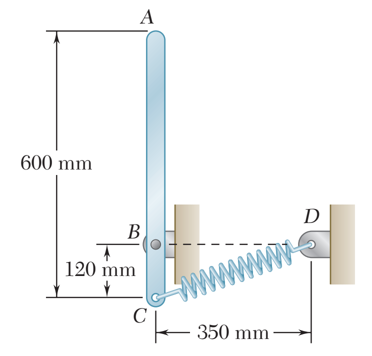


Figura P17.16

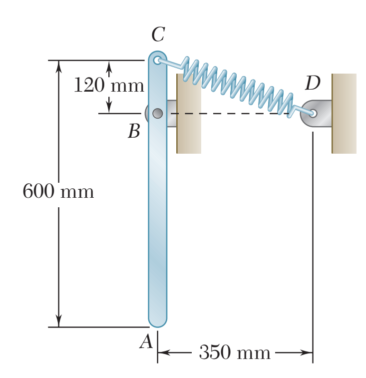


Figura P17.17

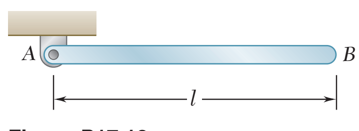


Figura P17.18

17.18 Una barra delgada de longitud l y peso W se articula en uno de sus extremos como se muestra en la figura. Se suelta desde el reposo en una posición horizontal y oscila libremente. *a*) Determine la velocidad angular de la barra cuando pasa por una posición vertical y determine la reacción correspondiente en el pivote. *b*) Resuelva el inciso *a*) para $W = 1.8$ lb y $l = 3$ ft.

17.19 Una barra delgada de longitud l se articula alrededor del punto C ubicado a una distancia b de su centro G. Se suelta desde el reposo en una posición horizontal y oscila libremente. Determine *a*) la distancia b para la cual la velocidad angular de la barra, cuando ésta pasa por una posición vertical, es máxima, *b*) los valores correspondientes de su velocidad angular y de la reacción en C.

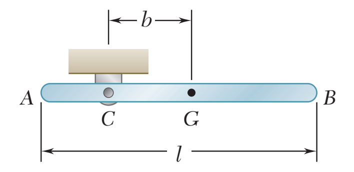


Figura *P17.19*

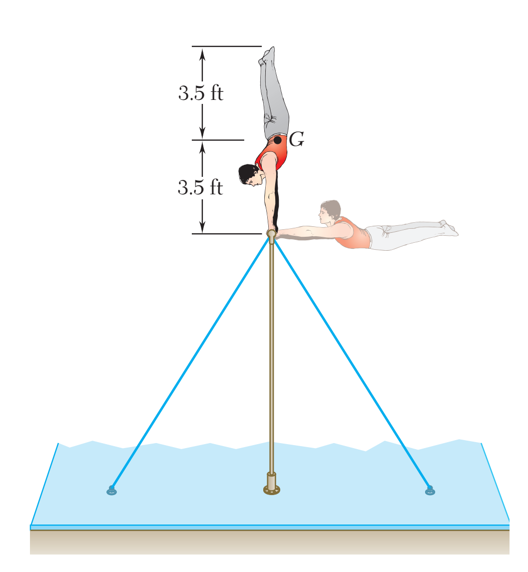


Figura P17.20

17.20 Un gimnasta de 160 lb ejecuta una serie de oscilaciones completas sobre la barra horizontal. En la posición que se muestra, el atleta tiene una velocidad angular muy pequeña, y despreciable, en el sentido de las manecillas del reloj y mantendrá su cuerpo recto y rígido al oscilar hacia abajo. Si se supone que durante la oscilación el radio de giro centroidal de su cuerpo es de 1.5 ft, determine su velocidad angular y la fuerza ejercida sobre sus manos después de que ha girado *a*) 90°, *b*) 180°.

17.21 Dos barras ligeras idénticas AB y BC se sueldan entre sí para formar un mecanismo en forma de L, el cual se presiona contra un resorte en D y se suelta desde la posición indicada. Si se sabe que el ángulo máximo de rotación del mecanismo en su movimiento subsecuente es de 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la magnitud de la velocidad angular del mecanismo cuando pasa por la posición en la que la barra AB forma un ángulo de 30° con la horizontal.

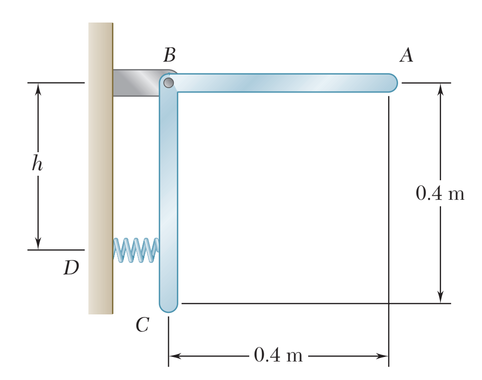


Figura *P17.21*

17.22 Un collarín con una masa de 1 kg está unido rígidamente a una distancia $d = 300$ mm del extremo de una barra delgada uniforme AB. La barra tiene una masa de 3 kg y una longitud $L = 600$ mm. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la velocidad angular de la barra después de que haya girado 90°.

17.23 Un collarín con una masa de 1 kg está unido rígidamente a una barra delgada y uniforme, AB, con una masa de 3 kg y una longitud $L = 600$ mm. La barra se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Determine la distancia d para la que cual la velocidad angular de la barra es máxima después de que haya girado 90°.

17.24 Un rodillo cilíndrico uniforme de 20 kg, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza de 90 N en la forma que se indica. Si el cuerpo rueda sin deslizarse, determine *a*) la velocidad de su centro G después de que se ha movido 1.5 m, *b*) la fuerza de fricción que se requiere para evitar el deslizamiento.

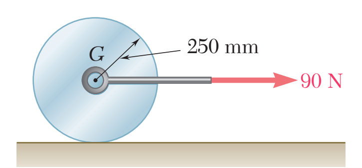


Figura *P17.22* y *P17.23*

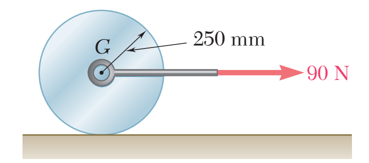


Figura P17.24

17.25 Una cuerda se enrolla alrededor de un cilindro de radio r y masa m en la forma indicada. Si el cilindro se suelta desde el reposo determine la velocidad del centro del mismo después de que ha descendido una distancia s.

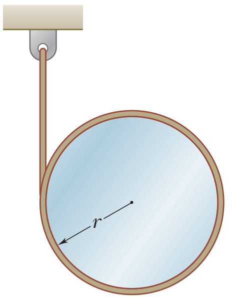


Figura P17.25

17.26 Retome el problema 17.25, y ahora suponga que el cilindro se reemplaza por un tubo de pared delgada con radio r y masa m.

17.27 El centro de masa G de una rueda de 3 kg con radio R = 180 mm se ubica a una distancia r = 60 mm desde su centro geométrico C. El radio de giro centroidal de la rueda es $\bar{k}$ = 90 mm. Mientras la rueda gira sin deslizarse, se observa que su velocidad angular varía. Si $\boldsymbol{\omega}$ = 8 rad/s en la posición mostrada, determine *a*) la velocidad angular de la rueda cuando el centro de masa G está directamente arriba del centro geométrico C, *b*) la reacción en la superficie horizontal en el mismo instante.

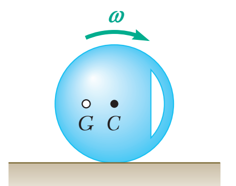


Figura *P17.27*

17.28 Un collarín B, de masa m y dimensiones insignificantes, está fijo al borde de un aro de la misma masa m y de radio r que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. Determine la velocidad angular ω_1 del aro en términos de g y r cuando B está directamente arriba del centro A, considerando que la velocidad angular es $3\omega_1$ cuando B está directamente debajo de A.

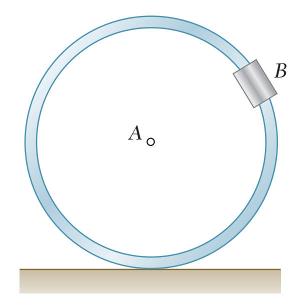


Figura P17.28

17.29 La mitad de una sección de tubo con masa m y radio r se suelta desde el reposo en la posición indicada. Si el medio tubo rueda sin deslizarse, determine *a*) su velocidad angular después de que ha girado 90°, *b*) la reacción en la superficie horizontal en el mismo instante. [*Sugerencia*: Note que $GO = 2r/\pi$ y que, mediante el teorema de ejes paralelos, $\bar{I} = mr^2 - m(GO)^2$.]

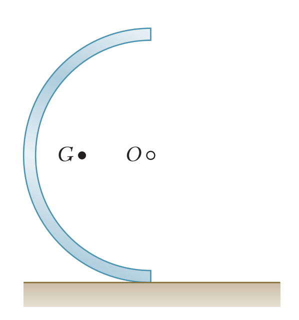
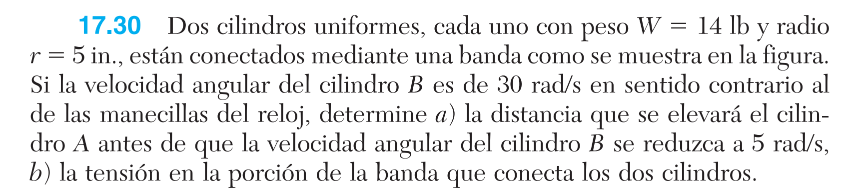


Figura P17.29


17.30 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso W = 14 lb y radio r = 5 in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si la velocidad angular del cilindro B es de 30 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) la distancia que se elevará el cilindro A antes de que la velocidad angular del cilindro B se reduzca a 5 rad/s, *b*) la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

17.31 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso W = 14 lb y radio r = 5 in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine *a*) la velocidad del centro del cilindro A después de que se haya desplazado 3 ft, *b*) la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

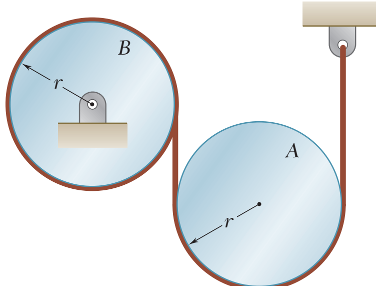


Figura P17.30 y *P17.31*

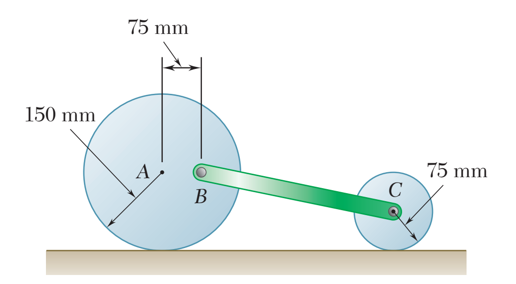


Figura *P17.32*

17.32 La barra *BC* de 5 kg está unida mediante pasadores a dos discos uniformes como se muestra en la figura. El disco con radio de 150 mm tiene una masa de 6 kg y el disco con radio de 75 mm tiene una masa de 1.5 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la velocidad de la barra después de que el disco haya girado 90°.

17.33 a 17.35 La plataforma de 9 kg está soportada, como se muestra, por dos discos uniformes que ruedan sin deslizarse en todas las superficies de contacto. La masa de cada disco es de $m = 6$ kg y el radio $r = 80$ mm. Si se sabe que el sistema está inicialmente en reposo, determine la velocidad de la plataforma después de que ésta se haya desplazado 250 mm.

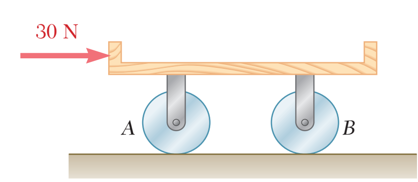


Figura P17.33

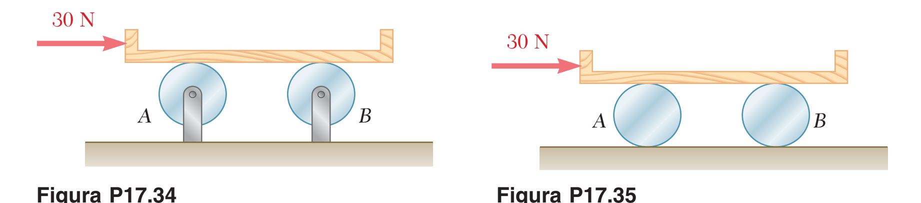


Figura P17.34 Figura P17.35

17.36 El movimiento de la barra ligera *AB* de 10 kg se guía mediante collarines de masa despreciable, los cuales se deslizan libremente sobre las barras horizontal y vertical. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30°$, determine la velocidad de los collarines *A* y *B* cuando $\theta = 60°$.

17.37 El movimiento de la barra ligera *AB* de 10 kg se guía mediante collarines de masa despreciable, los cuales se deslizan libremente sobre las barras horizontal y vertical. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 20°$, determine la velocidad de los collarines *A* y *B* cuando $\theta = 90°$.

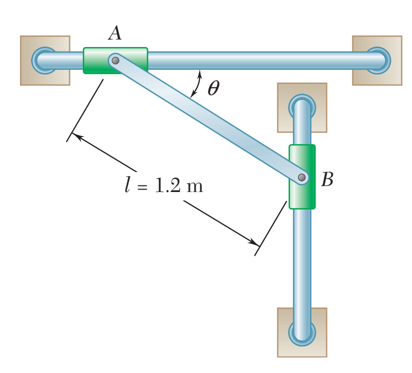


Figura P17.36 y P17.37

17.38 Los extremos de una barra *AB* de 9 lb están restringidos a moverse a lo largo de ranuras cortadas en una placa vertical en la forma que se indica. Un resorte de constante $k = 3$ lb/in. se fija al extremo *A* de manera tal que su tensión es cero cuando $\theta = 0$. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo *B* cuando $\theta = 30°$.

17.39 Los extremos de una barra *AB* de 9 lb están restringidos a moverse a lo largo de ranuras cortadas en una placa vertical en la forma que se indica. Un resorte de constante k = 3 lb/in. se fija al extremo *A* de manera tal que su tensión es cero cuando $\theta = 0$. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 50°$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo *B* cuando $\theta = 0$.

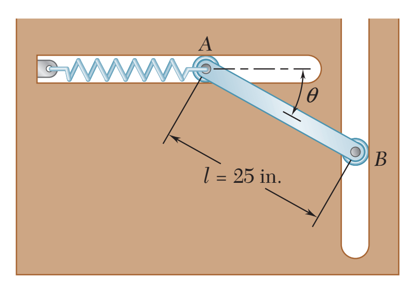


Figura *P17.38* y P17.39

17.40 El movimiento de la barra uniforme *AB* se guía mediante ruedas pequeñas de masa despreciable que ruedan sobre la superficie que se muestra en la figura. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, determine las velocidades de *A* y *B* cuando $\theta = 30°$.

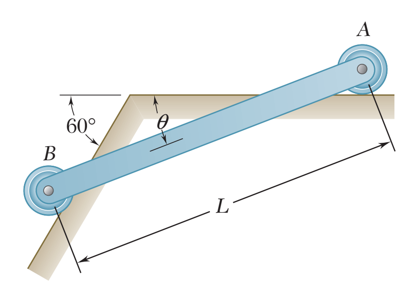


Figura P17.40

17.41 El movimiento de una barra delgada de longitud R se guía mediante pasadores en A y B, los cuales se deslizan libremente en ranuras cortadas en una placa vertical, como se muestra en la figura. Si el extremo B se mueve un poco a la izquierda y después se suelta, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de masa *a*) en el instante que la velocidad del extremo B es cero, *b*) cuando el extremo B pasa por el punto D.

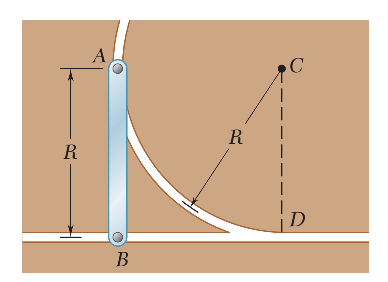


Figura *P17.41*

17.42 Dos barras uniformes, cada una de masa m y longitud L, se conectan para formar el mecanismo mostrado. El extremo D de la barra BD puede deslizarse con libertad en la ranura horizontal, mientras que el extremo A de la barra AB se sostiene mediante un pasador y una ménsula. Si el extremo D se mueve ligeramente hacia la izquierda y luego se suelta, determine su velocidad *a*) cuando está directamente abajo de A, *b*) cuando la barra AB está en posición vertical.

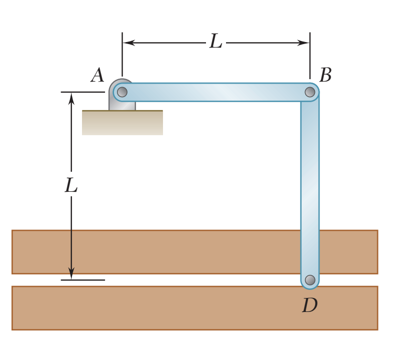


Figura P17.42

17.43 Los pesos respectivos de las barras uniformes AB y BC son 2.4 lb y 4 lb, y la pequeña rueda C tiene un peso insignificante. Si la rueda se mueve ligeramente hacia la derecha y luego se suelta, determine la velocidad del pasador B después de que la barra AB haya girado 90°.

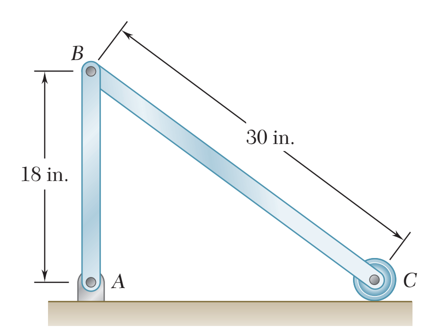


Figura *P17.43* y P17.44

17.44 Los pesos respectivos de las barras uniformes AB y BC son 2.4 lb y 4 lb, y la pequeña rueda C tiene un peso insignificante. Si en la posición que se muestra la velocidad de la rueda C es de 6 ft/s hacia la derecha, determine la velocidad del pasador B después de que la barra AB haya girado 90°.

17.45 La barra AB de 4 kg se fija a un collarín de masa despreciable en A y a un volante en B. El volante tiene un peso de 16 kg y un radio de giro de 180 mm. Si en la posición mostrada la velocidad angular del volante es de 60 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del volante cuando el punto B está directamente abajo de C.

17.46 Si en el problema 17.45 la velocidad angular del volante debe ser la misma en la posición mostrada y cuando el punto B está directamente arriba de C, determine el valor requerido de su velocidad angular en la posición que se indica.

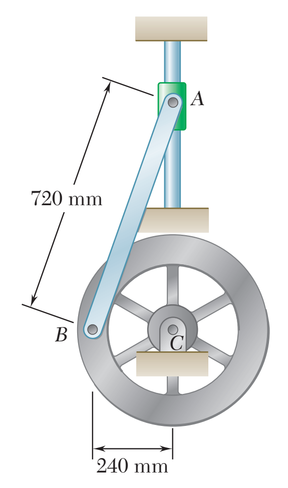


Figura P17.45 y P17.46

17.47 El engrane de 80 mm de radio tiene una masa de 5 kg y un radio de giro centroidal de 60 mm. La barra *AB* de 4 kg está unida al centro del engrane y a un pasador en *B* que se desliza libremente en una ranura vertical. Si el sistema mostrado se suelta desde el reposo cuando $\theta = 60°$, determine la velocidad del centro del engrane cuando $\theta = 20°$.

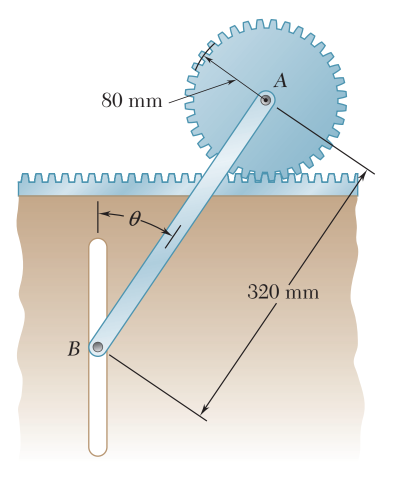


Figura P17.47

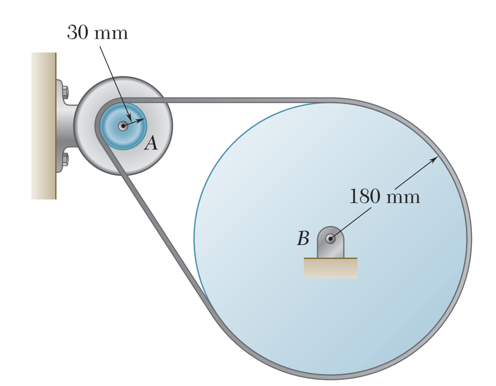


Figura P17.48

17.48 El motor mostrado gira a una frecuencia de 22.5 Hz y opera una máquina unida a la flecha en *B*. Si el motor desarrolla 3 kW, determine la magnitud del par ejercido *a*) por el motor sobre la flecha *A*, *b*) por la flecha sobre la polea *B*.

17.49 Si el máximo par permisible que puede aplicarse a la flecha es de 15.5 kips · in., determine la potencia máxima que puede transmitir la flecha a *a*) 180 rpm, *b*) 480 rpm.

17.50 Tres flechas y cuatro engranes se usan para formar un tren de engranes que transmitirá 7.5 kW del motor *A* a una máquina herramienta ubicada en *F*. (Los cojinetes para las flechas se omiten del bosquejo.) Si la frecuencia del motor es de 30 Hz, determine la magnitud del par que se aplica al eje *a*) *AB*, *b*) *CD*, *c*) *EF*.

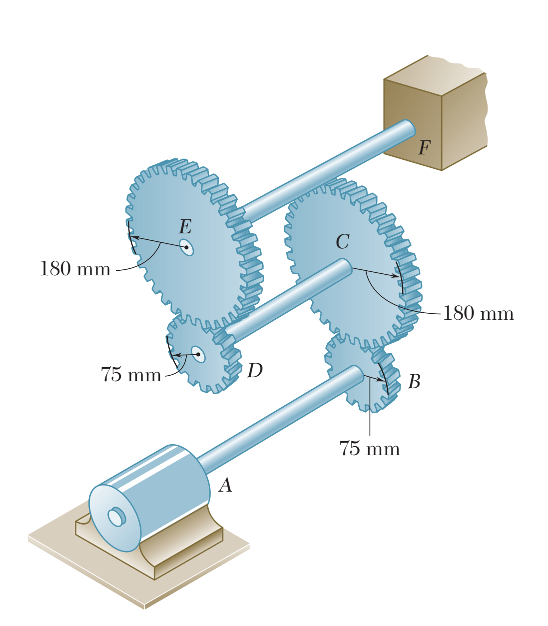


Figura P17.50

17.51 El arreglo de flecha, disco y banda que se muestra se utiliza para transmitir 2.4 kW desde el punto *A* hasta el punto *D*. Si se sabe que los máximos pares permisibles que es posible aplicar a los ejes *AB* y *CD* son, respectivamente, 25 N · m y 80 N · m, determine la velocidad mínima requerida de la flecha *AB*.

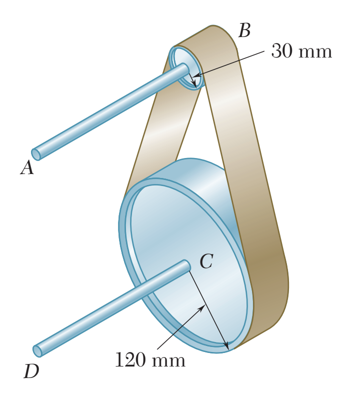


Figura *P17.51*

17.8. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA EL MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO

El principio del impulso en la cantidad de movimiento se aplicará ahora al análisis del movimiento plano de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos. Como se apuntó en el capítulo 13, el método del impulso y la cantidad de movimiento se adapta particularmente bien a la solución de problemas que incluyen el tiempo y las velocidades. Además, el principio del impulso y la cantidad de movimiento proporciona el único método práctico para la solución de problemas en los que intervienen el movimiento o impacto impulsivo (secciones 17.11 y 17.12).

Considerando de nuevo un cuerpo rígido conformado por un gran número de partículas P_i, hay que recordar de la sección 14.9 que el sistema formado por las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_1 y el sistema de los impulsos de las fuerzas externas aplicadas desde t_1 hasta t_2 son en conjunto equipolentes al sistema formado por las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_2. Puesto que los vectores asociados con un cuerpo rígido pueden considerarse como vectores deslizantes, se concluye (sección 3.19) que el sistema

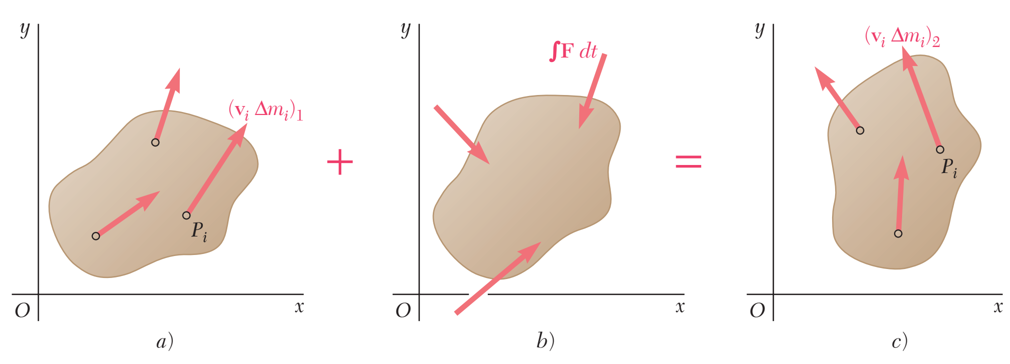


Figura 17.6

de vectores que se muestra en la figura 17.6 no sólo son equipolentes, sino verdaderamente *equivalentes* en el sentido de que los vectores en el lado izquierdo del signo de igualdad pueden transformarse en los vectores del lado derecho mediante el uso de las operaciones fundamentales expuestas en la sección 3.13. Por lo tanto, se escribe

$$\textbf{Sist. Cant. Mov.}_1 + \textbf{Sist. Imp. Ext.}_{1\rightarrow 2} = \textbf{Sist. Cant. Mov.}_2 \qquad (17.14)$$

Pero las cantidades de movimiento $\mathbf{v}_i \, \Delta m_i$ de las partículas se reducen a un vector fijo en G, igual a su suma

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \, \Delta m_i$$

y un par de momento igual a la suma de sus momentos alrededor de G

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i \, \Delta m_i$$

Hay que recordar de la sección 14.3 que $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}_G$ definen, respectivamente, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas que forman al cuer-



Fotografía 17.2 Una prueba de impacto Charpy se usa para determinar la cantidad de energía absorbida por un material durante el impacto, al restar la energía potencial gravitatoria final del brazo a su energía potencial gravitatoria inicial.

po rígido. Se observa también de la ecuación (14.14) que $\mathbf{L} = m\overline{\mathbf{v}}$. Por otro lado, restringiendo el presente análisis al movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, se recuerda de la ecuación (16.4) que $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Por lo tanto, concluimos que el sistema de las cantidades de movimiento $\mathbf{v}_i\,\Delta m_i$ es equivalente al *vector de cantidad de movimiento lineal* $m\overline{\mathbf{v}}$ fijo en G y al *par de momento angular* $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ (figura 17.7). Al observar que el sis-

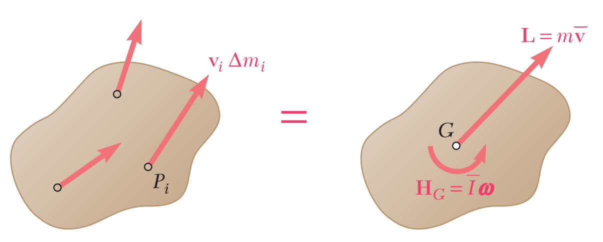


Figura 17.7

tema de cantidades de movimiento se reduce al vector $m\overline{\mathbf{v}}$ en el caso particular de una traslación ($\boldsymbol{\omega} = 0$) y al par $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ en el caso particular de una rotación centroidal ($\overline{\mathbf{v}} = 0$), verificamos una vez más que el movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia puede descomponerse en una traslación o en el centro de masa G y una rotación alrededor de G.

Al sustituir el sistema de cantidades de movimiento en los incisos *a*) y *c*) de la figura 17.6 por el vector de cantidad de movimiento lineal y el par de cantidad de movimiento angular equivalentes, se obtienen los tres diagramas que se muestran en la figura 17.8. Esta fi-

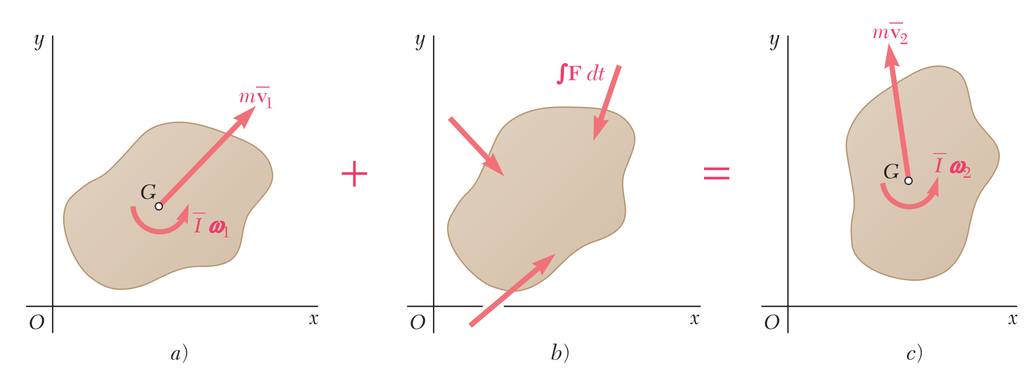


Figura 17.8

gura expresa como una ecuación de diagramas de cuerpo libre la relación fundamental entre (17.14) en el caso del movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia.

Es posible obtener tres ecuaciones de movimiento de la figura 17.8; dos se obtienen al sumar e igualar las *componentes* x y y de las cantidades de movimientos e impulsos, y la tercera al sumar e igualar los *momentos* de estos vectores *alrededor de cualquier punto dado.* Los ejes de coordenadas pueden elegirse fijos en el espacio o permitir que se muevan con el centro de masa del cuerpo mientras mantienen una

dirección fija. En cualquier caso, el punto alrededor del cual se consideran los momentos debe mantener la misma posición relativa con los ejes coordenados durante el intervalo de tiempo considerado.

Al derivar las tres ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido, es necesario tener cuidado de no sumar de manera indiscriminada cantidades de movimiento lineales y angulares. Es posible evitar la confusión al recordar que $m\bar{v}_x$ y $m\bar{v}_y$ representan las *componentes de un vector,* a saber, el vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$, mientras que $\bar{I}\omega$ representa la *magnitud de un par,* esto es, el par de cantidad de movimiento angular $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Así, la cantidad $\bar{I}\omega$ debe sumarse sólo al *momento* de la cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$, y nunca a este mismo vector ni a sus componentes. Todas las cantidades implicadas se expresarán entonces en las mismas unidades: N · m · s o lb · ft · s.

Rotación no centroidal. En este caso particular del movimiento plano, la magnitud de la velocidad del centro de masa del cuerpo es $\bar{v} = \bar{r}\omega$, donde $\bar{r}$ representa la distancia desde el centro de masa hasta el eje de rotación fijo, y $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado; la magnitud del vector de cantidad de movimiento fijo en G es consecuentemente $m\bar{v} = m\bar{r}\omega$. Al sumar los momentos alrededor de O del vector de cantidad de movimiento y del par de cantidad de movimiento (figura 17.9) y al utilizar el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia, se encuentra que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor de O tiene la magnitud†

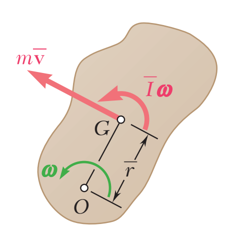


Figura 17.9

$$\bar{I}\omega + (m\bar{r}\omega)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\omega = I_O\omega \qquad (17.15)$$

Al igualar los momentos alrededor de O de las cantidades de movimiento e impulsos en (17.14), se escribe

$$I_O\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O\, dt = I_O\omega_2 \qquad (17.16)$$

En el caso general de movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, la ecuación (17.16) puede utilizarse con respecto al eje de rotación instantáneo bajo ciertas condiciones. Sin embargo, se recomienda que todos los problemas de movimiento plano se resuelvan mediante el método general que se describió antes en esta sección.

†Advierta que la suma $\mathbf{H}_A$ de los momentos alrededor de un punto arbitrario A de la cantidad de movimiento de las partículas de una placa rígida *no* es, en general, igual a $I_A\boldsymbol{\omega}$. (Véase el problema 17.67.)

17.9. SISTEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS

Es posible analizar el movimiento de varios cuerpos rígidos aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada cuerpo por separado (problema resuelto 17.6). Sin embargo, al resolver problemas que no incluyen más de tres incógnitas (entre las que se cuentan los impulsos de reacciones desconocidas), muchas veces es conveniente aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema considerado como un todo. Los diagramas de cantidad de movimiento e impulso se dibujan para el sistema completo de cuerpos. Para cada parte móvil del sistema, los diagramas de cantidades de movimiento deben incluir un vector de cantidad de movimiento, un par de cantidad de movimiento o ambos. Es posible omitir los impulsos de las fuerzas internas al sistema del diagrama de impulso, ya que ocurre en pares de vectores iguales y opuestos. Al sumar e igualar de manera sucesiva las componentes x y las y, así como los momentos de todos los vectores que intervienen, se obtienen tres relaciones que expresan que las cantidades de movimiento en el tiempo t_1 y los impulsos de las fuerzas externas forman un sistema equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo t_2.† De nuevo, es necesario ser cuidadosos y no sumar de manera indiscriminada cantidades de movimiento lineales y angulares; cada ecuación debe verificarse para asegurar que se han utilizado unidades consistentes. Este enfoque se ha empleado en el problema resuelto 17.8 y, más adelante, en los problemas resueltos 17.9 y 17.10.

17.10. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Cuando no actúa fuerza externa sobre un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, los impulsos de las fuerzas externas son cero y el sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo t_1 es equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo t_2. Sumando e igualando de manera sucesiva las componentes x, las componentes y y los momentos de las cantidades de movimiento en los tiempos t_1 y t_2, se concluye que la cantidad de movimiento lineal total del sistema se conserva en cualquier dirección, y que su cantidad de movimiento angular total se conserva alrededor de cualquier punto.

Sin embargo, hay muchas aplicaciones de ingeniería en las que *no se conserva la cantidad de movimiento lineal* aunque *se conserve la cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_O$ del sistema alrededor de un punto dado O, esto es, en el que

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (17.17)$$

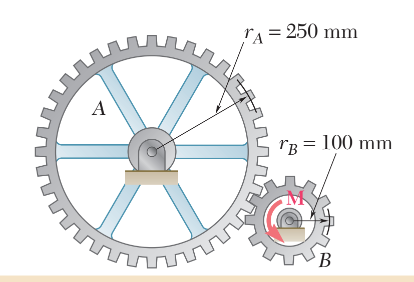
Tales casos ocurren cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas pasan por O o, de manera más general, cuando la suma de los impulsos angulares de las fuerzas externas alrededor de O es cero.

Los problemas que implican *conservación de la cantidad de movimiento angular* alrededor de un punto O pueden resolverse mediante el método general del impulso y la cantidad de movimiento, esto es, dibujando diagramas de cantidad de movimiento e impulso según se describe en las secciones 17.8 y 17.9. La ecuación (17.17) se obtiene entonces al sumar e igualar los momentos alrededor de O (problema resuelto 17.8). Como se verá en el problema resuelto 17.9, al sumar e igualar las componentes x y y es posible escribir dos ecuaciones adicionales que pueden utilizarse para determinar dos impulsos lineales desconocidos, como los impulsos de las componentes de reacción en un punto fijo.



Fotografía 17.3 Una patinadora al principio y al final de un giro. Empleando el principio de la conservación de la cantidad del movimiento angular encontrará que su velocidad angular es mucho más alta al final del giro.

†Advierta que como en la sección 16.7, no podemos hablar de sistemas *equivalentes*, ya que no estamos tratando con un solo cuerpo rígido.



PROBLEMA RESUELTO 17.6

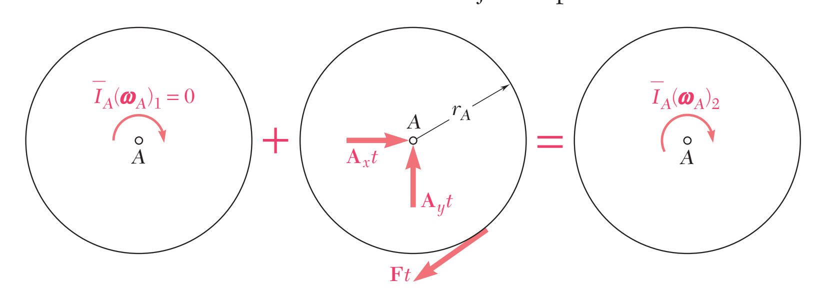
El engrane A tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 200 mm y el engrane B tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 80 mm. El sistema está en reposo cuando un par **M** de magnitud 6 N · m se aplica al engrane B. (Estos engranes se consideraron en el problema resuelto 17.2.) Ignorando la fricción, determine *a*) el tiempo requerido para que la velocidad angular del engrane B llegue a 600 rpm, *b*) la fuerza tangencial que el engrane B ejerce sobre el engrane A.

SOLUCIÓN

Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada engrane por separado. Como todas las fuerzas y el par son constantes, sus impulsos se obtienen al multiplicarlos por el tiempo desconocido t. Se recuerda del problema resuelto 17.2 que los momentos de inercia centroidales y las velocidades angulares son

$$\bar{I}_A = 0.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad \bar{I}_B = 0.0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$(\omega_A)_2 = 25.1 \text{ rad/s} \qquad (\omega_B)_2 = 62.8 \text{ rad/s}$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el engrane *A*. Los sistemas de cantidades de movimiento iniciales, impulsos y cantidades de movimiento finales se ilustran en tres dibujos independientes.



Cant. Mov. Sist.$_1$ + **Imp. Ext. Sist.**$_{1\to 2}$ = **Cant. Mov. Sist.**$_2$

+↺momentos alrededor de A: $\quad 0 - Ftr_A = -\bar{I}_A(\omega_A)_2$

$$Ft(0.250 \text{ m}) = (0.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(25.1 \text{ rad/s})$$
$$Ft = 40.2 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el engrane *B*.

Cant. Mov. Sist.$_1$ + **Imp. Ext. Sist.**$_{1\to 2}$ = **Cant. Mov. Sist.**$_2$

+↺momentos alrededor de B: $\quad 0 + Mt - Ftr_B = \bar{I}_B(\omega_B)_2$

$$+(6 \text{ N} \cdot \text{m})t - (40.2 \text{ N} \cdot \text{s})(0.100 \text{ m}) = (0.0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(62.8 \text{ rad/s})$$

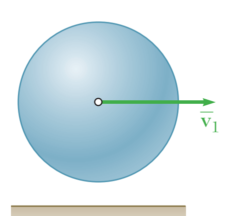
$t = 0.871$ s ◀

Si se recuerda que $Ft = 40.2$ N · s, se escribe

$$F(0.871 \text{ s}) = 40.2 \text{ N} \cdot \text{s} \qquad F = +46.2 \text{ N}$$

De tal modo, la fuerza ejercida por el engrane B sobre el engrane A es

F = 46.2 N ↙ ◀



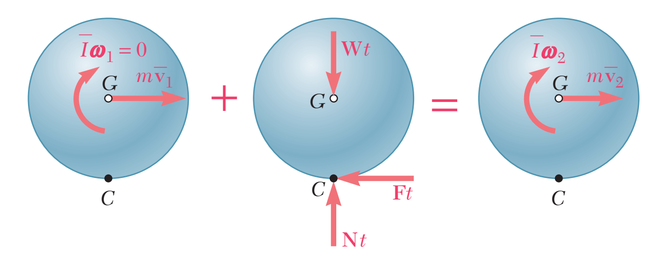
PROBLEMA RESUELTO 17.7

Una esfera uniforme de masa m y radio r se proyecta a lo largo de una superficie horizontal rugosa con una velocidad lineal $\overline{\mathbf{v}}_1$ y sin velocidad angular. Denotando mediante μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y la superficie, determine *a*) el tiempo t_2 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizarse, *b*) las velocidades lineal y angular de la esfera en el tiempo t_2.

SOLUCIÓN

Si bien la esfera se desliza en relación con la superficie, sobre ella actúa la fuerza normal **N**, la fuerza de fricción **F** y su peso **W** de magnitud $W = mg$.

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a la esfera desde el tiempo $t_1 = 0$ cuando ésta se coloca sobre la superficie hasta el tiempo $t_2 = t$ en el momento que empieza a rodar sin deslizarse.



Cant. Mov. Sist.$_1$ + **Imp. Ext. Sist.**$_{1\to2}$ = **Cant. Mov. Sist.**$_2$

$+\uparrow y$ componentes: $\qquad Nt - Wt = 0 \qquad (1)$

$\xrightarrow{+} x$ componentes: $\qquad m\bar{v}_1 - Ft = m\bar{v}_2 \qquad (2)$

$+\downarrow$ momentos alrededor de G: $\qquad Ftr = \bar{I}\omega_2 \qquad (3)$

De (1) se obtiene $N = W = mg$. Durante el intervalo de tiempo completo considerado, ocurre deslizamiento en el punto C y se tiene que $F = \mu_k N = \mu_k mg$. Al sustituir $\mu_k mg$ en lugar de F en (2), se escribe

$$m\bar{v}_1 - \mu_k mgt = m\bar{v}_2 \qquad \bar{v}_2 = \bar{v}_1 - \mu_k gt \qquad (4)$$

Al sustituir $F = \mu_k mg$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ en (3),

$$\mu_k mgtr = \tfrac{2}{5}mr^2\omega_2 \qquad \omega_2 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t \qquad (5)$$

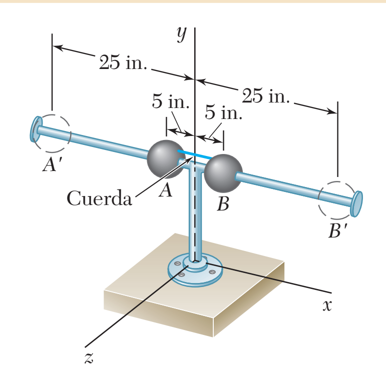
La esfera empezará a rodar sin deslizarse cuando la velocidad $\mathbf{v}_C$ del punto de contacto sea cero. En ese tiempo, el punto C se vuelve el centro instantáneo de rotación, y se tiene $\bar{v}_2 = r\omega_2$. Al utilizar las expresiones (4) y (5), se escribe

$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \qquad \bar{v}_1 - \mu_k gt = r\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t\right) \qquad t = \frac{2}{7}\frac{\bar{v}_1}{\mu_k g} \quad \blacktriangleleft$$

Al sustituir esta expresión para t en (5),

$$\omega_2 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\left(\frac{2}{7}\frac{\bar{v}_1}{\mu_k g}\right) \qquad \omega_2 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_1}{r} \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{5}{7}\frac{\bar{v}_1}{r}\downarrow \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \qquad \bar{v}_2 = r\left(\frac{5}{7}\frac{\bar{v}_1}{r}\right) \qquad \overline{\mathbf{v}}_2 = \tfrac{5}{7}\bar{v}_1 \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

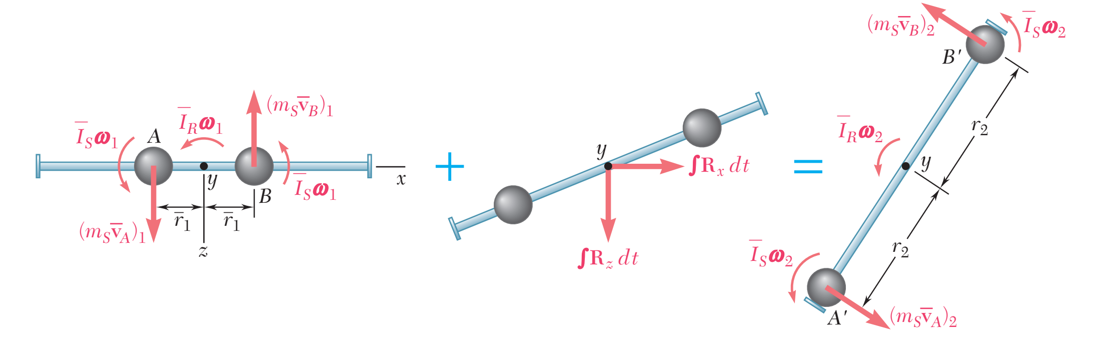


PROBLEMA RESUELTO 17.8

Dos esferas sólidas de 3 in. de radio, cada una de 2 lb de peso, se montan en A y B sobre la barra horizontal $A'B'$, la cual gira libremente alrededor de la vertical con una velocidad angular de 6 rad/s contraria al sentido de las manecillas del reloj. Las esferas se mantienen en su posición mediante una cuerda que de repente se corta. Si el momento de inercia centroidal de la barra y el pivote es $\bar{I}_R = 0.25 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$, determine *a)* la velocidad angular de la barra después de que las esferas se han movido a las posiciones A' y B', *b)* la energía que se pierde debido al impacto plástico de las esferas y los topes en A' y B'.

SOLUCIÓN

***a)* Principio del impulso y la cantidad de movimiento.** Para determinar la velocidad angular final de la barra, se expresa que las cantidades de movimiento iniciales de las distintas partes del sistema y los impulsos de las fuerzas externas son en conjunto equipolentes a la cantidad de movimiento final del sistema.



Cant. Mov. Sist.$_1$ + **Imp. Ext. Sist.**$_{1\rightarrow 2}$ = **Cant. Mov. Sist.**$_2$

Al observar que las fuerzas externas consisten en los pesos y las reacciones en el pivote, el cual no tiene momento alrededor del eje y, y al notar que $\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{r}\omega$, se igualan los momentos alrededor del eje y:

$$2(m_S\bar{r}_1\omega_1)\bar{r}_1 + 2\bar{I}_S\omega_1 + \bar{I}_R\omega_1 = 2(m_S\bar{r}_2\omega_2)\bar{r}_2 + 2\bar{I}_S\omega_2 + \bar{I}_R\omega_2$$

$$(2m_S\bar{r}_1^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_1 = (2m_S\bar{r}_2^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_2 \qquad (1)$$

lo cual expresa *que se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del eje y.* A continuación se calcula

$$\bar{I}_S = \tfrac{2}{5}m_S a^2 = \tfrac{2}{5}(2 \text{ lb}/32.2 \text{ ft/s}^2)(\tfrac{3}{12} \text{ ft})^2 = 0.00155 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$m_S\bar{r}_1^2 = (2/32.2)(\tfrac{5}{12})^2 = 0.0108 \qquad m_S\bar{r}_2^2 = (2/32.2)(\tfrac{25}{12})^2 = 0.2696$$

Al sustituir estos valores, e $\bar{I}_R = 0.25$ y $\omega_1 = 6$ rad/s en (1):

$$0.275(6 \text{ rad/s}) = 0.792\omega_2 \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = 2.08 \text{ rad/s} \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

***b)* Energía perdida.** La energía cinética del sistema en cualquier instante es

$$T = 2(\tfrac{1}{2}m_S\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_S\omega^2) + \tfrac{1}{2}\bar{I}_R\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2m_S\bar{r}^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega^2$$

Al recordar los valores numéricos que se encontraron antes, se tiene

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(0.275)(6)^2 = 4.95 \text{ ft} \cdot \text{lb} \qquad T_2 = \tfrac{1}{2}(0.792)(2.08)^2 = 1.713 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 1.71 - 4.95 \qquad \Delta T = -3.24 \text{ ft} \cdot \text{lb} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a utilizar el método del impulso y la cantidad de movimiento para resolver problemas que implican el movimiento plano de cuerpos rígidos. Como se estudió previamente en el capítulo 13, este método es más efectivo cuando se utiliza en la solución de problemas que incluyen velocidades y tiempo.

1. *El principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido* se expresa mediante la siguiente ecuación vectorial:

$$\textbf{Cant. Mov. Sist.}_1 + \textbf{Imp. Ext. Sist.}_{1\rightarrow 2} = \textbf{Cant. Sist.}_2 \qquad (17.14)$$

donde **Cant. Mov. Sist.** representa el sistema de las cantidades de movimiento de las partículas que forman al cuerpo rígido, e **Imp. Ext. Sist.** representa al sistema de todos los impulsos externos ejercidos durante el movimiento.

a) El sistema de las cantidades de movimiento de un cuerpo rígido es equivalente a un vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ fijo en el centro de masa del cuerpo y un par de cantidad de movimiento angular $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ (figura 17.7).

b) Será necesario dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre para el cuerpo rígido a fin de expresar en forma gráfica la ecuación vectorial anterior. La ecuación de diagramas constará de tres dibujos del cuerpo, que representarán de manera respectiva la cantidad de movimiento inicial, los impulsos de las fuerzas externas y la cantidad de movimiento final. Se demostrará que el sistema de las cantidades de movimiento iniciales y el sistema de los impulsos de las fuerzas externas son en conjunto equivalentes al sistema de las cantidades de movimiento finales (figura 17.8).

c) Mediante el uso de la ecuación de diagramas de cuerpo libre será posible sumar componentes en cualquier dirección y sumar cantidades de movimiento alrededor de cualquier punto. Al sumar cantidades de movimiento alrededor de un punto, recuerde incluir la *cantidad de movimiento angular* $\bar{I}\omega$ del cuerpo, así como los *momentos* de las componentes de su *cantidad de movimiento lineal.* En la mayoría de los casos usted será capaz de seleccionar y resolver una ecuación que implica sólo a una incógnita. Lo anterior se efectuó en todos los problemas resueltos de esta lección.

2. *En problemas que implican un sistema de cuerpos rígidos* puede aplicarse el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema como un todo. Puesto que las fuerzas internas ocurren en pares iguales y opuestos, no serán parte de la solución [problema resuelto 17.8].

3. *La conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de un eje dado* ocurre cuando, para un sistema de cuerpos rígidos, *la suma de los momentos de los impulsos externos alrededor de ese eje es cero.* De hecho, resulta fácil observar de la ecuación de diagramas de cuerpo libre que las cantidades de movimiento angular inicial y final del sistema alrededor de ese eje son iguales y, en consecuencia, que *se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del eje dado.* En ese caso es posible sumar las cantidades de movimiento angular de los diversos cuerpos del sistema y los momentos de sus cantidades de movimiento lineales alrededor de ese eje para obtener una ecuación que se resuelve para una incógnita [problema resuelto 17.8].

Problemas

17.52 El rotor de un motor eléctrico tiene una masa de 25 kg y un radio de giro de 180 mm. Se observa que se requieren 4.2 min para que el rotor gire hasta detenerse a partir de una velocidad angular de 3 600 rpm. Determine la magnitud promedio del par debido a la fricción cinética en los cojinetes del rotor.

17.53 Un volante de 4 000 lb con un radio de giro de 27 in. se deja girar hasta detenerse a partir de una velocidad angular de 450 rpm. Si la fricción cinética produce un par de magnitud igual a 125 lb · in., determine el tiempo requerido para que el volante gire hasta detenerse.

17.54 Dos discos del mismo grosor y el mismo material están unidos a una flecha, como se muestra en la figura. El disco A de 8 lb tiene un radio $r_A = 3$ in., y el disco B tiene un radio $r_B = 4.5$ in. Si se aplica un par **M** con magnitud de 20 lb · in. al disco A cuando el sistema está en reposo, determine el tiempo requerido para que la velocidad angular del sistema alcance 960 rpm.

17.55 Dos discos del mismo grosor y el mismo material están unidos a una flecha, como se muestra en la figura. El disco A de 3 kg tiene un radio $r_A = 100$ mm, y el disco B tiene un radio $r_B = 125$ mm. Si la velocidad angular del sistema debe incrementarse de 200 a 800 rpm durante un intervalo de 3 s, determine la magnitud del par **M** que debe aplicarse al disco A.

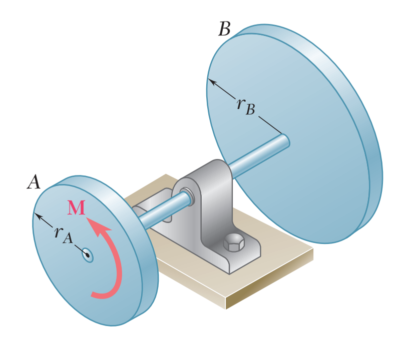


Figura P17.54 y *P17.55*

17.56 Un cilindro de radio r y peso W con una velocidad angular inicial $\boldsymbol{\omega}_0$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se coloca en la esquina formada por el piso y una pared vertical. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y la pared y el piso, obtenga una expresión para el tiempo requerido para que el cilindro quede en reposo.

17.57 Un cilindro de 3 kg y radio $r = 125$ mm, con una velocidad angular inicial $\boldsymbol{\omega}_0 = 90$ rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se coloca en la esquina formada por el piso y una pared vertical. Si el coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y la pared y el piso es de 0.10, determine el tiempo requerido para que el cilindro quede en reposo.

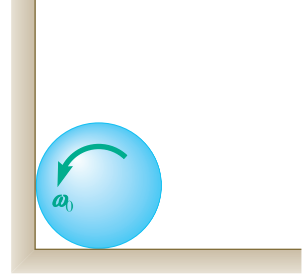


Figura P17.56 y P17.57

17.58 Un disco de grosor constante, inicialmente en reposo, se pone en contacto con una banda que se mueve con una velocidad constante **v**. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda, deduzca una expresión para el tiempo requerido para que el disco alcance una velocidad angular constante.

17.59 El disco A con peso de 5 lb y radio $r = 3$ in., se encuentra en reposo cuando se pone en contacto con una banda que se mueve a una velocidad constante $v = 50$ ft/s. Si se sabe que $\mu_k = 0.20$ entre el disco y la banda, determine el tiempo requerido para que el disco alcance una velocidad angular constante.

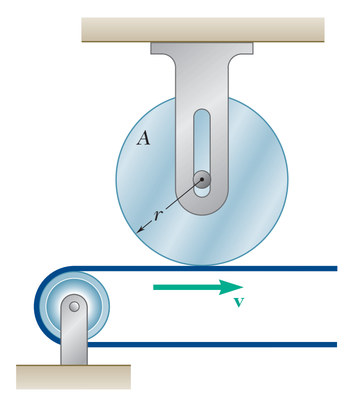
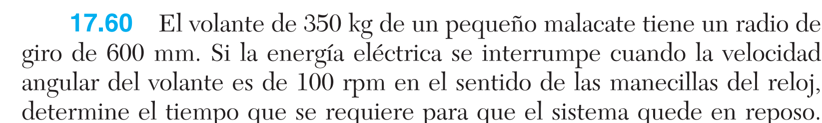


Figura *P17.58* y P17.59



17.60 El volante de 350 kg de un pequeño malacate tiene un radio de giro de 600 mm. Si la energía eléctrica se interrumpe cuando la velocidad angular del volante es de 100 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine el tiempo que se requiere para que el sistema quede en reposo.

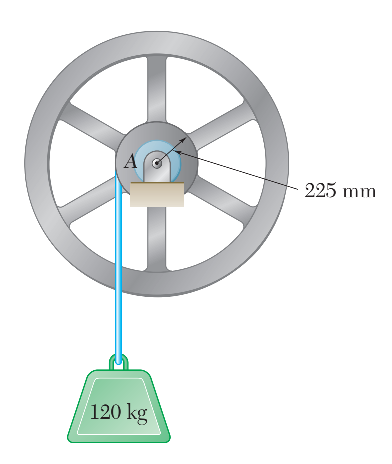


Figura P17.60

17.61 En el problema 17.60, determine el tiempo requerido para que la velocidad angular del volante se reduzca hasta 40 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

17.62 Una cinta se mueve sobre los dos tambores que se muestran en la figura. El tambor A pesa 1.4 lb y tiene un radio de giro de 0.75 in., mientras que el tambor B pesa 3.5 lb y tiene un radio de giro de 1.25 in. En la parte inferior de la cinta la tensión es constante e igual a $T_A = 0.75$ lb. Si se sabe que la cinta se encuentra inicialmente en reposo, determine *a*) la tensión constante T_B requerida si la velocidad de la cinta debe ser $v = 10$ ft/s después de 0.24 s, *b*) la tensión correspondiente en la porción de la cinta ubicada entre los tambores.

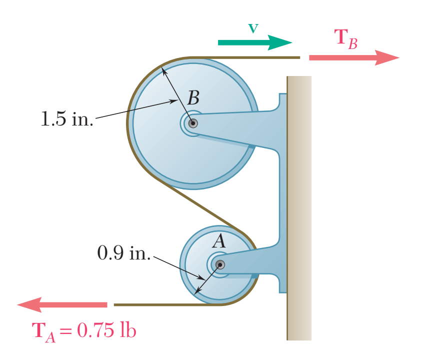


Figura *P17.62*

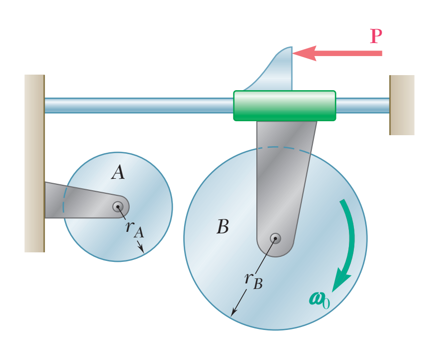


Figura P17.63 y P17.64

17.63 El disco B tiene una velocidad angular inicial $\boldsymbol{\omega}_0$ cuando se pone en contacto con el disco A, el cual se encuentra en reposo. Muestre que la velocidad angular final del disco B depende sólo de ω_0 y de la razón de las masas m_A y m_B de los dos discos.

17.64 El disco A de 7.5 lb tiene un radio $r_A = 6$ in. y se encuentra inicialmente en reposo. El disco B de 10 lb tiene un radio $r_B = 8$ in. y una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0$ de 900 rpm cuando se pone en contacto con el disco A. Desprecie la fricción en los cojinetes y determine *a*) la velocidad angular final de cada disco, *b*) el impulso total de la fuerza de fricción ejercida sobre el disco A.

17.65 Muestre que el sistema de las cantidades de movimiento de una placa rígida en movimiento plano se reducen a un solo vector, y exprese la distancia desde el centro de masa G hasta la línea de acción de este vector en términos del radio de giro centroidal $\bar{k}$ de la placa, la magnitud $\bar{v}$ de la velocidad de G y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

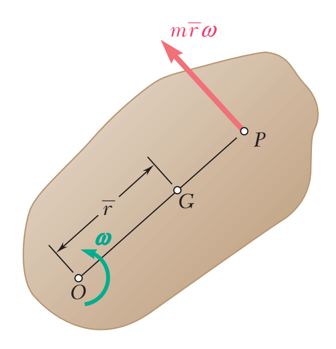


Figura P17.66

17.66 Muestre que, cuando una placa rígida gira alrededor de un eje fijo que pasa por O perpendicular a la placa, el sistema de las cantidades de movimiento de sus partículas es equivalente a un solo vector de magnitud $m\bar{r}\omega$, perpendicular a la línea OG, y aplicado a un punto P sobre esta línea, denominado el centro de percusión, a una distancia $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ desde el centro de masa de la placa.

17.67 Demuestre que la suma $\mathbf{H}_A$ de los momentos alrededor del punto A de las cantidades de movimiento de las partículas de una placa rígida en movimiento plano es igual a $I_A\boldsymbol{\omega}$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa en el instante considerado e I_A es el momento de inercia de la placa alrededor de A, si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones: *a*) A es el centro de masa de la placa, *b*) A es el centro instantáneo de rotación, *c*) la velocidad de A está dirigida a lo largo de una línea que une el punto A y el centro de masa G.

17.68 Considere una placa rígida inicialmente en reposo y sujeta a una fuerza impulsiva **F** contenida en el plano de la placa. Se define el *centro de percusión P* como el punto de intersección de la línea de acción de **F** con la perpendicular dibujada a partir de G. *a*) Muestre que el centro instantáneo de rotación C de la placa se ubica en la línea GP a una distancia $GC = \bar{k}^2/GP$ sobre el lado opuesto de G. *b*) Muestre que si el centro de percusión se hubiera localizado en C el centro de rotación instantáneo estaría localizado en P.

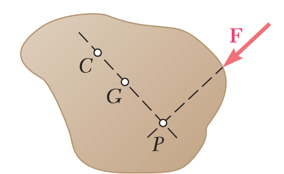
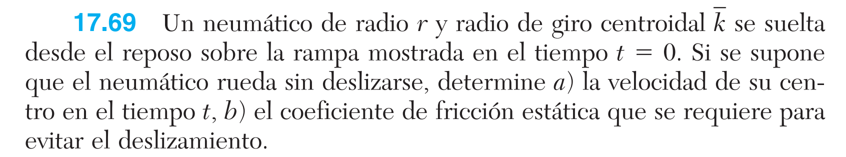


Figura P17.68

17.69 Un neumático de radio r y radio de giro centroidal $\bar{k}$ se suelta desde el reposo sobre la rampa mostrada en el tiempo $t = 0$. Si se supone que el neumático rueda sin deslizarse, determine *a*) la velocidad de su centro en el tiempo t, *b*) el coeficiente de fricción estática que se requiere para evitar el deslizamiento.



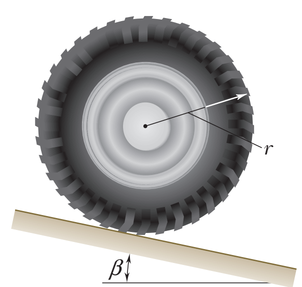


Figura P17.69

17.70 Un volante está rígidamente conectado a una flecha de 1.5 in. de radio que rueda sin deslizarse a lo largo de rieles paralelos. Si después de que se suelta desde el reposo el sistema llega a una velocidad de 6 in./s en 30 s, determine el radio de giro centroidal del sistema.

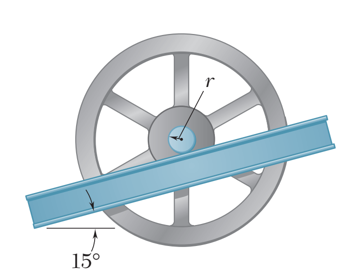


Figura P17.70

17.71 La polea doble que se muestra en la figura tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 100 mm. Si la polea está en reposo y se aplica una fuerza $\boldsymbol{P}$ de magnitud igual a 24 N sobre la cuerda B, determine *a*) la velocidad del centro de la polea después de 1.5 s, *b*) la tensión en la cuerda C.

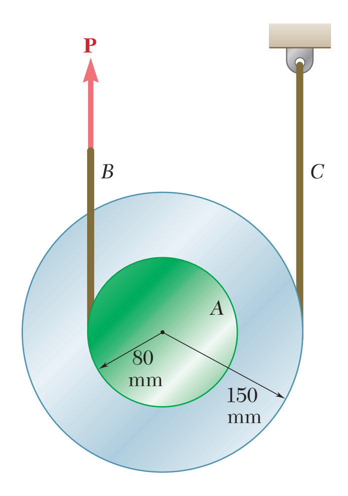


Figura P17.71

17.72 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso $W = 14$ lb y radio $r = 5$ in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando $t = 0$, determine *a*) la velocidad del centro del cilindro B en $t = 3$ s, *b*) la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

17.73 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso $W = 14$ lb y radio $r = 5$ in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si en el instante mostrado la velocidad angular del cilindro A es de 30 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) el tiempo requerido para que la velocidad angular del cilindro A se reduzca a 5 rad/s, *b*) la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

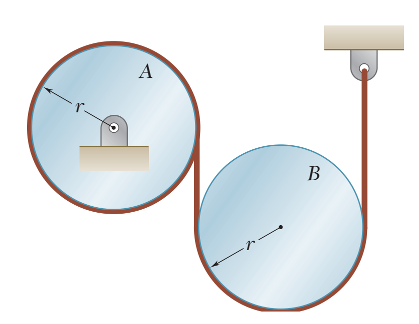


Figura P17.72 y *P17.73*

17.74 y 17.75 Un cilindro de 240 mm de radio y de 8 kg de masa descansa sobre una carretilla de 3 kg. El sistema está en reposo cuando se aplica una fuerza **P** de 10 N de magnitud como se muestra en la figura durante 1.2 s. Si se sabe que el cilindro gira sin deslizarse sobre la carretilla y se desprecia la masa de sus ruedas, determine la velocidad resultante de *a*) la carretilla, *b*) el centro del cilindro.

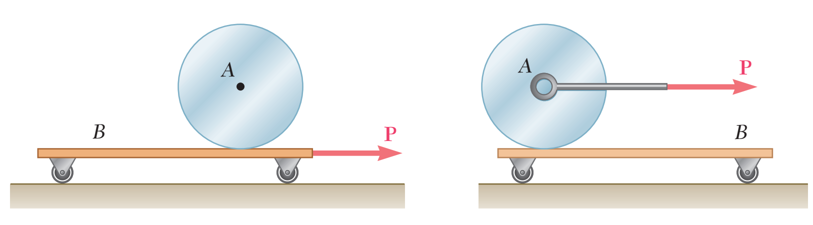


Figura P17.74 **Figura P17.75**

17.76 En el arreglo de engranes mostrado, los engranes *A* y *C* están unidos a la varilla *ABC*, la cual puede girar libremente alrededor de *B*, mientras que el engrane interior *B* está fijo. Si el sistema se encuentra en reposo, determine la magnitud del par **M** que debe aplicarse a la varilla *ABC* sabiendo que 2.5 s después la velocidad angular de la varilla debe ser de 240 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Los engranes *A* y *C* pesan 2.5 lb cada uno y pueden considerarse como discos con radio de 2 in.; la varilla *ABC* pesa 4 lb.

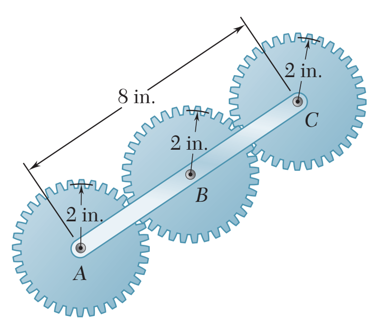


Figura *P17.76*

17.77 Una esfera de radio r y masa m se coloca sobre un piso horizontal sin velocidad lineal pero con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0$ en el sentido de las manecillas del reloj. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y el piso, determine *a*) el tiempo t_1 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizarse, *b*) las velocidades lineal y angular de la esfera en el tiempo t_1.

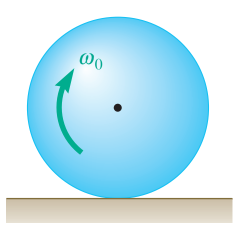


Figura P17.77

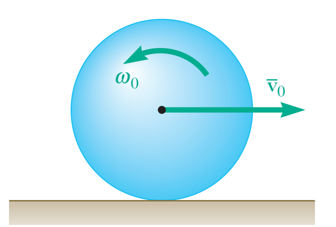


Figura P17.78

17.78 Una esfera de radio r y masa m se proyecta a lo largo de una superficie horizontal rugosa con las velocidades iniciales indicadas. Si la velocidad final de la esfera debe ser cero, exprese *a*) la magnitud requerida de $\boldsymbol{\omega}_0$ en términos de v_0 y r, *b*) el tiempo requerido para que la esfera quede en reposo en términos de v_0 y el coeficiente de fricción cinética μ_k.

17.79 Un disco de 2.5 lb y 4 in. de radio está conectado a la horquilla *BCD* mediante flechas cortas provistas de cojinetes en *B* y *D*. La horquilla de 1.5 lb tiene un radio de giro de 3 in. alrededor del eje *x*. Al principio, el mecanismo gira a 120 rpm con el disco en el plano de la horquilla ($\theta = 0$). Si el disco se perturba ligeramente y gira con respecto a la horquilla hasta $\theta = 90°$, donde se detiene mediante una barra pequeña en *D*, determine la velocidad angular lineal del mecanismo.

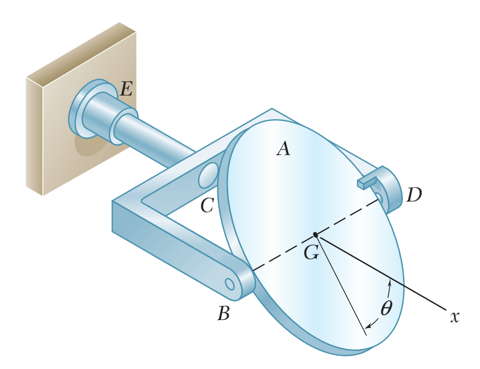


Figura P17.79

17.80 Dos paneles *A* y *B* están unidos mediante bisagras a una placa rectangular y se sostienen mediante un alambre, como se muestra en la figura. La placa y los paneles están hechos del mismo material y tienen el mismo grosor. Todo el ensamble gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0$ cuando el alambre se rompe. Determine la velocidad angular del ensamble después de que los paneles hayan caído sobre la placa.

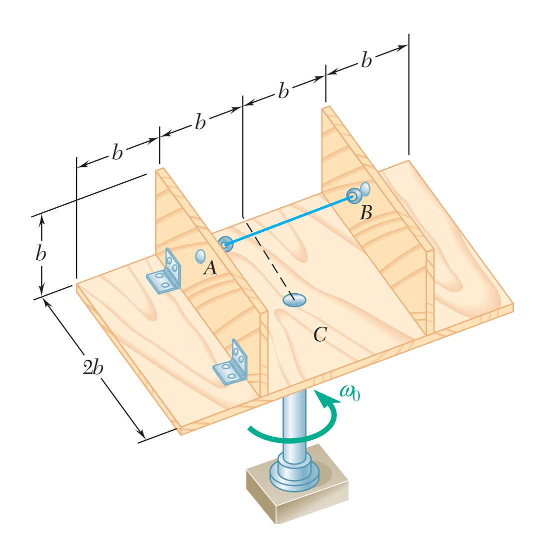


Figura *P17.80*

17.81 Un tubo *AB* de 1.6 kg puede deslizarse libremente sobre la varilla *DE*, la cual a su vez puede girar con libertad en un plano horizontal. Inicialmente, el ensamble gira con una velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y el tubo se mantiene en posición mediante una cuerda. El momento de inercia de la barra y la ménsula con respecto al eje de rotación vertical es de 0.30 kg · m^2 y el momento de inercia centroidal del tubo alrededor de un eje vertical es de 0.0025 kg · m^2. Si la cuerda se rompe de manera súbita, determine *a*) la velocidad angular del ensamble después de que el tubo se haya movido hasta el extremo *E*, *b*) la energía perdida durante el impacto plástico en *E*.

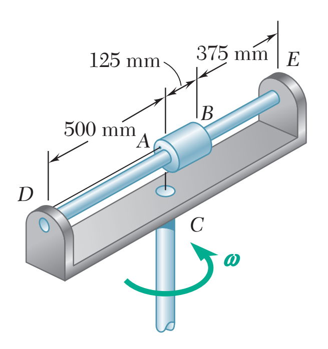


Figura P17.81

17.82 Dos bolas de 0.8 lb se introducen en forma sucesiva por el centro *C* del tubo ligero *AB* de 4 lb. Si se sabe que cuando la primera bola se introduce en el tubo la velocidad angular de éste es de 8 rad/s y si se desprecia el efecto de la fricción, determine la velocidad angular del tubo justo después *a*) de que la primera bola ha salido del tubo, *b*) la segunda bola sale del tubo.

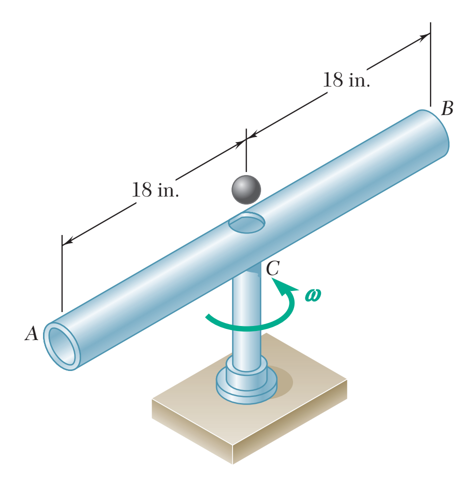


Figura P17.82

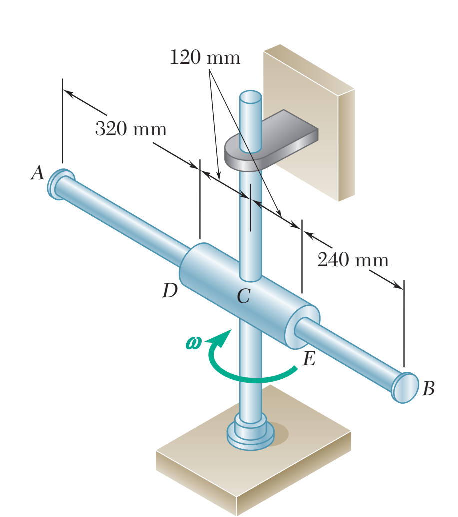


Figura P17.83

17.83 Una barra de 3 kg y 800 mm de longitud puede deslizarse libremente en el cilindro *DE* de 240 mm, el cual a su vez puede girar con libertad en un plano horizontal. En la posición mostrada, el ensamble gira con una velocidad angular de magnitud $\omega = 40$ rad/s y el extremo *B* de la barra se mueve hacia el cilindro a una velocidad de 75 mm/s respecto al cilindro. Si el momento de inercia de masa centroidal del cilindro alrededor de un eje vertical es 0.025 kg · m^2 y si se desprecia el efecto de la fricción, determine la velocidad angular del ensamble cuando el extremo *B* choca con el extremo *E* del cilindro.

17.84 En el helicóptero que se muestra se usa una hélice vertical de cola para evitar la rotación de la cabina cuando varía la velocidad de las hélices principales. Si la hélice de la cola no está en operación, determine la velocidad angular final de la cabina después de que la velocidad de las hélices principales ha cambiado de 180 a 240 rpm. (La velocidad de las hélices principales se mide con respecto a la cabina, y esta última tiene un momento de inercia centroidal de 650 lb · ft · s^2. Se supone que cada una de las cuatro hélices principales es una barra esbelta de 14 ft con un peso de 55 lb.)

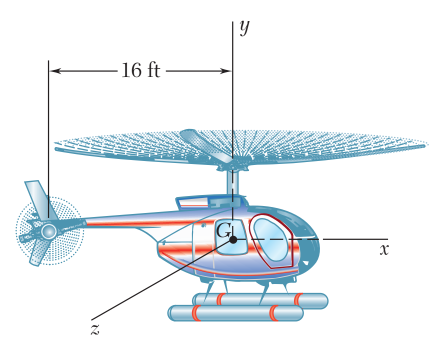


Figura P17.84

17.85 Si se supone que la hélice de la cola en el problema 17.84 se encuentra en operación, y que la velocidad angular de la cabina se mantiene igual a cero, determine la velocidad horizontal final de la cabina cuando la velocidad de las hélices principales varía de 180 a 240 rpm. La cabina tiene un peso de 1 250 lb y está inicialmente en reposo. Determine también la fuerza que ejerce la hélice de la cola si el cambio en la velocidad ocurre de manera uniforme en 12 s.

17.86 El disco *B* de 4 kg está conectado a la flecha de un motor montado sobre una placa *A*, la cual puede girar libremente alrededor del eje vertical *C*. La unidad de motor, placa y flecha tiene un momento de inercia de 0.20 kg · m^2 con respecto al eje de la flecha. Si el motor se pone en operación cuando el sistema está en reposo, determine las velocidades angulares del disco y de la placa después de que el motor ha alcanzado su velocidad de operación normal de 360 rpm.

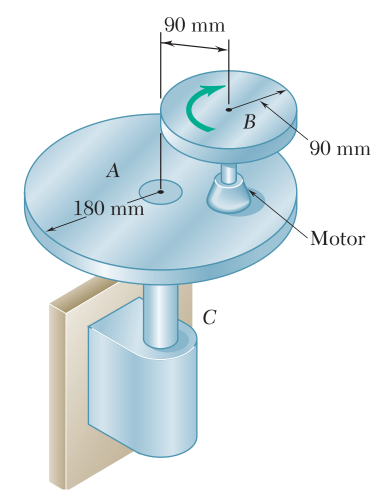


Figura P17.86

17.87 La plataforma circular *A* está acoplada con un aro de 200 mm de radio interior y puede girar libremente alrededor del eje vertical. Se sabe que la unidad de aro y plataforma tiene una masa de 5 kg y un radio de giro de 175 mm con respecto al eje. En el momento que la plataforma gira con una velocidad angular de 50 rpm, un disco *B* de 3 kg con radio de 80 mm se coloca sobre la plataforma sin velocidad. Si se sabe que entonces el disco *B* se desliza hasta que queda en reposo, en relación con la plataforma, recargado en el aro, determine la velocidad angular final de la plataforma.

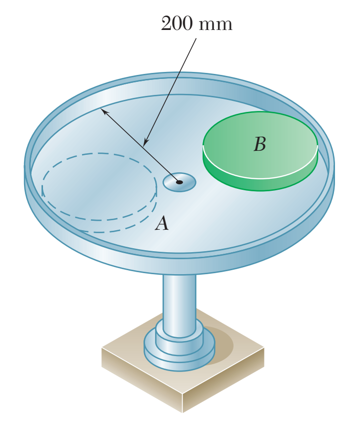


Figura P17.87

17.88 Un pequeño collarín C de 2 kg puede deslizarse con libertad sobre un aro delgado de 3 kg de masa y 250 mm de radio. El aro está soldado a una flecha vertical corta, que puede girar libremente en un cojinete fijo. Inicialmente el aro tiene una velocidad angular de 35 rad/s y el collarín está en la parte superior del aro ($\theta = 0$) cuando se le da un ligero golpe. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine *a*) la velocidad angular del aro cuando el collarín pasa por la posición $\theta = 90°$, *b*) la velocidad correspondiente del collarín relativa al aro.

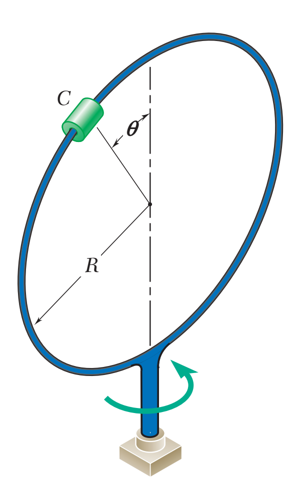


Figura P17.88

17.89 El collarín C tiene una masa de 8 kg y puede deslizarse con libertad sobre la barra AB, la cual a su vez puede girar libremente en un plano horizontal. El mecanismo gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de 1.5 rad/s cuando se suelta un resorte ubicado entre A y C, lo que proyecta al collarín a lo largo de la barra con una velocidad relativa inicial de $v_r = 1.5$ m/s. Si el momento de inercia de masa combinado alrededor de B de la barra y el resorte es de 1.2 kg · m^2, determine *a*) la distancia mínima entre el collarín y el punto B en el movimiento resultante, *b*) la velocidad angular correspondiente del ensamble.

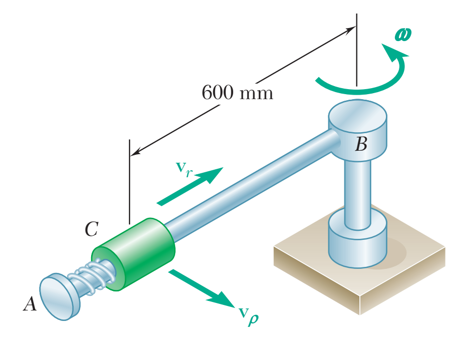


Figura P17.89

17.90 En el problema 17.89 determine la magnitud requerida de la velocidad relativa inicial v_r si durante el movimiento resultante la distancia mínima entre el collarín C y el punto B debe ser de 300 mm.

17.91 Un collarín C de 6 lb está unido a un resorte y puede deslizarse sobre la barra AB, la cual a su vez puede girar en un plano horizontal. El momento de inercia de masa de la barra AB con respecto al extremo A es de 0.35 lb · ft · s^2. El resorte tiene una constante $k = 15$ lb/in. y una longitud sin deformar de 10 in. En el instante mostrado, la velocidad del collarín relativa a la barra es cero y el ensamble gira con una velocidad angular de 12 rad/s. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine *a*) la velocidad angular del ensamble cuando el collarín pasa a través de un punto localizado a 7.5 in. del extremo A de la barra, *b*) la velocidad correspondiente del collarín relativa a la barra.

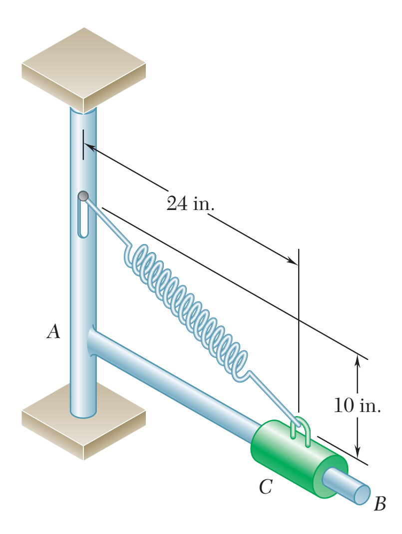


Figura *P17.91*

17.92 Una barra uniforme AB, que tiene un peso de 15 lb y una longitud de 3.6 ft, está fija a un carro C de 25 lb. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición que se indica y se desprecia la fricción, determine *a*) la velocidad del punto B cuando la barra AB pasa por una posición vertical, *b*) la velocidad correspondiente en el carro C.

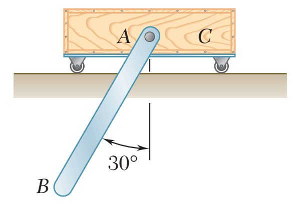


Figura *P17.92*

17.93 En el problema 17.83, determine la velocidad de la barra AB relativa al cilindro DE cuando el extremo B de la barra golpea el extremo E del cilindro.

17.94 En el problema 17.81, determine la velocidad del tubo relativa a la barra cuando el tubo golpea el extremo E del ensamble.

17.95 El cilindro de acero A de 6 lb y el carrito de madera B que pesa 10 lb están en reposo en la posición mostrada cuando al cilindro se le da un pequeño empujón, lo que ocasiona que ruede sin deslizarse a lo largo de la superficie superior del carrito. Si se desprecia la fricción entre el carrito y el suelo, determine la velocidad del carrito cuando el cilindro pasa por el punto más bajo de la superficie en C.

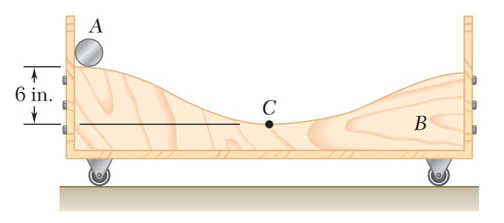


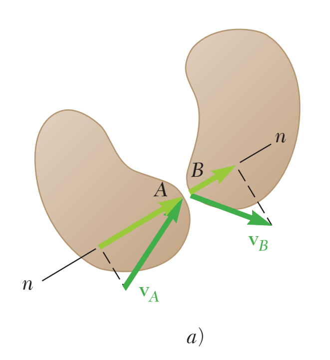
Figura P17.95

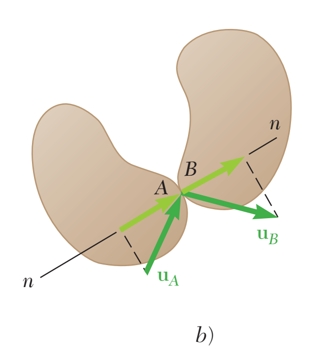
17.11. MOVIMIENTO IMPULSIVO

En el capítulo 13 se vio que el método del impulso y la cantidad de movimiento es el único método práctico para la solución de problemas que implican el movimiento impulsivo de una partícula. Ahora se verá que los problemas que conlleva el movimiento impulsivo de un cuerpo rígido son en particular muy apropiados a una solución por el método del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que el intervalo de tiempo que se considera en el cálculo de los impulsos lineales y de los impulsos angulares es muy corto, es posible suponer que los cuerpos que participan ocupan la misma posición durante ese intervalo de tiempo, lo que hace el cálculo bastante simple.

17.12. IMPACTO EXCÉNTRICO

En las secciones 13.13 y 13.14, se aprendió a resolver problemas de *impacto central,* esto es, problemas en que los centros de masa de los dos cuerpos que chocan se ubican sobre la línea de impacto. A continuación se analizará el *impacto excéntrico* de los cuerpos rígidos. Considere dos cuerpos que chocan y denote por $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ las velocidades an-





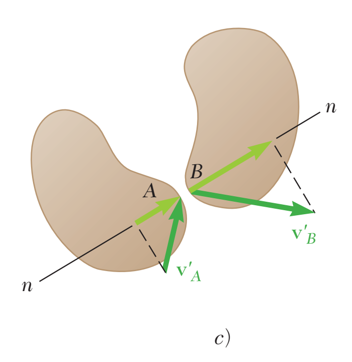


Figura 17.10

tes del impacto *de los dos puntos de contacto* A y B (figura 17.10*a*). Bajo el impacto, los dos cuerpos se *deformarán* y al final del periodo de deformación, las velocidades $\mathbf{u}_A$ y $\mathbf{u}_B$ de A y B tendrán componentes iguales a lo largo de la línea de impacto nn (figura 17.10*b*). Luego ocurrirá un periodo de *restitución,* al final del cual A y B tendrán velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ (figura 17.10*c*). Suponiendo que no hay fricción entre los cuerpos, se halla que las fuerzas que ejercen entre sí están dirigidas a lo largo de la línea de impacto. Al denotar la magnitud del impulso de una de estas fuerzas durante el periodo de deformación por $\int P\,dt$ y la magnitud de este impulso durante el periodo de restitución por $\int R\,dt$, se recuerda que el coeficiente de restitución e se define como el cociente

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \tag{17.18}$$

Se demostrará que la relación establecida en la sección 13.13 entre las velocidades relativas de las dos partículas antes y después del impacto también se cumple entre las componentes a lo largo de la línea de im-

pacto de las velocidades relativas de los dos puntos de contacto A y B. Por lo tanto, se demostrará que

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{17.19}$$



Fotografía 17.4 Cuando el bate giratorio hace contacto con la pelota, el bate aplica una fuerza impulsiva a la pelota por lo que se requiere utilizar el método del impulso y la cantidad de movimiento para determinar las velocidades finales de la pelota y el bate.

Se supondrá que el movimiento de cada uno de los cuerpos que chocan de la figura 17.10 no tiene restricciones. De tal manera las únicas fuerzas impulsivas ejercidas sobre los cuerpos durante el impacto se aplican en A y B, respectivamente. Considere el cuerpo al cual pertenece el punto A y dibuje los tres diagramas de cantidad de movimiento e impulso correspondientes al periodo de deformación (figura 17.11).

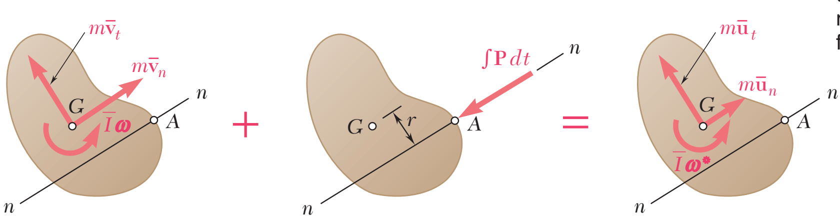


Figura 17.11

Se denota por $\bar{\mathbf{v}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$, respectivamente, la velocidad del centro de masa al principio y al final del periodo de deformación, y se denota por $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega}^*$ la velocidad angular del cuerpo en los mismos instantes. Sumando e igualando las componentes de las cantidades de movimiento y los impulsos a lo largo de la línea de impacto nn, se escribe

$$m\bar{v}_n - \int P\,dt = m\bar{u}_n \tag{17.20}$$

Al sumar e igualar los momentos alrededor de G de la cantidad de movimiento y los impulsos, se escribe también

$$\bar{I}\omega - r\int P\,dt = \bar{I}\omega^* \tag{17.21}$$

donde r representa la distancia perpendicular desde G hasta la línea de impacto. Considerando ahora el periodo de restitución, se obtiene de una manera similar

$$m\bar{u}_n - \int R\,dt = m\bar{v}'_n \tag{17.22}$$
$$\bar{I}\omega^* - r\int R\,dt = \bar{I}\omega' \tag{17.23}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}'$ y $\boldsymbol{\omega}'$ representan, respectivamente, la velocidad de un centro de masa y la velocidad angular del cuerpo después del impacto. Resolviendo (17.20) y (17.22) para los dos impulsos y sustituyendo en (17.18), y resolviendo después (17.21) y (17.23) para los mismos dos impulsos y sustituyendo de nuevo en (17.18), se obtienen las siguientes dos expresiones alternativas para el coeficiente de restitución:

$$e = \frac{\bar{u}_n - \bar{v}'_n}{\bar{v}_n - \bar{u}_n} \qquad e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*} \tag{17.24}$$

Si se multiplica por r el numerador y el denominador de la segunda expresión que se obtuvo para e, y se suma respectivamente al numerador y al denominador de la primera expresión, se tiene

$$e = \frac{\bar{u}_n + r\omega^* - (\bar{v}'_n + r\omega')}{\bar{v}_n + r\omega - (\bar{u}_n + r\omega^*)} \qquad (17.25)$$

Al observar que $\bar{v}_n + r\omega$ representa la componente $(v_A)_n$ a lo largo de nn de la velocidad del punto de contacto A y que, de manera similar, $\bar{u}_n + r\omega^*$ y $\bar{v}'_n + r\omega'$ representan, respectivamente, las componentes $(u_A)_n$ y $(v'_A)_n$, se escribe

$$e = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n} \qquad (17.26)$$

El análisis del movimiento del segundo cuerpo conduce a una expresión similar para e en términos de las componentes a lo largo de nn de las velocidades sucesivas del punto B. Si se recuerda que $(u_A)_n = (u_B)_n$, y eliminando estas dos componentes de velocidad mediante un manejo similar al que se usó en la sección 13.13, se obtiene la relación (17.19).

Si uno o ambos de los cuerpos que chocan está restringido a girar alrededor de un punto fijo O, como en el caso de un péndulo compuesto (figura 17.12*a*), se ejercerá una reacción impulsiva en O (figura 17.12*b*). Verificar que si bien su deducción debe modificarse, las ecuaciones (17.26) y (17.19) siguen siendo válidas. Al aplicar la fórmula (17.16) al periodo de deformación y al periodo de restitución, se escribe

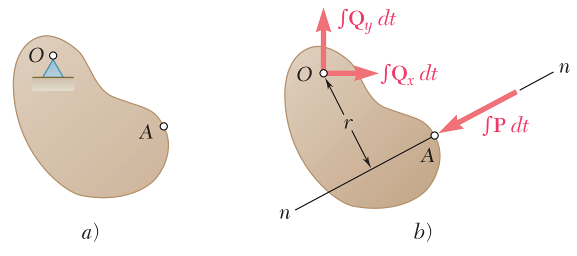


Figura 17.12

$$I_O\omega - r\int P\,dt = I_O\omega^* \qquad (17.27)$$

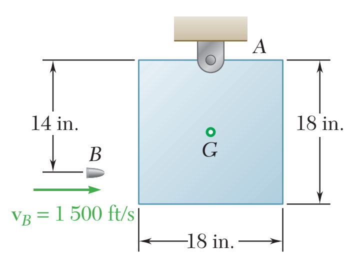
$$I_O\omega^* - r\int R\,dt = I_O\omega' \qquad (17.28)$$

donde r representa la distancia perpendicular del punto fijo O hasta la línea de impacto. Al resolver (17.27) y (17.28) para los dos impulsos y sustituir en (17.18), y observar después que $r\omega$, $r\omega^*$ y $r\omega'$ representan las componentes a lo largo de nn de las velocidades sucesivas en el punto A, se escribe

$$e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*} = \frac{r\omega^* - r\omega'}{r\omega - r\omega^*} = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n}$$

y se comprueba que la ecuación (17.26) sigue siendo válida. De tal modo, la ecuación (17.19) sigue siendo válida cuando uno de los cuerpos que chocan está restringido a girar alrededor de un punto fijo O.

Para determinar las velocidades de dos cuerpos que chocan después del impacto, la relación (17.19) debe usarse junto con una o varias de las ecuaciones que se obtuvieron al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento (problema resuelto 17.10).

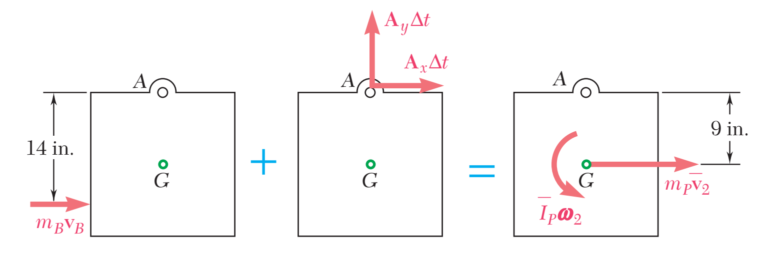


PROBLEMA RESUELTO 17.9

Una bala B de 0.05 lb se dispara con una velocidad horizontal de 1 500 ft/s contra el costado del panel cuadrado suspendido de 20 lb de una bisagra en A. Si se sabe que el panel está inicialmente en reposo, determine *a*) la velocidad angular del panel inmediatamente después de que la bala quede incrustada, *b*) la reacción impulsiva en A suponiendo que la bala queda incrustada en 0.0006 s.

SOLUCIÓN

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Se consideran la bala y el panel como un solo sistema y se expresa que la cantidad del movimiento inicial de la bala y el panel, y los impulsos de las fuerzas externas son en conjunto equipolentes a la cantidad de movimiento final del sistema. Puesto que el intervalo de tiempo $\Delta t = 0.0006$ s es muy corto, se ignoran todas las fuerzas no impulsivas y se consideran únicamente los impulsos externos $\mathbf{A}_x\,\Delta t$ y $\mathbf{A}_y\,\Delta t$.



Cant. Mov. Sist.$_1$ + Imp. Ext. Sist.$_{1\to2}$ = Cant. Mov. Sist.$_2$

+↰momentos alrededor de A: $\quad m_Bv_B(\frac{14}{12}\text{ ft}) + 0 = m_P\bar{v}_2(\frac{9}{12}\text{ ft}) + \bar{I}_P\omega_2 \qquad (1)$

$\xrightarrow{+}$ x componentes: $\quad m_Bv_B + A_x\,\Delta t = m_P\bar{v}_2 \qquad (2)$

$+\uparrow y$ componentes: $\quad 0 + A_y\,\Delta t = 0 \qquad (3)$

El momento de inercia de masa centroidal del panel cuadrado es

$$\bar{I}_P = \tfrac{1}{6}m_Pb^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{20\text{ lb}}{32.2}\right)(\tfrac{18}{12}\text{ ft})^2 = 0.2329\text{ lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

Al sustituir este valor, así como los datos dados en (1), y al notar que

$$\bar{v}_2 = (\tfrac{9}{12}\text{ ft})\omega_2$$

se escribe

$$\left(\frac{0.05}{32.2}\right)(1\,500)(\tfrac{14}{12}) = 0.2329\omega_2 + \left(\frac{20}{32.2}\right)(\tfrac{9}{12}\omega_2)(\tfrac{9}{12})$$

$$\omega_2 = 4.67\text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = 4.67\text{ rad/s}↰ \blacktriangleleft$$

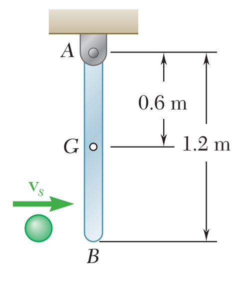
$$\bar{v}_2 = (\tfrac{9}{12}\text{ ft})\omega_2 = (\tfrac{9}{12}\text{ ft})(4.67\text{ rad/s}) = 3.50\text{ ft/s}$$

Al sustituir $\bar{v}_2 = 3.50$ ft/s, $\Delta t = 0.0006$ s, y los datos dados en la ecuación (2), se tiene

$$\left(\frac{0.05}{32.2}\right)(1\,500) + A_x(0.0006) = \left(\frac{20}{32.2}\right)(3.50)$$

$$A_x = -259\text{ lb} \qquad \mathbf{A}_x = 259\text{ lb} \leftarrow \blacktriangleleft$$

De la ecuación (3) se encontró $\quad A_y = 0 \qquad \mathbf{A}_y = 0 \blacktriangleleft$

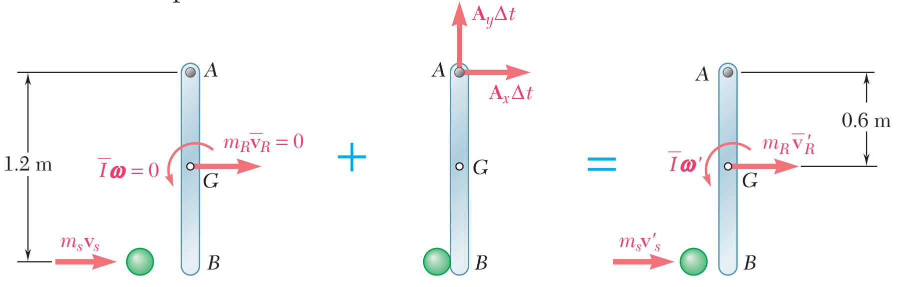


PROBLEMA RESUELTO 17.10

Una esfera de 2 kg que se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad inicial de 5 m/s golpea el extremo inferior de una barra rígida *AB* de 8 kg. La barra se suspende de una articulación en *A* y está inicialmente en reposo. Si el coeficiente de restitución entre la barra y la esfera es de 0.80, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de la esfera inmediatamente después del impacto.

SOLUCIÓN

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. La barra y la esfera se consideran como un solo sistema y se expresa que la cantidad de movimiento inicial de la barra y la esfera, y los impulsos de las fuerzas externas, son en conjunto equipolentes a la cantidad de movimiento final del sistema. Se advierte que la única fuerza impulsiva externa al sistema es la reacción impulsiva en *A*.



Cant. Mov. Sist.$_1$ + **Imp. Ext. Sist.**$_{1\to2}$ = **Cant. Mov. Sist.**$_2$

+↰momentos alrededor de *A*:

$$m_s v_s(1.2 \text{ m}) = m_s v'_s(1.2 \text{ m}) + m_R \bar{v}'_R\,(0.6 \text{ m}) + \bar{I}\omega' \qquad (1)$$

Puesto que la barra gira alrededor de *A*, se tiene que $\bar{v}'_R = \bar{r}\omega' = (0.6 \text{ m})\omega'$. Además,

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}mL^2 = \tfrac{1}{12}(8 \text{ kg})(1.2 \text{ m})^2 = 0.96 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Al sustituir estos valores y los datos proporcionados en la ecuación (1), se tiene

$$(2 \text{ kg})(5 \text{ m/s})(1.2 \text{ m}) = (2 \text{ kg})v'_s(1.2 \text{ m}) + (8 \text{ kg})(0.6 \text{ m})\omega'(0.6 \text{ m}) + (0.96 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega'$$

$$12 = 2.4v'_s + 3.84\omega' \qquad (2)$$

Velocidades relativas. Eligiendo como positivo el sentido hacia la derecha, se escribe

$$v'_B - v'_s = e(v_s - v_B)$$

Al sustituir $v_s = 5$ m/s, $v_B = 0$ y $e = 0.80$, se obtiene

$$v'_B - v'_s = 0.80(5 \text{ m/s}) \qquad (3)$$

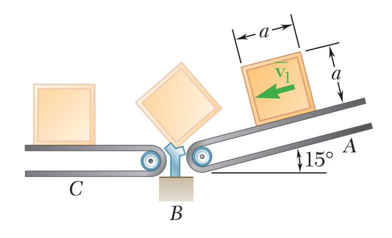
Al notar otra vez que la barra gira alrededor de *A*, se escribe

$$v'_B = (1.2 \text{ m})\omega' \qquad (4)$$

Al resolver las ecuaciones (2) a (4) de manera simultánea, se obtiene

$$\omega' = 3.21 \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\omega}' = 3.21 \text{ rad/s} ↰ \quad ◀$$

$$v'_s = -0.143 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}'_s = 0.143 \text{ m/s} \leftarrow \quad ◀$$

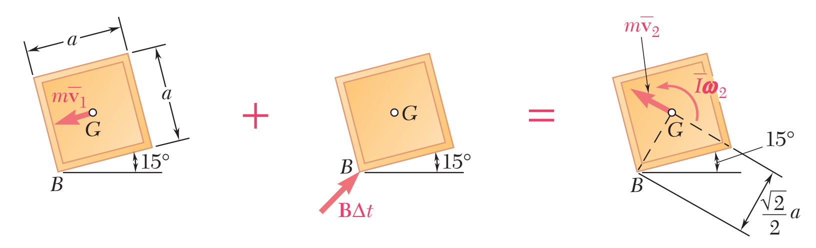


PROBLEMA RESUELTO 17.11

Un paquete cuadrado de lado a y masa m se mueve hacia abajo por una banda transportadora A con una velocidad constante $\bar{\mathbf{v}}_1$. En el extremo de la banda transportadora, la esquina del paquete choca contra un soporte rígido en B. Suponiendo que el impacto en B es perfectamente plástico, obtenga una expresión para la magnitud mínima de la velocidad $\bar{\mathbf{v}}_1$ para la cual el paquete girará alrededor de B y llegará a la banda transportadora C.

SOLUCIÓN

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que el impacto entre el paquete y el soporte es perfectamente plástico, el paquete gira alrededor de B durante el impacto. Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento al paquete y se nota que la única fuerza impulsiva externa al paquete es la reacción impulsiva en B.



$$\textbf{Cant. Mov. Sist.}_1 + \textbf{Imp. Ext. Sist.}_{1\to 2} = \textbf{Cant. Mov. Sist.}_2$$

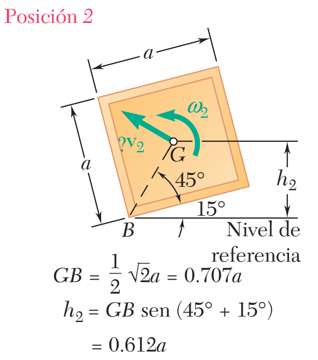
$+\circlearrowleft$ momentos alrededor de B: $\quad (m\bar{v}_1)(\tfrac{1}{2}a) + 0 = (m\bar{v}_2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a) + \bar{I}\omega_2 \quad (1)$

Puesto que el paquete gira alrededor de B, se tiene que $\bar{v}_2 = (GB)\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2$. Se sustituye esta expresión, junto con $\bar{I} = \frac{1}{6}ma^2$, en la ecuación (1):

$$(m\bar{v}_1)(\tfrac{1}{2}a) = m(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a) + \tfrac{1}{6}ma^2\omega_2 \qquad \bar{v}_1 = \tfrac{4}{3}a\omega_2 \qquad (2)$$

Principio de la conservación de la energía. Se aplica el principio de la conservación de la energía entre las posiciones 2 y 3.

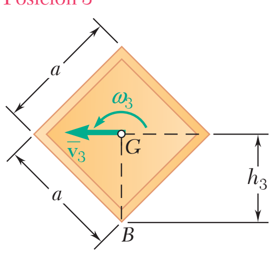




Posición 2. $V_2 = Wh_2$. Recordando que $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2$, se escribe

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6}ma^2)\omega_2^2 = \tfrac{1}{3}ma^2\omega_2^2$$

Posición 3



$h_3 = GB = 0.707a$

Posición 3. Puesto que el paquete debe alcanzar la barra transportadora C, debe pasar por la posición 3 donde G está directamente arriba de B. Además, puesto que deseamos determinar la velocidad mínima para la cual el paquete llegará a esta posición, se elige $\bar{v}_3 = \omega_3 = 0$. Por lo tanto, $T_3 = 0$ y $V_3 = Wh_3$.

Conservación de la energía

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$
$$\tfrac{1}{3}ma^2\omega_2^2 + Wh_2 = 0 + Wh_3$$
$$\omega_2^2 = \frac{3W}{ma^2}(h_3 - h_2) = \frac{3g}{a^2}(h_3 - h_2) \qquad (3)$$

Al sustituir los valores calculados de h_2 y h_3 en la ecuación (3), se obtiene

$$\omega_2^2 = \frac{3g}{a^2}(0.707a - 0.612a) = \frac{3g}{a^2}(0.095a) \qquad \omega_2 = \sqrt{0.285\, g/a}$$

$$\bar{v}_1 = \tfrac{4}{3}a\omega_2 = \tfrac{4}{3}a\sqrt{0.285g/a} \qquad \bar{v}_1 = 0.712\sqrt{ga} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó al *movimiento impulsivo* y al *impacto excéntrico de cuerpos rígidos.*

1. *El movimiento impulsivo* ocurre cuando un cuerpo rígido se somete a una fuerza muy grande $\mathbf{F}$ por un corto intervalo de tiempo Δt; el impulso resultante $\mathbf{F}\,\Delta t$ es tanto finito como diferente de cero. Tales fuerzas se conocen como *fuerzas impulsivas* y se presentan cuando hay un impacto en los cuerpos rígidos. Las fuerzas para las cuales el impulso es cero se conocen como *fuerzas no impulsivas.* Como se vio en el capítulo 13, las siguientes fuerzas pueden suponerse no impulsivas: el *peso* de un cuerpo, la fuerza que ejerce un *resorte,* y cualquier otra fuerza que *se conoce* que es pequeña en comparación con las fuerzas impulsivas. Sin embargo, las reacciones desconocidas *no pueden suponerse* no impulsivas.

2. *Impacto excéntrico de cuerpos rígidos.* Se vio que cuando dos cuerpos chocan, las componentes de la velocidad a lo largo de la línea de impacto de los *puntos de contacto A y B* antes y después del impacto cumplen la siguiente ecuación:

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \qquad (17.19)$$

donde el miembro del lado izquierdo es la *velocidad relativa después del impacto,* y el miembro del lado derecho es el producto del coeficiente de restitución y la *velocidad relativa antes del impacto.*

Esta ecuación expresa la misma relación de las componentes de la velocidad de los puntos de contacto antes y después del impacto que se usaron para las partículas en el capítulo 13.

3. *Para resolver un problema que implica un impacto* debe usarse el *método del impulso y la cantidad de movimiento* y seguir los siguientes pasos:

a) Dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre del cuerpo que expresará que el sistema compuesto por las cantidades de movimiento inmediatamente antes del impacto y por los impulsos de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las cantidades de movimiento inmediatamente después del impacto.

b) La ecuación de diagramas de cuerpo libre relacionará las velocidades antes y después del impacto y las fuerzas y reacciones impulsivas. En algunos casos, será posible determinar las velocidades y reacciones impulsivas desconocidas al resolver las ecuaciones obtenidas al sumar componentes y momentos [problema resuelto 17.9].

c) En el caso de un impacto en que $e > 0$, el número de incógnitas será más grande que el número de ecuaciones que es posible escribir al sumar componentes y momentos y será necesario complementar las ecuaciones que se obtuvieron de la ecuación de diagramas de cuerpo libre con la ecuación (17.19), la cual relaciona las velocidades relativas de los puntos de contacto antes y después del impacto [problema resuelto 17.10].

d) Durante un impacto es necesario usar el método del impulso y la cantidad de movimiento. Sin embargo, *antes y después del impacto* es posible, si es necesario, utilizar alguno de los métodos de solución que se han aprendido, tales como el del trabajo y la energía [problema resuelto 17.11].

Problemas

17.96 Una bala que pesa 0.08 lb se dispara con una velocidad horizontal de 1 800 ft/s en el extremo inferior de una barra ligera de 15 lb y longitud $L = 30$ in. Si $h = 12$ in. y la barra está inicialmente en reposo, determine *a*) la velocidad angular de la barra inmediatamente después de que la bala queda incrustada, *b*) la reacción impulsiva de C, si se supone que la bala queda incrustada en 0.001 s.

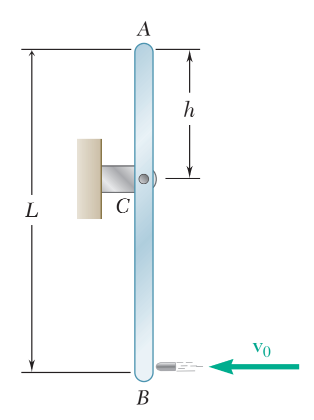


Figura P17.96

17.97 En el problema 17.96, determine *a*) la distancia requerida h si la reacción impulsiva en C debe ser cero, *b*) la velocidad angular correspondiente de la barra inmediatamente después de que la bala queda incrustada.

17.98 Una bala de 45 g se dispara con una velocidad de 400 m/s a un ángulo $\theta = 30°$ en un panel cuadrado cuyos lados miden $b = 200$ mm y tiene una masa de 9 kg. Si se sabe que $h = 150$ mm y que el panel está inicialmente en reposo, determine *a*) la velocidad del centro del panel inmediatamente después de que la bala queda incrustada, *b*) la reacción impulsiva en A suponiendo que la bala queda incrustada en 2 ms.

17.99 Una bala de 45 g se dispara con una velocidad de 400 m/s a un ángulo $\theta = 5°$ en un panel cuadrado cuyos lados miden $b = 200$ mm y tiene una masa de 9 kg. Si se sabe que $h = 150$ mm y que el panel está inicialmente en reposo, determine *a*) la distancia h requerida si la componente horizontal de la reacción impulsiva en A debe ser cero, *b*) la velocidad correspondiente del centro del panel inmediatamente después de que la bala queda incrustada.

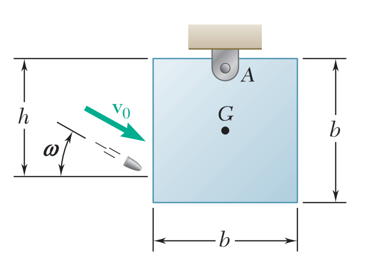


Figura P17.98 y P17.99

17.100 Un panel de madera de 8 kg está suspendido de un soporte de pasador en A y se encuentra inicialmente en reposo. Una esfera metálica de 2 kg se suelta desde el reposo en B y cae en la copa hemisférica C unida al panel en un punto localizado sobre su borde superior. Si se supone que el impacto es perfectamente plástico, determine la velocidad del centro de masa G del panel inmediatamente después del impacto.

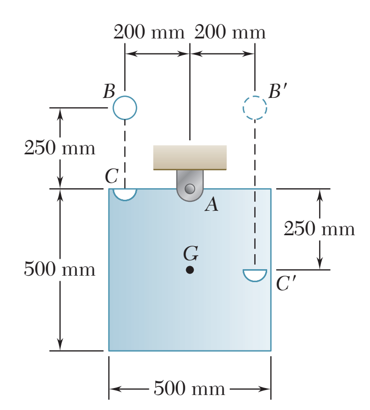


Figura P17.100 y P17-101

17.101 Un panel de madera de 8 kg está suspendido de un soporte de pasador en A y se encuentra inicialmente en reposo. Una esfera metálica de 2 kg se suelta desde el reposo en B' y cae en la copa hemisférica C' unida al panel en un punto al mismo nivel que su centro de masa G. Si se supone que el impacto es perfectamente plástico, determine la velocidad del centro de masa G del panel inmediatamente después del impacto.

17.102 El engrane mostrado tiene un radio $R = 150$ mm y un radio de giro $\bar{k} = 125$ mm.El engrane rueda sin deslizarse con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_1$ de 3 m/s en magnitud cuando golpea un escalón de altura $h = 75$ mm. Debido a que el borde del escalón se ensambla en los dientes del engrane, no ocurre deslizamiento entre el engrane y el escalón. Suponiendo un impacto perfectamente plástico, determine la velocidad angular del engrane inmediatamente después del impacto.

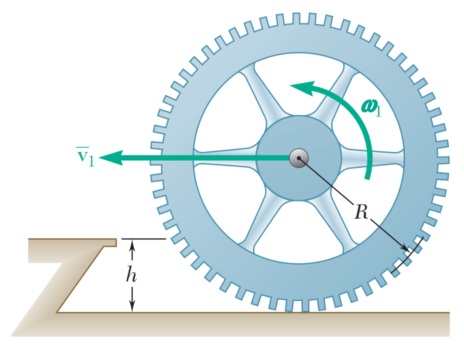


Figura P17.102

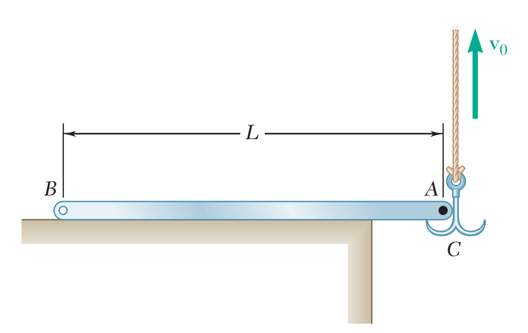


Figura *P17.103*

17.103 Una barra ligera y uniforme AB de masa m está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción cuando el gancho C se engancha en una pequeña clavija en A. Si se sabe que el gancho se jala hacia arriba con una velocidad constante $\mathbf{v}_0$, determine el impulso que se ejerce sobre la barra a) en A, b) en B. Suponga que la velocidad del gancho no cambia y que el impacto es perfectamente plástico.

17.104 Una barra delgada uniforme de longitud L y masa m está soportada por una mesa horizontal sin fricción. En un inicio, la barra gira alrededor de su centro de masa G con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$. De manera súbita el cerrojo D se mueve a la derecha y es golpeado por el extremo A de la barra. Suponiendo que el impacto de A y D es perfectamente plástico, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de masa inmediatamente después del impacto.

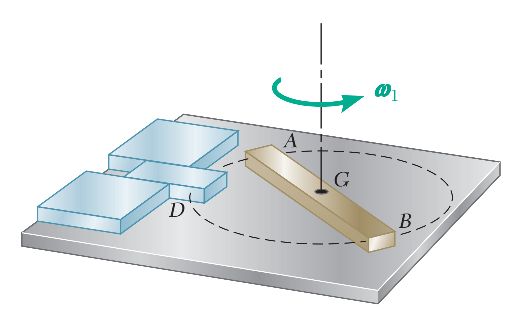


Figura *P17.104*

17.105 Retome el problema 17.104, y ahora suponga que el impacto de A y D es perfectamente plástico.

17.106 Una barra delgada y uniforme de longitud L se deja caer sobre soportes rígidos en A y B. Como el soporte B está un poco más abajo que el soporte A, la barra golpea A con una velocidad $\overline{\mathbf{v}}_1$ antes de golpear B. Si se suponen impactos perfectamente elásticos tanto en A como en B, determine la velocidad angular de la barra y su centro de masa inmediatamente después de que la barra *a*) golpea el soporte A, *b*) golpea el soporte B, *c*) golpea de nuevo el soporte A.

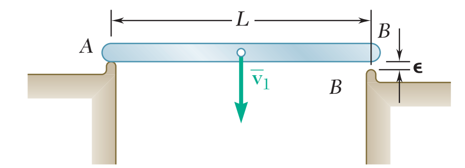


Figura P17.106

17.107 Una barra ligera y uniforme AB está en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, cuando el extremo A de la barra se golpea con un martillo que libera un impulso perpendicular a la barra. En el movimiento subsecuente, determine la distancia b que se moverá la barra cada vez que termine una revolución completa.

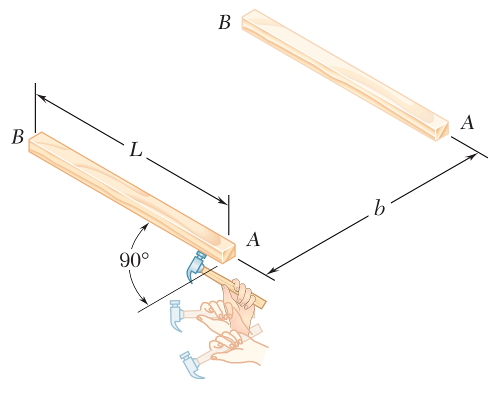


Figura P17.107

17.108 Una esfera uniforme de radio r rueda hacia abajo por la rampa que se muestra en la figura sin deslizarse. Golpea la superficie horizontal y, después de deslizarse un poco, empieza a rodar otra vez. Si se supone que la esfera no rebota cuando choca contra la superficie horizontal, determine su velocidad angular y la velocidad de su centro de masa después de que comienza a rodar de nuevo.

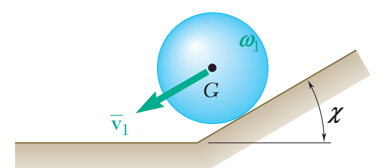


Figura P17.108

17.109 La barra ligera AB de longitud L forma un ángulo β con el eje vertical cuando hace contacto contra la superficie sin fricción que se muestra en la figura, con una velocidad $\overline{\mathbf{v}}_1$ y sin velocidad angular. Si se supone que el impacto es perfectamente elástico, obtenga una expresión para la velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto.

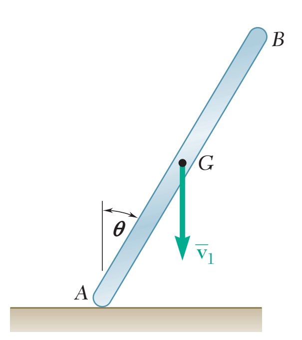


Figura *P17.109*

17.110 Retome el problema 17.109, y ahora suponga que el impacto entre la varilla AB y la superficie sin fricción es perfectamente elástico.

17.111 Una caja rectangular con carga uniforme se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Si se supone que el piso tiene la suficiente rugosidad para evitar el deslizamiento y que el impacto en B es perfectamente plástico, determine el valor mínimo de la razón a/b para la cual la esquina A permanecerá en contacto con el piso.

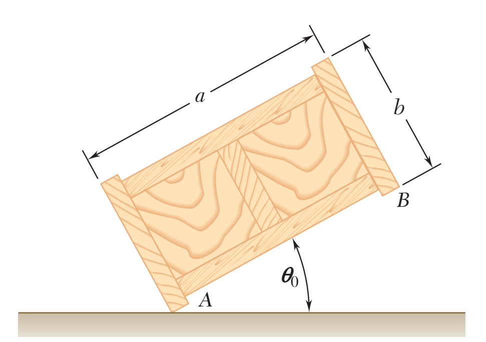


Figura *P17.111*

17.112 y 17.113 Una barra delgada uniforme AB de longitud L cae libremente con una velocidad $\mathbf{v}_0$ cuando la cuerda AC se pone tensa. Suponiendo que el impacto es perfectamente plástico, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de masa en seguida de que la cuerda se pone tensa.

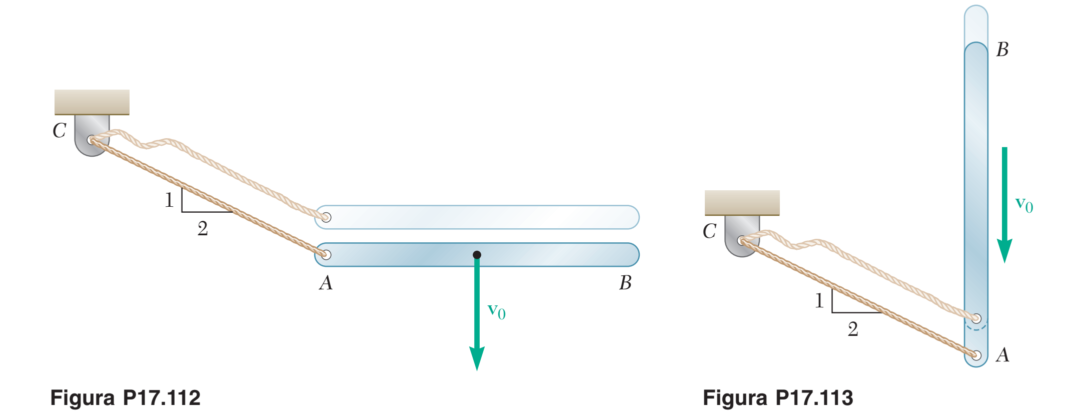


Figura P17.112 **Figura P17.113**

17.114 Una barra esbelta de longitud L y masa m se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Se observa que después de que la barra choca con la superficie vertical rebota para formar un ángulo de 30° con la vertical. *a*) Determine el coeficiente de restitución entre la perilla K y la superficie. *b*) Muestre que puede esperarse el mismo rebote para cualquier posición de la perilla K.

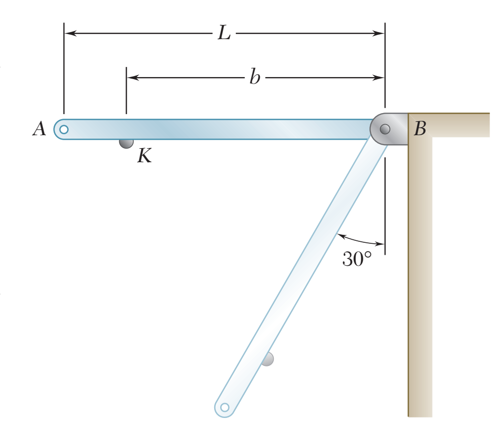


Figura P17.114

17.115 El bloque rectangular uniforme que se muestra en la figura se mueve a lo largo de una superficie sin fricción con una velocidad $\overline{\mathbf{v}}_1$ cuando golpea una pequeña obstrucción en B. Si se supone que el impacto entre la esquina A y la obstrucción B es perfectamente plástico, determine la magnitud de la velocidad $\overline{\mathbf{v}}_1$ para la cual el ángulo máximo θ a través del cual girará el bloque es de 30°.

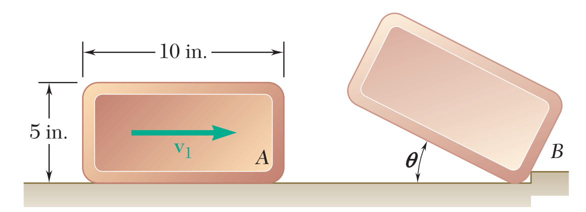


Figura P17.115

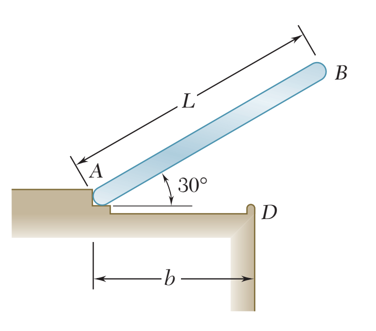


Figura P17.116

17.116 Una barra esbelta de masa m y longitud L se suelta desde el reposo en la posición mostrada y golpea el reborde D. Suponiendo un impacto perfectamente plástico en D, determine para $b = 0.6L$, *a*) la velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto, *b*) el ángulo máximo a través del cual girará la barra después del impacto.

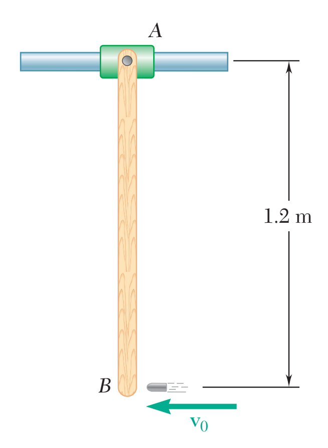


Figura P17.117

17.117 Una bala de 30 g se dispara con una velocidad horizontal de 350 m/s hacia una viga de madera *AB* de 8 kg. La viga está suspendida de un collarín de peso despreciable que puede deslizarse a lo largo de una barra horizontal. Si se desprecia la fricción entre el collarín y la barra, determine el ángulo máximo de rotación de la viga durante su movimiento subsecuente.

17.118 Para la viga del problema 17.117, determine la velocidad de la bala de 30 g para la cual el ángulo máximo de rotación de la viga será de 90°.

17.119 Un caja cuadrada cargada de manera uniforme se suelta desde el reposo con su esquina *B* directamente arriba de *A*, gira alrededor de *A* hasta que su esquina *B* golpea el suelo, y después rota alrededor de *B*. El suelo tiene la suficiente rugosidad para evitar el deslizamiento y el impacto en *B* es perfectamente plástico. Si se denota con $\boldsymbol{\omega}_0$ la velocidad angular de la caja inmediatamente después de que *B* golpea el suelo, determine *a*) la velocidad angular de la caja en seguida de que *B* golpea el suelo, *b*) la reacción de la energía cinética que pierde la caja durante el impacto, *c*) el ángulo θ que gira la caja después de que *B* golpea el suelo.

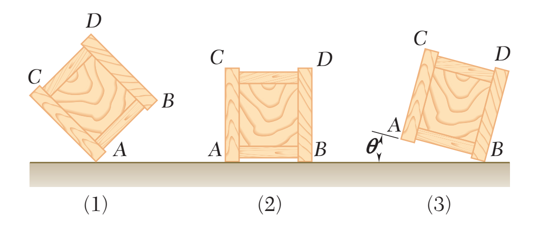


Figura *P17.119*

17.120 Una barra ligera y uniforme *AB* de longitud $L = 30$ in., se coloca con su centro equidistante de dos soportes que están localizados a una distancia $b = 5$ in. uno del otro. El extremo *B* de la barra se levanta una distancia $h_0 = 4$ in. y se suelta; la barra se balancea en los soportes de la forma que se indica. Si se supone que el impacto en cada soporte es perfectamente plástico y que no ocurre deslizamiento entre la barra y los soportes, determine *a*) la altura h_1 que alcanza el extremo *A* después del primer impacto, *b*) la altura h_2 que alcanza el extremo *B* después del segundo impacto.

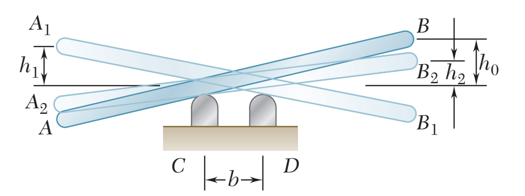


Figura P17.120

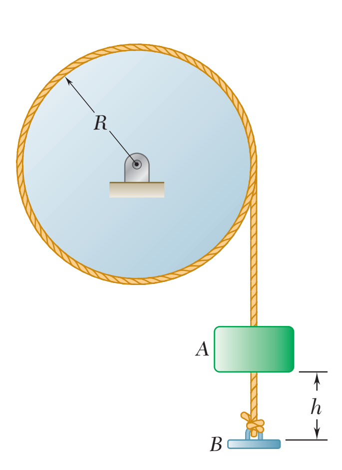


Figura P17.121

17.121 Una placa pequeña *B* está unida a una cuerda que se encuentra enrollada alrededor de un disco de 8 lb con radio $R = 9$ in. Un collarín *A* de 3 lb se suelta desde el reposo y cae una distancia $h = 15$ in. antes de golpear la placa *B*. Si se supone que el impacto es perfectamente plástico y se desprecia el peso de la placa, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad del collarín, *b*) la velocidad angular del disco.

17.122 Retome el problema 17.121, y ahora suponga que el coeficiente de restitución entre *A* y *B* es de 0.8.

17.123 Una barra ligera AB se suelta desde el reposo en la posición que se indica. Oscila hasta una posición vertical y choca contra una segunda barra idéntica CD que está en reposo sobre una superficie sin fricción. Si se supone que el coeficiente de restitución entre las barras es de 0.5, determine la velocidad de la barra CD inmediatamente después del impacto.

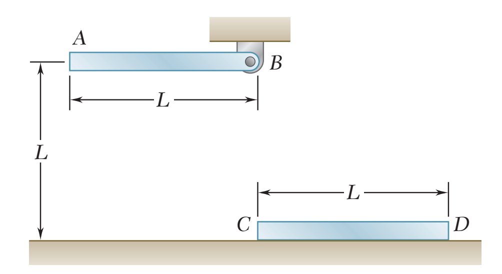


Figura P17.123

17.124 Retome el problema 17.123, y ahora suponga que el impacto es perfectamente elástico.

17.125 El tablón CDE tiene una masa 15 kg y descansa sobre un pequeño pivote en D. La gimnasta A de 55 kg está parada sobre el tablón en C cuando un gimnasta B de 70 kg salta desde una altura de 2.5 m y golpea al tablón en E. Si se supone un impacto perfectamente plástico y que la gimnasta A está de pie erguida por completo, determine la altura a la cual se elevará la gimnasta A.

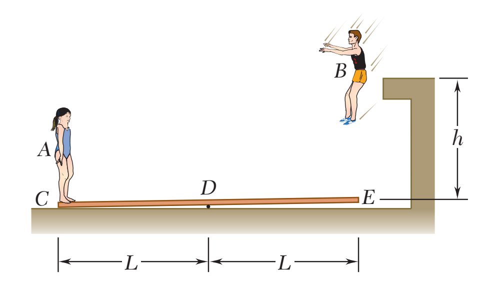


Figura P17.125

17.126 Retome el problema 17.125, y ahora suponga que los gimnastas cambian lugares de manera que la gimnasta A salta sobre el tablón y el gimnasta B permanece de pie en C.

***17.127* y 17.128** El elemento ABC tiene una masa de 2.4 kg y se encuentra atado a un soporte de pasador en B. Una esfera D de 800 g golpea el extremo ABC con una velocidad vertical $\mathbf{v}_1$ de 3 m/s. Si se sabe que $L =$ 750 mm y que el coeficiente de restitución entre la esfera y el elemento ABC es de 0.5, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular del elemento ABC, *b*) la velocidad de la esfera.

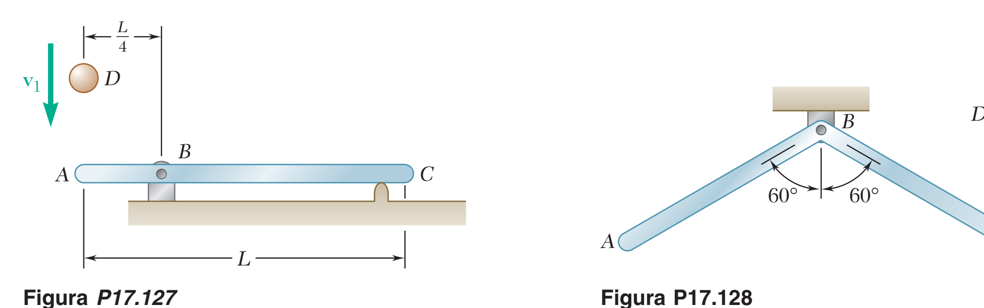


Figura *P17.127* **Figura P17.128**

17.129 Una barra esbelta CDE con longitud L y masa m está unida a un soporte de pasador en su punto medio D. Una segunda barra idéntica AB gira alrededor de un soporte de pasador en A con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ cuando su extremo B golpea el extremo C de la barra CDE. Si se denota con e el coeficiente de restitución entre las barras, determine la velocidad angular de cada barra inmediatamente después del impacto.

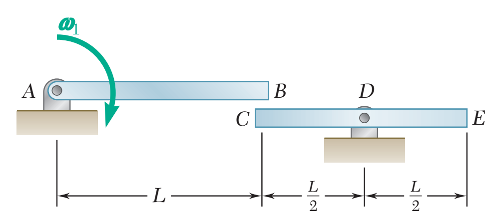


Figura *P17.129*

17.130 La barra ligera AB de 5 lb se suelta desde el reposo en la posición que se muestra y oscila hasta una posición vertical donde golpea a la barra ligera CD de 1.5 kg. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la perilla K fija en la barra a AB y la barra CD es 0.8, determine el ángulo máximo θ_m que girará la barra CD después del impacto.

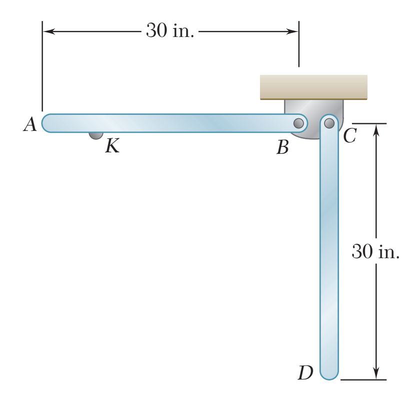


Figura *P17.130*

17.131 La esfera A de masa m y radio r rueda sin deslizarse con una velocidad $\overline{\mathbf{v}}_1$ sobre una superficie horizontal cuando choca frontalmente con una esfera idéntica B que está en reposo. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre las esferas y la superficie, se desprecia la fricción entre las esferas y se supone un impacto perfectamente elástico, determine *a*) las velocidades lineal y angular de cada esfera inmediatamente después del impacto, *b*) la velocidad de cada esfera después de que empiezan a rodar uniformemente.

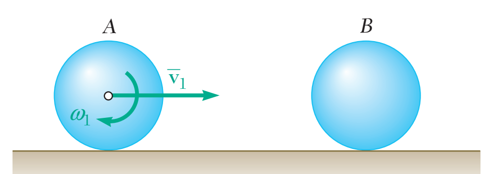


Figura P17.131

17.132 Una pequeña pelota de plástico de radio r se lanza contra un suelo rugoso con una velocidad $\overline{\mathbf{v}}_A$ de magnitud v_0 y contragiro ω_A de magnitud ω_0. Se observa que la pelota rebota de A a B, después de B a A y luego de A a B, etc. Si se supone un impacto perfectamente elástico, determine la magnitud requerida ω_0 del contragiro en términos de $\overline{v}_0$ y r.

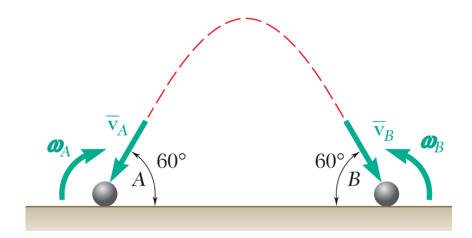


Figura P17.132

17.133 En un juego de billar, la bola A rueda sin deslizarse con una velocidad $\overline{\mathbf{v}}_0$ cuando golpea en forma oblicua a la bola B, que está en reposo. Si se denota con r el radio de cada bola y mediante μ_k el coeficiente de fricción cinética entre las bolas, y se supone un impacto perfectamente elástico, determine *a*) la velocidad lineal y angular de cada bola inmediatamente después del impacto, *b*) la velocidad de la bola B después de que ha empezado a rodar de manera uniforme.

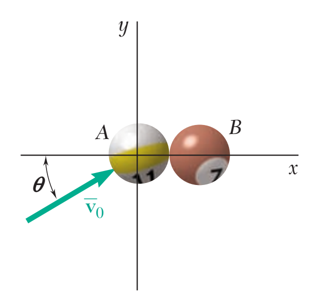


Figura P17.133

***17.134** Cada una de las barras AB y BC tiene una longitud $L = 15$ in. y un peso $W = 2.5$ lb. Determine la velocidad angular de cada barra inmediatamente después de que el impulso $\mathbf{Q}\Delta t = (0.30 \text{ lb} \cdot \text{s})\mathbf{i}$ se aplique en C.

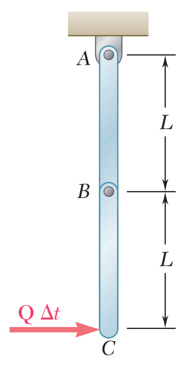


Figura P17.134

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 17

En este capítulo se consideró de nuevo el método del trabajo y la energía y el método de impulso y la cantidad de movimiento. En la primera parte del capítulo se estudió el método del trabajo de la energía y su aplicación al análisis del movimiento de cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos.

Principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido

En la sección 17.2 se expresó primero el principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido en la forma

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (17.1)$$

donde T_1 y T_2 representan los valores inicial y final de la energía cinética del cuerpo rígido y $U_{1\rightarrow 2}$ representa el trabajo de las *fuerzas externas* que actúan sobre el cuerpo rígido.

Trabajo de una fuerza o un par

En la sección 17.3 se recordó la expresión que se encontró en el capítulo 13 para el trabajo de una fuerza **F** aplicada en el punto A, a saber

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds \qquad (17.3')$$

donde F fue la magnitud de la fuerza, α el ángulo que forma con la dirección del movimiento de A, y s la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria. También se derivó la expresión para el *trabajo de un par de momento* **M** aplicado a un cuerpo rígido durante una rotación θ del cuerpo rígido:

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \qquad (17.5)$$

Energía cinética en movimiento plano

Después se obtuvo una expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano [sección 17.4]. Se escribió

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \qquad (17.9)$$

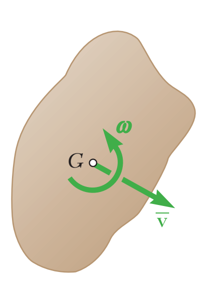


Figura 17.13

donde $\bar{v}$ es la velocidad del centro de masa G del cuerpo, ω es la velocidad angular del cuerpo e $\bar{I}$ es su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por G perpendicular al plano de referencia (figura 17.13) [problema resuelto 17.3]. Se señaló que la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano puede separarse en dos partes: 1) la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo, y 2) la energía cinética $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ asociada con la rotación del cuerpo en torno a G.

Energía cinética en rotación

Para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por O con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ se tuvo

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \qquad (17.10)$$

donde I_O fue el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje fijo. Se observó que el resultado que se obtuvo no se limita a la rotación de placas planas o de cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia, aunque es válida independientemente de la forma del cuerpo o de la ubicación del eje de rotación.

Sistemas de cuerpos rígidos

La ecuación (17.1) puede aplicarse al movimiento de sistemas de cuerpos rígidos [sección 17.5] siempre que todas las fuerzas que actúan sobre los diversos cuerpos participantes —internas así como externas al sistema— se incluyan en el cálculo de $U_{1\rightarrow2}$. Sin embargo, en el caso de sistemas compuestos por elementos conectados por pasadores o bloques y poleas conectadas mediante cuerdas inextensibles o engranes dentados, los puntos de aplicación de las fuerzas internas se mueven distancias iguales y el trabajo de estas fuerzas se cancela [problemas resueltos 17.1 y 17.2].

Conservación de la energía

Cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el principio del trabajo de energía puede expresarse en la forma

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (17.12)$$

que se conoce como el principio de la *conservación de la energía* [sección 17.6]. Es posible utilizar este principio para resolver problemas que implican fuerzas conservativas como la fuerza de la gravedad o la que ejerce un resorte [problemas resueltos 17.4 y 17.5]. Sin embargo, cuando se va a determinar una reacción, el principio de la conservación de la energía debe complementarse mediante la aplicación del principio de d'Alembert [problema resuelto 17.4].

Potencia

En la sección 17.7 se amplió el concepto de potencia a un cuerpo que gira y que está sujeto a un par; se escribió

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{M\,d\theta}{dt} = M\omega \qquad (17.13)$$

donde M es la magnitud del par y ω la velocidad angular del cuerpo.

La parte media del capítulo se dedicó al método del impulso y la cantidad de movimiento, y a su aplicación en la solución de diversos tipos de problemas que incluyen el movimiento plano de placas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia.

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para un cuerpo rígido

Se recordó primero el principio del *impulso y la cantidad de movimiento* en la forma en que se dedujo en la sección 14.9 para un sistema de partículas y se aplicó al *movimiento de cuerpo rígido* [sección 17.8]. Se escribió

$$\textbf{Cant. Mov. Sist.}_1 + \textbf{Imp. Ext. Sist.}_{1\rightarrow2} = \textbf{Cant. Mov. Sist.}_2 \qquad (17.14)$$

A continuación se demostró que para una placa rígida o un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, el sistema de las cantidades de movimiento de las partículas que forman el cuerpo es equivalente a un vector $m\bar{\mathbf{v}}$ conectado con su punto de aplicación en el centro de masa G del cuerpo y un par $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ (figura 17.14). El vector

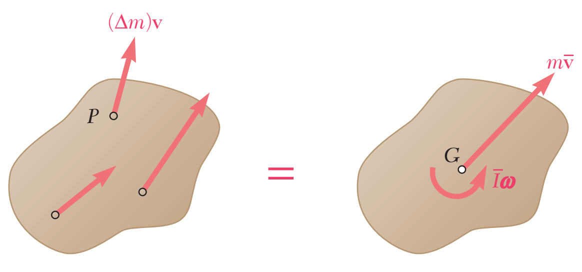


Figura 17.14

$m\bar{\mathbf{v}}$ se asocia con la traslación del cuerpo con G y representa la *cantidad de movimiento lineal* del cuerpo, en tanto que el par $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ corresponde a la rotación del cuerpo alrededor de G y representa la *cantidad de movimiento angular* del cuerpo alrededor de un eje que pasa por G.

La ecuación (17.14) puede expresarse en forma gráfica como se muestra en la figura 17.15 dibujando tres diagramas que representen, respectivamente, al sistema de las cantidades de movimiento iniciales del cuerpo, los impulsos de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y el sistema de las cantidades de movimiento finales del cuerpo.

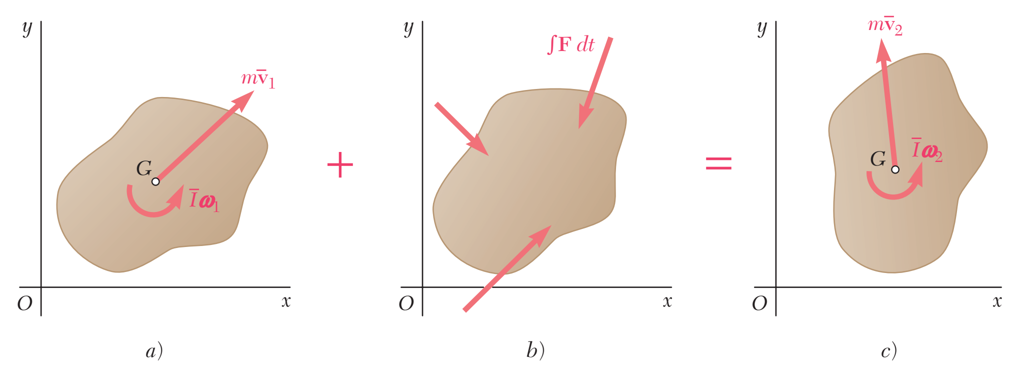


Figura 17.15

Al sumar e igualar de manera respectiva las *componentes x*, las *componentes y* y los *momentos alrededor de cualquier punto dado* de los vectores que se indican en la figura, se obtienen tres ecuaciones de movimiento que pueden resolverse respecto a las incógnitas deseadas [problemas resueltos 17.6 y 17.7].

En problemas que tienen que ver con varios cuerpos rígidos conectados [sección 17.9], cada cuerpo puede considerarse de manera separada [problema resuelto 17.6], o, si no intervienen más de tres incógnitas, es posible aplicar el principio del impulso y la can-

tidad de movimiento al sistema completo, considerando sólo los impulsos de las fuerzas externas [problema resuelto 17.8].

Conservación de la cantidad de movimiento angular

Cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de cuerpos rígidos pasa por un punto O, se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de O [sección 17.10]. Se sugirió que los problemas que implican la conservación de la cantidad de movimiento angular se resuelvan con el método general que se describió antes [problema resuelto 17.8].

Movimiento impulsivo

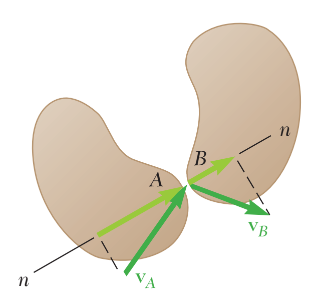
La última parte del capítulo se dedicó al *movimiento impulsivo* y al *impacto excéntrico* de cuerpos rígidos. De la sección 17.11 se recordó que el método del impulso de la cantidad de movimiento es el único método práctico para la solución de problemas que implican el movimiento impulsivo, y que el cálculo de impulso en tales problemas es en particular simple [problema resuelto 17.9].

Impacto excéntrico

En la sección 17.12 se recordó que el impacto excéntrico de dos cuerpos rígidos se define como un impacto en el cual los centros de masa de los cuerpos que chocan *no* se localizan sobre la línea de impacto. Se demostró que en una situación de este tipo se sigue cumpliendo una relación similar a la que se dedujo en el capítulo 13 para el impacto central de dos partículas y en la que interviene el coeficiente de restitución e, pero que *se deben usar las velocidades de los puntos A y B donde ocurre el contacto durante el impacto.* En consecuencia

$$(v_B')_n - (v_A')_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \qquad (17.19)$$

donde $(v_A)_n$ y $(v_B)_n$ son las componentes a lo largo de la línea de impacto de las velocidades de A y B antes del impacto, y $(v_A')_n$ y $(v_B')_n$ son sus componentes después del impacto (figura 17.16). La



a) Antes del impacto

b) Después del impacto

Figura 17.16

ecuación (17.19) es aplicable no sólo cuando los cuerpos que chocan se mueven con libertad después del impacto, sino también cuando están parcialmente restringidos en su movimiento. Debe usarse junto con una o varias ecuaciones obtenidas al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento [problema resuelto 17.10]. También se consideró un problema donde es posible combinar el método del impulso y la cantidad de movimiento, y el método de trabajo y la energía [problema resuelto 17.11].

Problemas de repaso

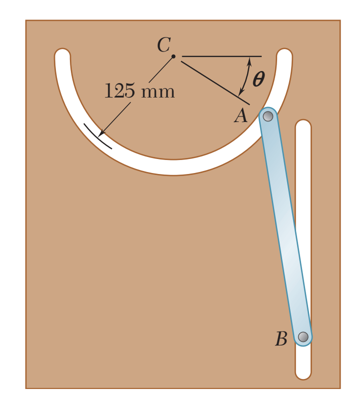


Figura P17.135

17.135 El movimiento de la varilla delgada *AB* de 250 mm se guía mediante pasadores en *A* y *B* que se deslizan libremente por ranuras cortadas en una placa vertical, como se muestra en la figura. Si la barra tiene una masa de 2 kg y se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, determine las reacciones en *A* y *B* cuando $\theta = 90°$.

17.136 Un disco uniforme de grosor constante y que se encuentra inicialmente en reposo se pone en contacto con la banda mostrada, la cual se mueve a una velocidad constante $v = 25$ m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es de 0.15, determine *a*) el número de revoluciones ejecutadas por el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante, *b*) el tiempo requerido para que el disco alcance esa velocidad angular constante.

17.137 Retome el problema 17.136, y ahora suponga que la dirección del movimiento de la banda se invierte.

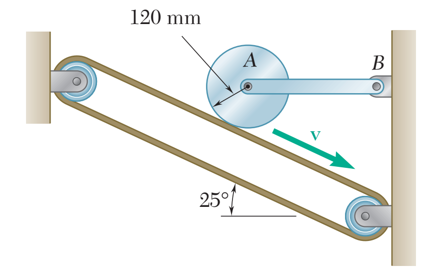


Figura P17.136

17.138 Una barra esbelta uniforme se coloca en la esquina *B* y se le imprime un pequeño movimiento en el sentido de las manecillas del reloj. Si se supone que la esquina es afilada y se incrusta ligeramente en el extremo de la barra, de manera que el coeficiente de fricción estática en *B* es muy grande, determine *a*) el ángulo β que habrá girado la barra ciando cuando pierda contacto con la esquina, *b*) la velocidad correspondiente del extremo *A*.

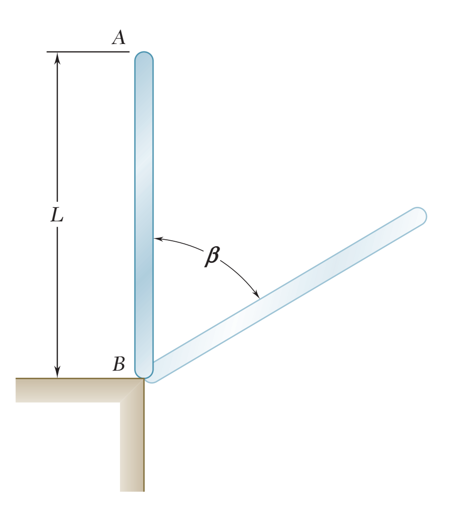


Figura P17.138

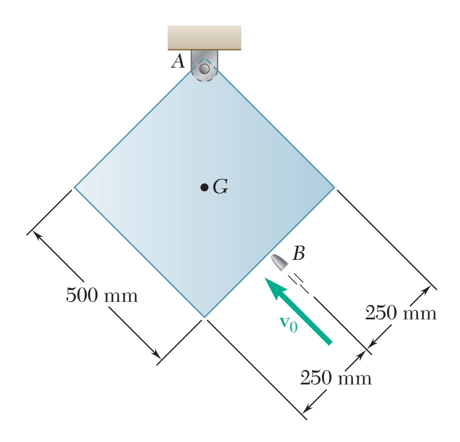


Figura P17.139

17.139 Una bala de 35 g se dispara con una velocidad de 400 m/s hacia uno de los lados del panel cuadrado que cuelga de un pasador en *A*, como se muestra en la figura. Si el panel está inicialmente en reposo, determine las componentes de la reacción en *A* después de que el panel ha girado 90°.

17.140 Un bloque cuadrado de masa m cae con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_1$ cuando golpea una pequeña obstrucción en B. Si se supone que el impacto entre la esquina A y la obstrucción B es perfectamente plástica, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular del bloque, *b*) la velocidad de su centro de masa G.

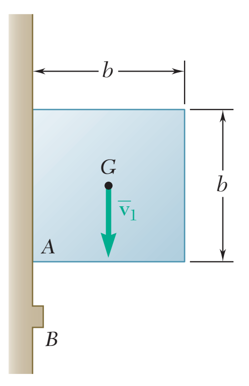


Figura ***P17.140***

17.141 Retome el problema 17.140, y ahora suponga que el impacto entre la esquina A y la obstrucción B es perfectamente elástico.

17.142 Una barra AB de 3 kg está unida mediante un pasador en D a una placa cuadrada de 4 kg, la cual puede girar libremente alrededor de un eje vertical. Si la velocidad angular de la placa es de 120 rpm cuando la barra está en posición vertical, determine *a*) la velocidad angular de la placa después de que la barra haya oscilado hasta una posición horizontal y después haya llegado al reposo contra el pasador C, *b*) la energía perdida durante el impacto plástico en C.

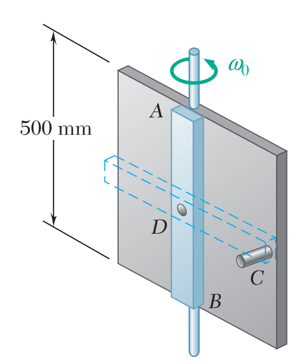


Figura ***P17.142***

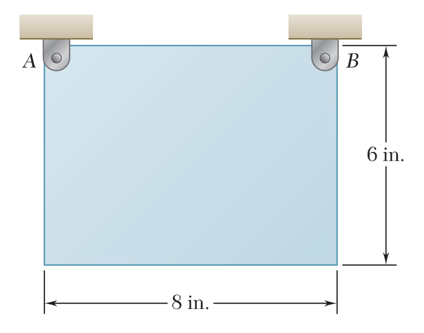


Figura P17.143

17.143 Una placa rectangular de 6 × 8 in. se suspende mediante pasadores en A y B. El pasador en B se retira y la placa oscila libremente alrededor del pasador A. Determine *a*) la velocidad angular de la placa después de que haya girado 90°, *b*) la velocidad angular máxima alcanzada por la placa mientras oscila libremente.

17.144 Los discos A y B están hechos del mismo material y tienen el mismo grosor; pueden girar libremente alrededor del eje vertical. El disco B se encuentra en reposo cuando se deja caer sobre el disco A, el cual gira con una velocidad angular de 500 rpm. Si el disco A pesa 18 lb, determine *a*) la velocidad angular final de los discos, *b*) el cambio en la energía cinética del sistema.

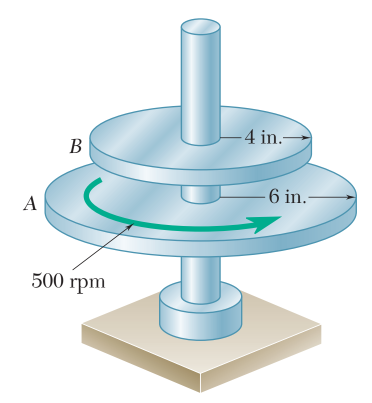


Figura ***P17.144***

17.145 ¿A qué altura h sobre su centro G debe golpearse con un taco y de manera horizontal la bola de billar mostrada si debe comenzar a rodar sin deslizarse?

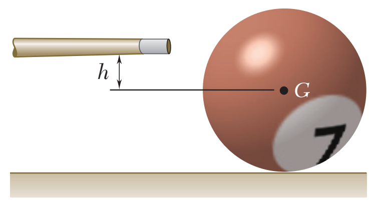


Figura P17.145

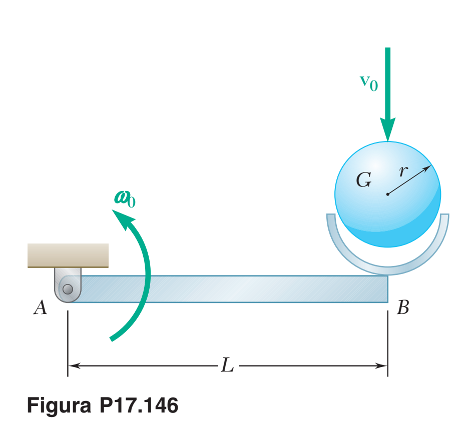


Figura P17.146

17.146 Una esfera grande de 3 lb con un radio $r = 3$ in. se lanza hacia una canasta ligera al extremo de una barra delgada y uniforme que pesa 2 lb y tiene una longitud $L = 10$ in., como se muestra en la figura. Inmediatamente antes del impacto, la velocidad angular de la barra es de 3 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj y la velocidad de la esfera es de 2 ft/s hacia abajo. Suponga que la esfera se incrusta en la canasta. Determine después del impacto *a*) la velocidad angular de la barra y la esfera, *b*) las componentes de las reacciones en A.

Problemas de computadora

17.C1 La barra AB tiene una masa de 3 kg y se conecta en A a un carro C de 5 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30°$ y se desprecia la fricción, utilice software para calcular la velocidad del carro y la velocidad del extremo B de la barra para valores de θ de $+30°$ a $-90°$. Determine el valor de θ para el cual la velocidad del carro hacia la izquierda es máxima y el valor correspondiente de la velocidad.

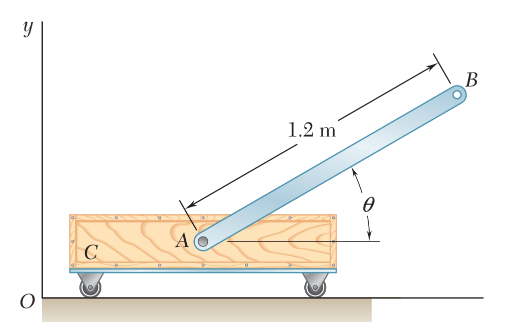


Figura P17.C1

17.C2 La barra ligera y uniforme AB de longitud $L = 800$ mm y masa de 5 kg descansa sobre una pequeña rueda en D y está conectada a un collarín de masa despreciable que puede deslizarse con libertad sobre la barra vertical EF. Si $a = 200$ mm y la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, utilice software para calcular y graficar la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo A para valores de θ desde 0 hasta 50°. Determine la velocidad angular máxima de la barra y el valor correspondiente de θ.

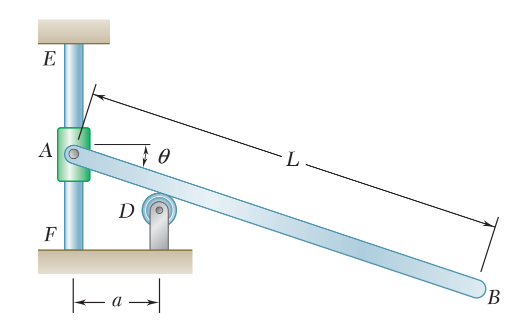


Figura P17.C2

17.C3 Una esfera uniforme de 10 in. de radio rueda sobre una serie de barras horizontales paralelas separadas por el mismo espacio d. Cuando rueda sin deslizarse alrededor de una barra determinada, la esfera choca con la siguiente barra y empieza a rotar alrededor de ella sin deslizarse, hasta que hace contacto con la siguiente barra, y así sucesivamente. Si se supone un impacto perfectamente plástico y se sabe que la esfera tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0$ de 1.5 rad/s cuando su centro de masa G está directamente arriba de la barra A, utilice software para calcular, respecto a valores de d desde 1 hasta 6 in., *a*) la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ de la esfera cuando G pasa directamente arriba de la barra B, *b*) el número de barras sobre las cuales la esfera rodará después de dejar la barra A.

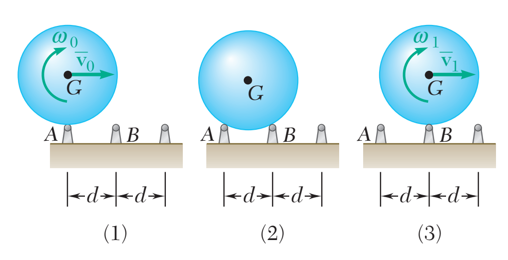


Figura P17.C3

17.C4 El collarín C tiene una masa de 2.5 kg y puede deslizarse sin fricción sobre la barra AB. Un resorte de constante de 750 N/m y longitud no deformada $r_0 = 500$ mm se conecta en la forma mostrada al collarín y al eje B. Se sabe que el momento de inercia de la masa total de la barra, el eje y el resorte corresponde a 0.3 kg · m^2 alrededor de B. Al principio el collarín se mantiene a una distancia de 500 mm desde el eje de rotación mediante un pequeño pasador que sobresale en la barra. El pasador se quita de repente cuando el mecanismo está girando en un plano horizontal con velocidad angular ω_0 de 10 rad/s. Si se denota con r la distancia del collarín desde el eje de rotación, utilice software para calcular y graficar la velocidad angular del mecanismo y la velocidad del collarín relativa a la barra para valores de r desde 500 hasta 700 mm. Determine el valor máximo de r en el movimiento resultante.

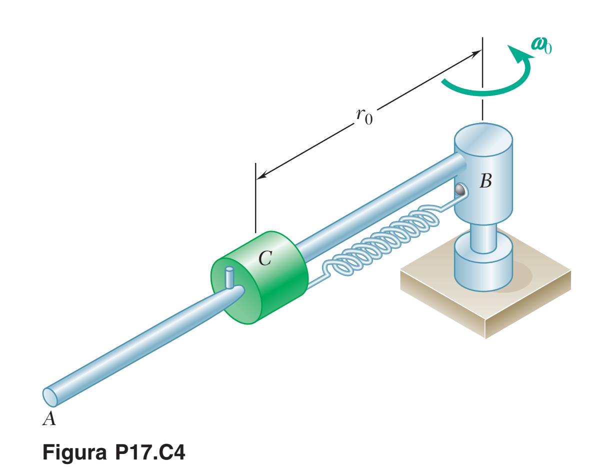


Figura P17.C4

17.C5 Cada una de las dos barras ligeras e idénticas que se muestran tiene una longitud $L = 30$ in. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando las barras están horizontales, utilice software para calcular y graficar la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del punto AB para valores de θ desde 0 hasta 90°.

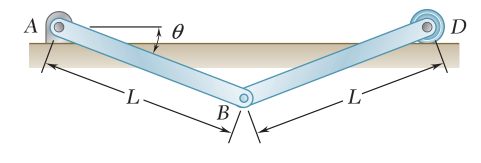


Figura P17.C5

Si bien los principios generales que se han aprendido en los capítulos anteriores pueden utilizarse de nuevo para resolver problemas que implican el movimiento en tres dimensiones de cuerpos rígidos, la resolución de dichos problemas requiere de un enfoque distinto y resulta considerablemente más amplia que la resolución de problemas bidimensionales. Un ejemplo es la determinación de las fuerzas que actúan sobre el brazo robótico de un transbordador espacial.



CAPÍTULO 18

Cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones



CAPÍTULO 18 CINÉTICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES

*18.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos 16 y 17 se estudió el movimiento plano de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos. En el capítulo 16 y en la segunda mitad del capítulo 17 (método de la cantidad de movimiento), nuestro estudio se limitó aún más a las placas planas y de cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia. Sin embargo, muchos de los resultados fundamentales que se obtuvieron en esos dos capítulos siguen siendo válidos en el caso del movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones.

Por ejemplo, las dos ecuaciones fundamentales

$$\Sigma \mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

sobre las cuales se basó el análisis del movimiento plano de un cuerpo rígido siguen siendo válidas en el caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. Como se indicó en la sección 16.2, estas ecuaciones expresan que el sistema de las fuerzas externas es equipolente al sistema consistente en el vector $m\overline{\mathbf{a}}$ fijo en G y al par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.1).

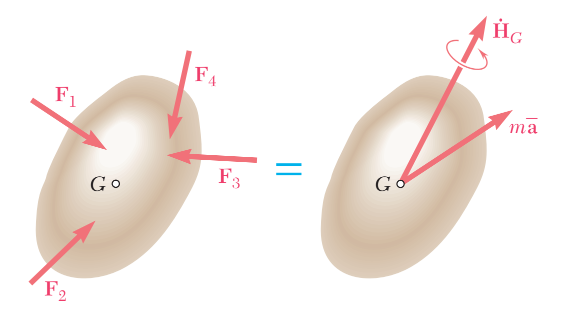


Figura 18.1

Sin embargo, la relación $\mathbf{H}_G = \overline{I}\boldsymbol{\omega}$, la cual permitió determinar la cantidad de movimiento angular de una placa rígida y que desempeña una parte importante en la solución de problemas que implican el movimiento plano de placas y cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia, deja de ser válida en el caso de cuerpos no simétricos o movimiento en tres dimensiones. En consecuencia, en la primera parte del capítulo, en la sección 18.2, se formula un método más general para calcular la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de un cuerpo rígido en tres dimensiones.

Asimismo, si bien la característica principal del método del impulso-cantidad de movimiento que se analizó en la sección 17.7, esto es, la reducción de cantidad de movimiento de las partículas de un cuerpo rígido a un vector de movimiento lineal $m\overline{\mathbf{v}}$ fijo al centro de masa G del cuerpo y un par de cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$, sigue siendo válida, la relación $\mathbf{H}_G = \overline{I}\boldsymbol{\omega}$ debe descartarse y sustituirse por la relación más general que se formula en la sección 18.2 antes de que este método pueda aplicarse al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido (sección 18.3).

También se advirtió que el principio del trabajo y la energía (sección 17.2) y el principio de la conservación de la energía (sección 17.6) continúan aplicándose en el caso del movimiento de un cuerpo rígido

en tres dimensiones. Sin embargo, la expresión que se obtuvo en la sección 17.4 para la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano será sustituida por una nueva expresión desarrollada en la sección 18.4 para un cuerpo rígido en movimiento tridimensional.

En la segunda parte del capítulo se aprenderá a determinar la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo rígido tridimensional, utilizando un sistema de referencia rotatorio con respecto al cual los momentos y los productos de inercia del cuerpo permanecen constantes (sección 18.5). Las ecuaciones (18.1) y (18.2) se expresarán entonces en forma de ecuaciones de diagramas de cuerpo libre, las cuales pueden utilizarse para resolver diversos problemas que implican movimiento tridimensional de cuerpos rígidos (secciones 18.6 a 18.8).

La última parte del capítulo (secciones 18.9 a 18.11) se dedica al estudio del movimiento del giroscopio o, de manera más general, de un cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo localizado sobre su eje de simetría. En la sección 18.10 se considera el caso particular de la precesión continua de un giroscopio y, en la sección 18.11, se analiza el movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje que no está sujeto a alguna fuerza, salvo su propio peso.

*18.2. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

En esta sección se puede observar cómo la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de un cuerpo alrededor de su centro de masa G puede determinarse a partir de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo en el caso de movimiento tridimensional.

De acuerdo con la ecuación (14.24), la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de G puede expresarse como

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \, \Delta m_i) \tag{18.3}$$

donde $\mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{v}'_i$ denotan, respectivamente, el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i, de masa Δm_i, relativa al sistema de referencia centroidal $Gxyz$ (figura 18.2). Pero $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la ve-

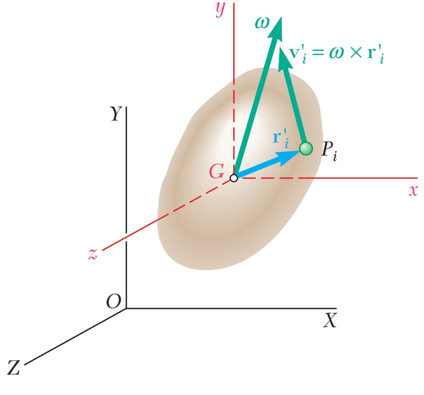


Figura 18.2

locidad angular del cuerpo en el instante considerado. Al sustituir en (18.3), se tiene

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)\, \Delta m_i]$$

Si se recuerda la regla para determinar las componentes rectangulares de un producto vectorial (sección 3.5), se obtiene la siguiente expresión para la componente x de la cantidad de movimiento angular

$$\begin{aligned} H_x &= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_z - z_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_y]\, \Delta m_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)]\, \Delta m_i \\ &= \omega_x \sum_i (y_i^2 + z_i^2)\, \Delta m_i - \omega_y \sum_i x_i y_i\, \Delta m_i - \omega_z \sum_i z_i x_i\, \Delta m_i \end{aligned}$$

Al sustituir las sumas por integrales en esta expresión y en las dos expresiones similares que se obtienen para H_y y H_z se tiene

$$\begin{aligned} H_x &= \omega_x \int (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int zx\, dm \\ H_y &= -\omega_x \int xy\, dm + \omega_y \int (z^2 + x^2)\, dm - \omega_z \int yz\, dm \\ H_z &= -\omega_x \int zx\, dm - \omega_y \int yz\, dm + \omega_z \int (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \tag{18.4}$$

Se puede observar que las integrales contienen cuadrados que representan, respectivamente, los *momentos de inercia centroidales* del cuerpo alrededor de los ejes x, y y z (sección 9.11); se tiene

$$\bar{I}_x = \int (y^2 + z^2)\, dm \qquad \bar{I}_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \qquad \bar{I}_z = \int (x^2 + y^2)\, dm \tag{18.5}$$

De manera similar, las integrales contienen productos de coordenadas que representan los *productos de inercia de masa centroidales* del cuerpo (sección 9.16); se tiene

$$\bar{I}_{xy} = \int xy\, dm \qquad \bar{I}_{yz} = \int yz\, dm \qquad \bar{I}_{zx} = \int zx\, dm \tag{18.6}$$

Al sustituir de (18.5) y (18.6) en (18.4), se obtienen las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo alrededor de su centro de masa

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x \omega_x - \bar{I}_{xy} \omega_y - \bar{I}_{xz} \omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx} \omega_x + \bar{I}_y \omega_y - \bar{I}_{yz} \omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx} \omega_x - \bar{I}_{zy} \omega_y + \bar{I}_z \omega_z \end{aligned} \tag{18.7}$$

Las relaciones (18.7) muestran que la operación que transforma al vector $\boldsymbol{\omega}$ en el vector $\mathbf{H}_G$ (figura 18.3) se caracteriza por el arreglo de momentos y productos de inercia

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_x & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ -\bar{I}_{yx} & \bar{I}_y & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{I}_{zx} & -\bar{I}_{zy} & \bar{I}_z \end{pmatrix} \tag{18.8}$$

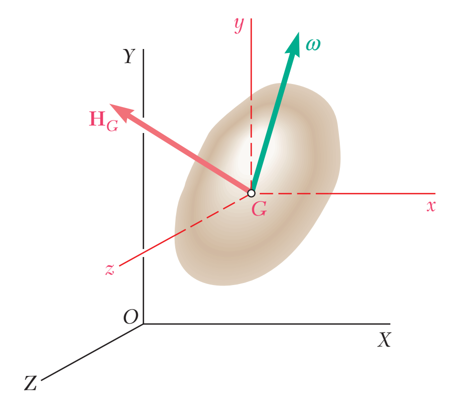


Figura 18.3

El arreglo (18.8) define al *tensor de inercia* del cuerpo en su centro de masa G.[†] Se obtendría un nuevo arreglo de momentos y productos de inercia si se usara un sistema de ejes diferente. La transformación caracterizada por este nuevo arreglo, sin embargo, seguiría siendo la misma. Es claro, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ correspondiente a una velocidad angular dada $\boldsymbol{\omega}$ es independiente de la elección de los ejes de coordenadas. Como se mostró en las secciones 9.17 y 9.18, siempre es posible seleccionar un sistema de ejes $Gx'y'z'$, denominados *ejes principales de inercia,* con respecto a los cuales todos los productos de inercia de un cuerpo dado son cero. El arreglo (18.8) toma la forma diagonalizada

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{z'} \end{pmatrix} \tag{18.9}$$

donde $\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$ representan los *momentos de inercia centroidales principales* del cuerpo, y las relaciones (18.7) se reducen a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

Adviértase que si los tres momentos de inercia centroidales principales $\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$ son iguales, las componentes $H_{x'}, H_{y'}, H_{z'}$ de la cantidad de movimiento angular alrededor de G son proporcionales a las componentes $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$ de la velocidad angular, y los vectores $\mathbf{H}_G$ y $\boldsymbol{\omega}$ son colineales. Sin embargo, en general los momentos de inercia principales serán diferentes y los vectores $\mathbf{H}_G$ y $\boldsymbol{\omega}$ *tendrán direcciones diferentes,* salvo cuando dos de las tres componentes de $\boldsymbol{\omega}$ sean cero, esto es, cuando $\boldsymbol{\omega}$ apunte a lo largo de uno de los ejes de coordenadas. Por consiguiente, *la cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_G$ *de un cuerpo rígido y su velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *tienen la misma dirección si, y sólo si,* $\boldsymbol{\omega}$ *está dirigido a lo largo de un eje principal.*[‡]

[†]Con $\bar{I}_x = I_{11}$, $\bar{I}_y = I_{22}$, $\bar{I}_z = I_{33}$, y $-\bar{I}_{xy} = I_{12}$, $-\bar{I}_{xz} = I_{13}$, etc., es posible escribir el tensor de inercia (18.8) en la forma estándar

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Si se denota mediante H_1, H_2, H_3 las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ y mediante $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, se pueden escribir las relaciones (18.7) en la forma

$$H_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

donde i y j toman los valores 1, 2, 3. Se afirma que las cantidades I_{ij} son las *componentes* del tensor de inercia. Puesto que $I_{ij} = I_{ji}$, el tensor de inercia es un *tensor simétrico de segundo orden*.

[‡]En el caso particular en el que $\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = \bar{I}_{z'}$, cualquier línea que pase por G puede considerarse como un eje principal de inercia y los vectores $\mathbf{H}_G$ y $\boldsymbol{\omega}$ siempre son colineales.

Puesto que esta condición se satisface en el caso de movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, en las secciones 16.3 y 17.8 se representó la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de un cuerpo de este tipo por el vector $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Sin embargo, se debe reconocer que este resultado no puede extenderse al caso del movimiento plano de un cuerpo no simétrico, o al del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Excepto cuando $\boldsymbol{\omega}$ esté dirigida a lo largo de un eje principal de inercia, la cantidad de movimiento angular y la velocidad angular de un cuerpo rígido tiene direcciones diferentes, y la relación (18.7) o (18. 10) debe usarse para determinar $\mathbf{H}_G$ a partir de $\boldsymbol{\omega}$.



Fotografía 18.1 El diseño de un sistema robótico de soldadura para una línea de ensamble de automóviles requiere un estudio tridimensional tanto de cinemática como de cinética.

Reducción de las cantidades de movimiento de las partículas de un cuerpo rígido a un vector de cantidad de movimiento y a un par en *G*. En la sección 17.8 se trató que el sistema formado por la cantidad de movimiento de las diversas partículas de un cuerpo rígido puede reducirse a un vector $\mathbf{L}$ fijo al centro de masa G del cuerpo, que representa la cantidad de movimiento lineal del cuerpo, y a un par $\mathbf{H}_G$, que representa a la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de G (figura 18.4). Ahora está la posibilidad de determinar el vector $\mathbf{L}$ y el par $\mathbf{H}_G$ en el caso más general del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Como en el caso del movimiento bidimensional considerado en la sección 17.8, la cantidad de movimiento lineal $\mathbf{L}$ del cuerpo es igual al producto $m\bar{\mathbf{v}}$ de su masa m y la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ de su centro de masa G. Sin embargo, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ ya no puede obtenerse multiplicando simplemente la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo por el escalar $\bar{I}$; ahora deben obtenerse de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y de los momentos y productos de inercia centroidales del cuerpo mediante el uso de la ecuación (18.7) o (18.10).

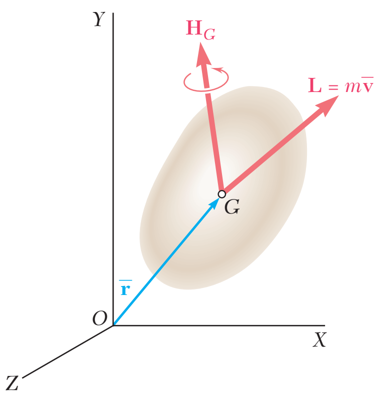
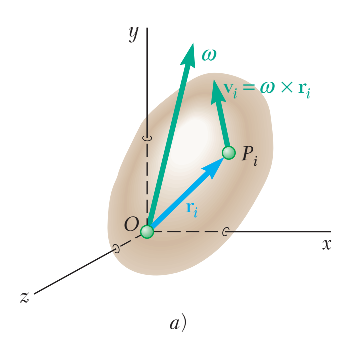


Figura 18.4

Hay que observar que una vez que se ha determinado la cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de un cuerpo rígido, su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ alrededor de cualquier punto dado O puede obtenerse sumando las cantidades de movimiento alrededor de O del vector $m\bar{\mathbf{v}}$ y del par $\mathbf{H}_G$. Se escribe

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \tag{18.11}$$

Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un punto fijo. En el caso particular de un cuerpo rígido restringido a girar en el espacio tridimensional alrededor de un punto fijo O (figura 18.5*a*), a veces resulta conveniente



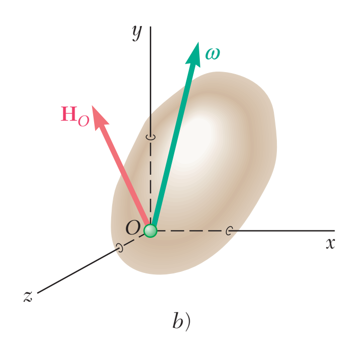


Figura 18.5

determinar la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor del punto fijo O. Si bien $\mathbf{H}_O$ podría obtenerse calculando primero $\mathbf{H}_G$ como se indicó antes y utilizando después la ecuación (18.11), en muchas ocasiones es ventajoso determinar $\mathbf{H}_O$ directamente de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo y de sus momentos y productos de inercia con respecto al sistema de referencia $Oxyz$ centrado en el punto fijo O. Si se recuerda la ecuación (14.7), se escribe

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i\, \Delta m_i) \tag{18.12}$$

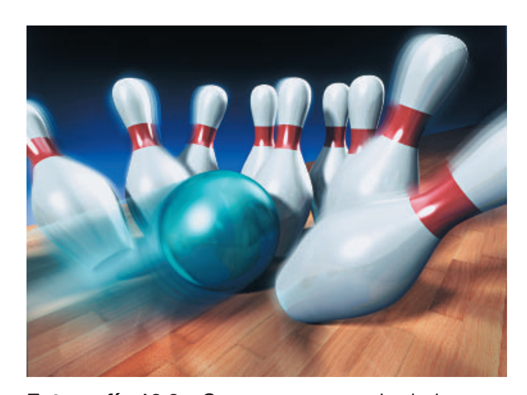
donde $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{v}_i$ denotan, respectivamente, el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i con respecto al sistema de referencia fijo $Oxyz$. Al sustituir $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, y después de realizar manipulaciones similares a las que se usaron en la parte anterior de esta sección, se encontró que las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ (figura 18.5*b*) están dadas por las relaciones

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \end{aligned} \tag{18.13}$$

donde los momentos de inercia I_x, I_y, I_z y los productos de inercia I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} se calculan con respecto al sistema de referencia $Oxyz$ centrado en el punto fijo O.

*18.3. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO AL MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

Antes de que sea posible aplicar la ecuación fundamental (18.2) a la solución de problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, se debe aprender a calcular la derivada del vector $\mathbf{H}_G$. Esto se hará en la sección 18.5. Los resultados que se obtuvieron en la sección anterior pueden, sin embargo, utilizarse de manera directa para resolver problemas mediante el método del impulso y la cantidad de movimiento.



Fotografía 18.2 Como consecuencia de la fuerza impulsiva aplicada mediante una bola de boliche, un pino adquiere tanto cantidad de movimiento lineal como cantidad de movimiento angular.

Si se recuerda que el sistema formado por la cantidad de movimiento de las partículas de un cuerpo rígido se reduce al vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ fijo en el centro de masa G del cuerpo y a un par de cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$, se representa gráficamente la relación fundamental

$$\textbf{Cant. Mov. Sist.}_1 + \textbf{Imp. Ext. Sist.}_{1\rightarrow 2} = \textbf{Cant. Mov. Sist.}_2 \qquad (17.4)$$

mediante los tres dibujos que se presentan en la figura 18.6. Para resolver un problema determinado, es posible utilizar estos dibujos para es-

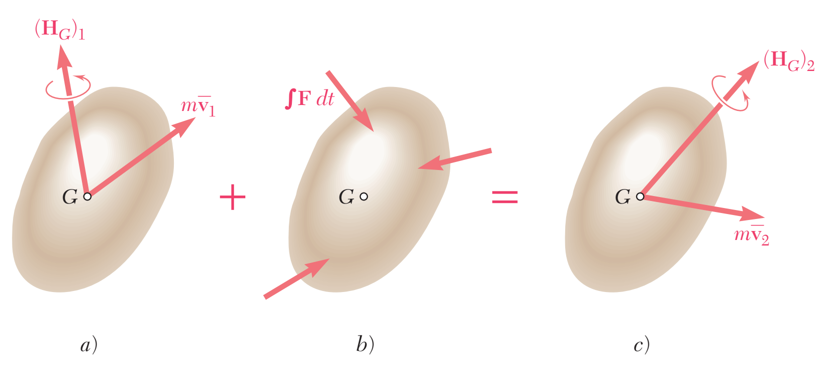


Figura 18.6

cribir componentes y ecuaciones de momento apropiadas, teniendo presente que las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ se relacionan con las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ mediante las ecuaciones (18.7) de la sección precedente.

Al resolver problemas que tienen que ver con el movimiento de un cuerpo que gira alrededor de un punto fijo O, resultará conveniente eliminar el impulso de la reacción en O al escribir una ecuación que incluya los momentos de las cantidades de movimiento e impulsos con respecto a O. Recuérdese que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor del punto fijo O puede obtenerse directamente de las ecuaciones (18.13) o calculando primero su cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y su momento angular $\mathbf{H}_G$ y utilizando después la ecuación (18.11).

*18.4. ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

Considere un cuerpo rígido de masa m en movimiento tridimensional. Recuerde de la sección 14.6 que si la velocidad absoluta $\mathbf{v}_i$ de cada partícula P_i del cuerpo se expresa como la suma de la velocidad $\bar{\mathbf{v}}$ del centro de masa G del cuerpo y de la velocidad $\mathbf{v}'_i$ de la partícula relativa al sistema de referencia $Gxyz$ con origen en G y de orientación fija (figura 18.7), la energía cinética del sistema de partículas que forman al cuerpo rígido puede escribirse en la forma

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i'^2 \qquad (18.14)$$

donde el último término representa la energía cinética T' del cuerpo relativa al sistema de referencia centroidal $Gxyz$. Puesto que $v'_i = |\mathbf{v}'_i| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|$, se escribe

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|^2\, \Delta m_i$$

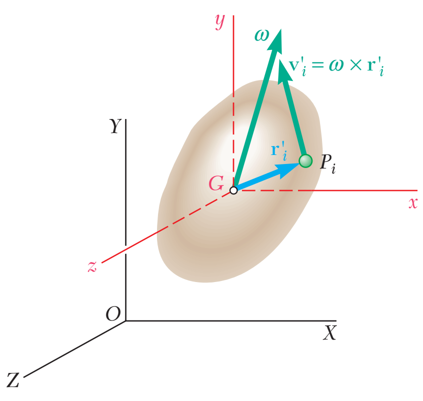


Figura 18.7

Al expresar el cuadrado en términos de componentes rectangulares del producto vectorial y sustituir las sumas por integrales, se tiene

$$\begin{aligned} T' &= \tfrac{1}{2}\int[(\omega_x y - \omega_y x)^2 + (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2]\, dm \\ &= \tfrac{1}{2}[\omega_x^2\int(y^2 + z^2)\, dm + \omega_y^2\int(z^2 + x^2)\, dm + \omega_z^2\int(x^2 + y^2)\, dm \\ &\qquad - 2\omega_x\omega_y\int xy\, dm - 2\omega_y\omega_z\int yz\, dm - 2\omega_z\omega_x\int zx\, dm] \end{aligned}$$

o, al recordar las relaciones (18.5) y (18.6),

$$T' = \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \tag{18.15}$$

Si se sustituye en (18.14) la expresión (18.15) que se acaba de obtener para la energía cinética del cuerpo relativa a los ejes centroidales, se escribe

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \tag{18.16}$$

Si los ejes de coordenadas se eligen de manera que coincidan en el instante considerado con los ejes principales x', y', z' del cuerpo, la relación que se obtuvo se reduce a

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \tag{18.17}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ = velocidad del centro de masa
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular
m = masa del cuerpo rígido
$\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$ = momentos de inercia centroidales principales

Los resultados obtenidos permiten aplicar al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido el principio del trabajo y la energía (sección 17.2) y la conservación de la energía (sección 17.6).

Energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo. En el caso particular de un cuerpo rígido que gira en el espacio tridimensional alrededor de un punto fijo O, la energía cinética del cuerpo puede expresarse en términos de sus momentos y productos de inercia con respecto a los ejes con origen en O (figura 18.8). Si se recuerda la definición de la energía cinética de un sistema de partículas y se sustituye $v_i = |\mathbf{v}_i| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|$, se escribe

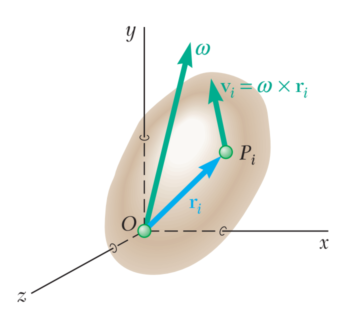


Figura 18.8

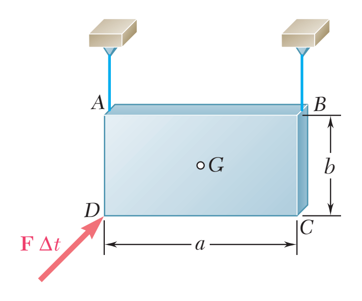
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2\, \Delta m_i \tag{18.18}$$

Manipulaciones similares a las que se usaron para obtener la ecuación (18.15) producen

$$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x) \tag{18.19}$$

o si los ejes principales x', y', z' del cuerpo en el origen O se eligen como ejes coordenados,

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \tag{18.20}$$



PROBLEMA RESUELTO 18.1

Una placa rectangular de masa m suspendida de dos alambres en A y B se golpea en D en una dirección perpendicular a la placa. Denotando por $\mathbf{F}\,\Delta t$ el impulso aplicado en D, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad del centro de masa G, *b*) la velocidad angular de la placa.

SOLUCIÓN

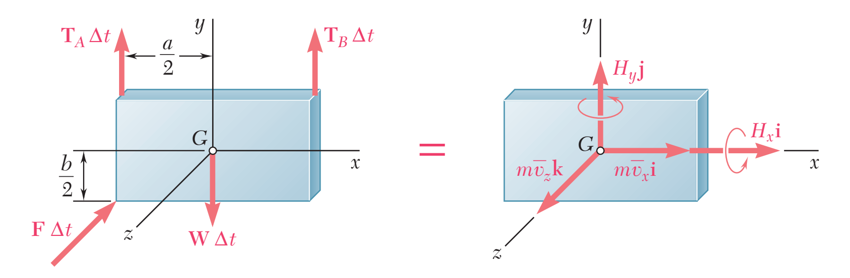
Suponiendo que los alambres permanecen tensos y que en consecuencia las componentes $\bar{v}_y$ de $\bar{\mathbf{v}}$ y ω_z de $\boldsymbol{\omega}$ son cero después del impacto, se tiene

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_z\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}$$

y puesto que los ejes x, y, z son ejes principales de inercia,

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_G = \tfrac{1}{12}mb^2\omega_x\mathbf{i} + \tfrac{1}{12}ma^2\omega_y\mathbf{j} \qquad (1)$$

Principio del impulso y cantidad de movimiento. Puesto que las cantidades de movimiento iniciales son cero, el sistema de los impulsos debe ser equivalente al sistema de las cantidades de movimiento finales:

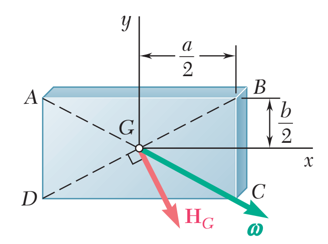


***a*) Velocidad del centro de masa.** Si se igualan las componentes de los impulsos y las cantidades de movimiento en las direcciones x y z:

x componentes: $\qquad 0 = m\bar{v}_x \qquad \bar{v}_x = 0$

z componentes: $\qquad -F\,\Delta t = m\bar{v}_z \qquad \bar{v}_z = -F\,\Delta t/m$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_z\mathbf{k} \qquad \bar{\mathbf{v}} = -(F\,\Delta t/m)\mathbf{k} \quad ◀$$



***b*) Velocidad angular.** Al igualar los momentos de los impulsos y las cantidades de movimiento alrededor de los ejes x y y:

Alrededor del eje x: $\qquad \tfrac{1}{2}bF\,\Delta t = H_x$

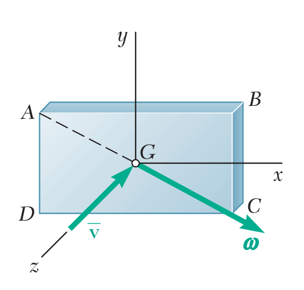
Alrededor del eje y: $\qquad -\tfrac{1}{2}aF\,\Delta t = H_y$

$$\mathbf{H}_G = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}bF\,\Delta t\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}aF\,\Delta t\mathbf{j} \qquad (2)$$

Si se comparan las ecuaciones (1) y (2), se concluye que

$$\omega_x = 6F\,\Delta t/mb \qquad \omega_y = -6F\,\Delta t/ma$$

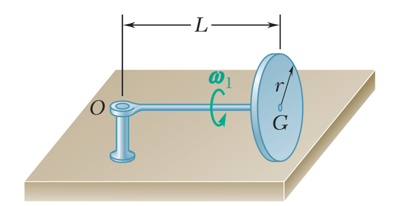
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} \qquad \boldsymbol{\omega} = (6F\,\Delta t/mab)(a\mathbf{i} - b\mathbf{j}) \quad ◀$$



Se observa que $\boldsymbol{\omega}$ está dirigida a lo largo de la diagonal AC.

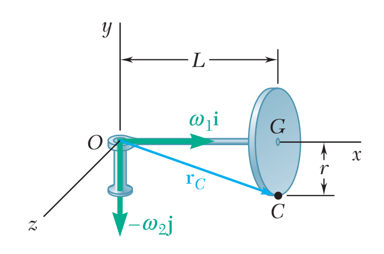
Observación: Al igualar las componentes y de los impulsos y las cantidades de movimiento, así como sus momentos alrededor del eje z, se obtienen dos ecuaciones adicionales que producen $T_A = T_B = \tfrac{1}{2}W$. De esa manera se verifica que los alambres permanecen rígidos y que la suposición fue correcta.

PROBLEMA RESUELTO 18.2



Un disco homogéneo de radio r y masa m se monta sobre una flecha OG de longitud L y masa despreciable. El eje se articula en el punto fijo O, y el disco está restringido a rodar sobre el piso horizontal. Si el disco gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la velocidad ω_1 alrededor de la flecha OG, determine *a*) la velocidad angular del disco, *b*) su cantidad de movimiento angular alrededor de O, *c*) su energía cinética, *d*) el vector y el par en G equivalente a las cantidades de movimiento de las partículas del disco.

SOLUCIÓN



***a*) Velocidad angular.** Cuando el disco gira alrededor de la flecha OG también gira con el eje alrededor del eje y a una velocidad ω_2 en el sentido de las manecillas del reloj. La velocidad angular total del disco es entonces

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} - \omega_2\mathbf{j} \tag{1}$$

Para determinar ω_2 se escribe que la velocidad de C es cero

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = 0$$
$$(\omega_1\mathbf{i} - \omega_2\mathbf{j}) \times (L\mathbf{i} - r\mathbf{j}) = 0$$
$$(L\omega_2 - r\omega_1)\mathbf{k} = 0 \qquad \omega_2 = r\omega_1/L$$

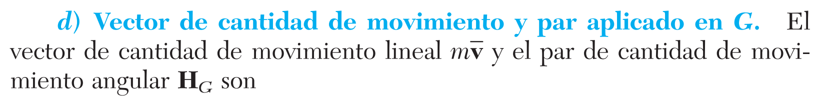
Al sustituir (1) en ω_2: $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} = (r\omega_1/L)\mathbf{j}$ ◀

***b*) Cantidad de movimiento angular alrededor de *O*.** Suponiendo que la flecha es parte del disco, es posible considerar que este mismo tenga un punto fijo en O. Puesto que los ejes x, y y z son ejes principales de inercia para el disco,

$$H_x = I_x\omega_x = (\tfrac{1}{2}mr^2)\omega_1$$
$$H_y = I_y\omega_y = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)(-r\omega_1/L)$$
$$H_z = I_z\omega_z = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)0 = 0$$
$$\mathbf{H}_O = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} - m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(r\omega_1/L)\mathbf{j} \quad ◀$$

***c*) Energía cinética.** Al utilizar los valores que se obtuvieron para los momentos de inercia y las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, se tiene

$$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}mr^2\omega_1^2 + m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(-r\omega_1/L)^2]$$
$$T = \tfrac{1}{8}mr^2\left(6 + \frac{r^2}{L^2}\right)\omega_1^2 \quad ◀$$



***d*) Vector de cantidad de movimiento y par aplicado en *G*.** El vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y el par de cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ son

$$m\bar{\mathbf{v}} = mr\omega_1\mathbf{k} \quad ◀$$

y

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_{x'}\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_{y'}\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_{z'}\omega_z\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}mr^2(-r\omega_1/L)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a calcular la *cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones* y aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. También se aprendió a calcular la *energía cinética de un cuerpo rígido en tres dimensiones.* Es importante tener presente que, salvo para situaciones muy especiales, la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones *no puede* expresarse como el producto $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ y, por lo tanto, *no tendrá la misma dirección que la velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ (figura 18.3).

1. *Para calcular la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de un cuerpo rígido alrededor de su centro de masa G,* es necesario determinar primero la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo con respecto al sistema de ejes *centrados en G y de orientación fija.* Puesto que en esta lección se le pedirá sólo determinar la cantidad de movimiento angular del cuerpo *en un instante dado,* elija el sistema de ejes que resulte más conveniente para los cálculos.

a) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en G, utilice estos ejes como ejes de coordenadas x', y' y z', ya que los correspondientes productos de inercia del cuerpo serán iguales a cero. Descomponga $\boldsymbol{\omega}$ en las componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ y $\omega_{z'}$ a lo largo de estos ejes y calcule los momentos de inercia principales $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$. Las componentes correspondientes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ son

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

b) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en G, será necesario utilizar las ecuaciones (18.7) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. Estas ecuaciones requieren cálculos previos del *producto de inercia* del cuerpo, así como de cálculos previos de sus momentos de inercia con respecto a los ejes seleccionados.

c) La magnitud y los cosenos directores de $\mathbf{H}_G$ se obtienen de fórmulas similares a las utilizadas en Estática [sección 2.12]. Se tiene

$$H_G = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$$

$$\cos\theta_x = \frac{H_x}{H_G} \qquad \cos\theta_y = \frac{H_y}{H_G} \qquad \cos\theta_z = \frac{H_z}{H_G}$$

d) Una vez que se ha determinado $\mathbf{H}_G$, es posible obtener la cantidad de movimiento angular del cuerpo *alrededor de cualquier punto dado O* observando de la figura 18.4 que

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \tag{18.11}$$

donde $\bar{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de G relativo a O, y $m\bar{\mathbf{v}}$ es la cantidad de movimiento lineal del cuerpo.

2. *Para calcular la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ de un cuerpo rígido con un punto fijo O* siga el procedimiento que se describe en el párrafo 1, con la excepción de que debe utilizar en este caso ejes centrados en el punto fijo O.

a) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en O, descomponga $\boldsymbol{\omega}$ en componentes a lo largo de estos ejes [problema resuelto 18.2]. Las componentes correspondientes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ se obtienen de ecuaciones similares a las ecuaciones (18.10).

b) Si no se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en O, es necesario calcular los productos, así como los momentos de inercia del cuerpo, con respecto a los ejes que se han seleccionado y utilizar las ecuaciones (18.13) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$.

3. Para aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento a la solución de un problema que implica el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, se utilizará la misma ecuación vectorial que se utilizó para el movimiento plano en el capítulo 17,

$$\textbf{Cant. Mov. Sist.}_1 + \textbf{Imp. Ext. Sist.}_{1\rightarrow 2} = \textbf{Cant. Mov. Sist.}_2 \qquad (17.4)$$

donde los sistemas de cantidades de movimiento inicial y final se representan cada uno mediante un *vector de cantidad de movimiento lineal* $m\bar{\mathbf{v}}$ y un *par de cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_G$. Sin embargo, en este caso estos sistemas de vector y par deben representarse en tres dimensiones como se ilustra en la figura 18.6 y $\mathbf{H}_G$ debe determinarse como se explicó en el párrafo 1.

a) En problemas que implican la aplicación de un impulso conocido a un cuerpo rígido, dibuje las ecuaciones de diagramas de cuerpo libre correspondientes a la ecuación (17.4). Al igualar las componentes de los vectores implicados, se determinarán las cantidades de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ del cuerpo y, por consiguiente, la velocidad correspondiente $\bar{\mathbf{v}}$ de su centro de masa. Igualando las cantidades de movimiento alrededor de G, se determinará la cantidad de movimiento angular final $\mathbf{H}_G$ del cuerpo. Después se sustituirán los valores que se obtuvieron para las componentes de $\mathbf{H}_G$ en las ecuaciones (18.10) o (18.7) y se resolverán estas ecuaciones para los valores correspondientes de las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo [problema resuelto 18.1].

b) En problemas que implican impulsos desconocidos se dibuja una ecuación de diagramas de cuerpo libre correspondiente a la ecuación (17.4) y se escriben ecuaciones que no incluyen impulsos desconocidos. Estas ecuaciones pueden obtenerse al igualar momentos alrededor del punto o línea de impacto.

4. Para calcular la energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo O se descompone la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en componentes a lo largo de los ejes que se elijan y se calculan los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a esos ejes. Como ocurrió en el caso del cálculo de la cantidad de movimiento angular, utilice los ejes principales de inercia x', y' y z' si es fácil determinarlos. Los productos de inercia serán en ese caso cero [problema resuelto 18.2] y la expresión para la energía cinética se reducirá a

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.20)$$

Si es necesario utilizar otros ejes diferentes a los ejes principales de inercia, la energía cinética del cuerpo debe expresarse como se indica en la ecuación (18.19).

5. Para calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento general, considere el movimiento como la suma de una *traslación con el centro de masa G y una rotación alrededor de G*. La energía cinética asociada con la traslación es $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$. Si es posible utilizar ejes principales de inercia, la energía cinética asociada con la rotación alrededor de G puede expresarse en la forma utilizada en la ecuación (18.20). La energía cinética total del cuerpo rígido es entonces

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.17)$$

Si es necesario utilizar ejes diferentes a los ejes principales de inercia para determinar la energía cinética asociada con la rotación alrededor de G, la energía cinética total del cuerpo debe expresarse como se indica en la ecuación (18.16).

Problemas

18.1 Dos barras uniformes AB y CE, cada una con masa de 1.5 kg y longitud de 600 mm, se sueldan entre sí en sus puntos medios. Si este ensamble tiene una velocidad angular de magnitud constante $\omega = 12$ rad/s, determine la magnitud y la dirección de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_D$ del ensamble alrededor de D.

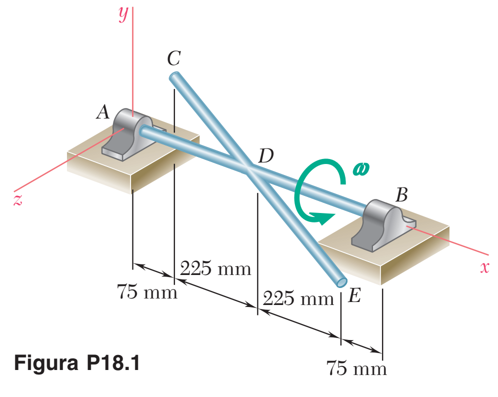


Figura P18.1

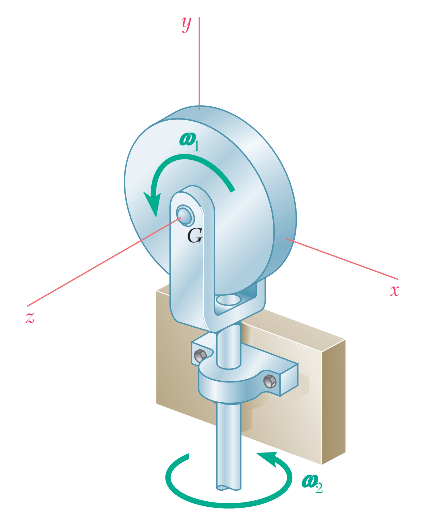


Figura P18.2

18.2 Un disco homogéneo delgado de masa m y radio r gira a la razón constante ω_1 alrededor de un eje que se sostiene mediante una varilla terminada en horquilla, la cual gira a razón constante ω_2. Determine la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del disco alrededor de su centro de masa G.

18.3 Un cuadrado homogéneo delgado de masa m y lado a está soldado a una flecha vertical AB con la cual forma un ángulo de 45°. Si la flecha gira con una velocidad angular ω, determine la cantidad de movimiento angular de la placa alrededor de A.

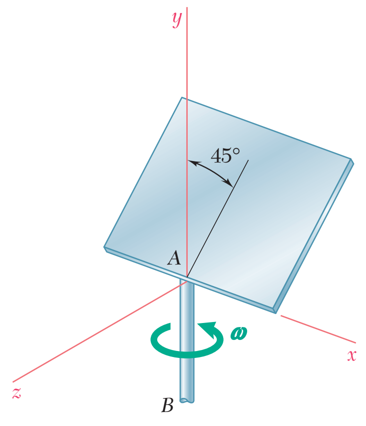


Figura P18.3

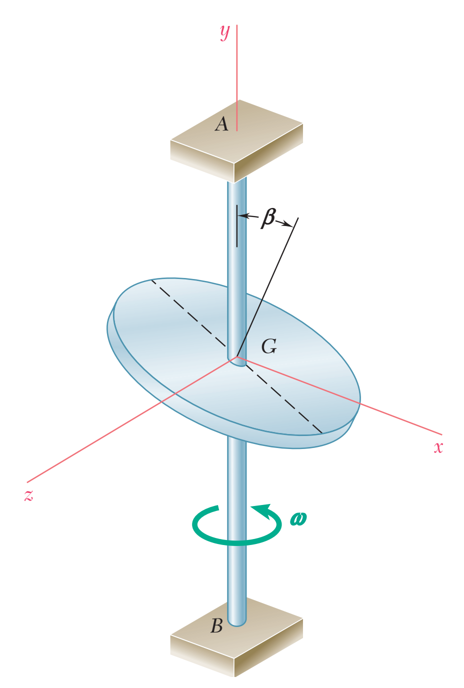


Figura P18.4

18.4 Un disco homogéneo de masa m y radio r está montado sobre la flecha vertical AB. La normal al disco G forma un ángulo $\beta = 25°$ con la flecha. Si la flecha tiene una velocidad angular constante ω, determine el ángulo θ formado por el eje AB y la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del disco con respecto a su centro de masa G.

18.5 Un disco delgado de peso $W = 10$ lb gira a la razón constante $\omega_2 = 15$ rad/s con respecto al brazo ABC, el cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 5$ rad/s alrededor del eje y. Determine la cantidad de movimiento angular del disco alrededor de su centro C.

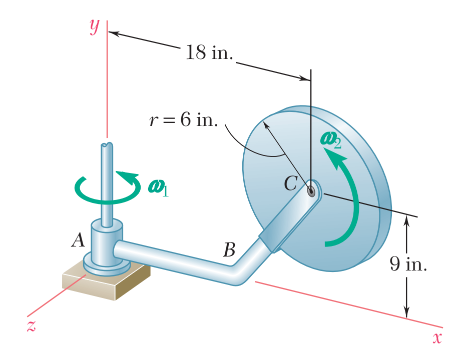


Figura *P18.5*

18.6 Un disco homogéneo de peso $W = 6$ lb gira a la razón constante $\omega_1 = 16$ rad/s con respecto al brazo ABC, que está soldado a una flecha DCE que gira a la razón constante $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_A$ del disco alrededor de su centro A.

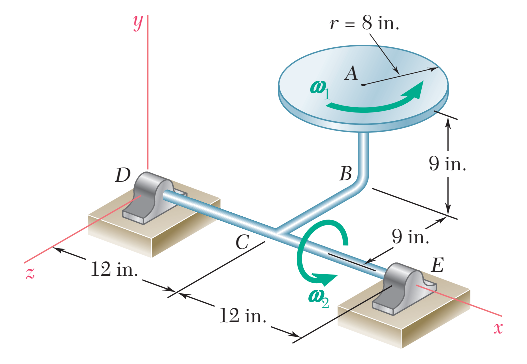


Figura *P18.6*

18.7 Un paralelepípedo rectangular sólido de masa m tiene una base cuadrada de lado a y una longitud $2a$. Si gira a la razón constante ω alrededor de su diagonal AC' y esa rotación se observa contraria al sentido de las manecillas del reloj desde A, determine *a*) la magnitud de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del paralelepípedo alrededor de su centro de masa G, *b*) el ángulo que forma $\mathbf{H}_G$ con la diagonal AC'.

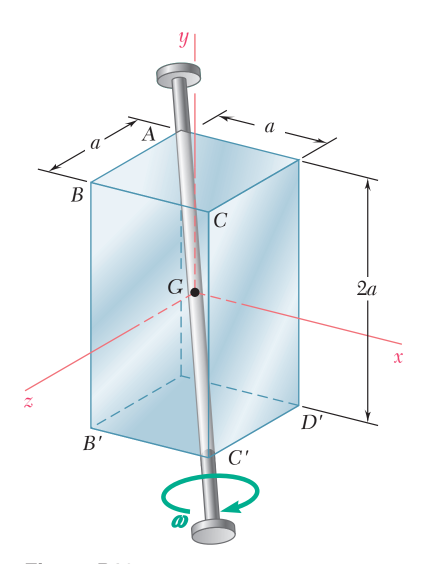


Figura P18.7

18.8 Retome el problema 18.7, y ahora suponga que el paralelepípedo rectangular sólido se sustituye por uno hueco que consiste en seis placas de metal delgadas soldadas entre sí.

18.9 Determine la cantidad de movimiento angular del disco del problema 18.5 alrededor del punto A.

18.10 Determine la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_D$ del disco del problema 18.6 alrededor del punto D.

18.11 El proyectil de 30 kg que se muestra en la figura tiene un radio de giro de 60 mm alrededor de su eje de simetría Gx y un radio de giro de 250 mm en torno a su eje transversal Gy. Su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ puede descomponerse en dos componentes: una dirigida a lo largo de Gx, mide la *velocidad de giro* del proyectil, en tanto que la otra, dirigida a lo largo de GD, mide su *velocidad de precesión*. Si se sabe que $\theta = 5°$ y que la cantidad de movimiento angular del proyectil alrededor de su centro de masa G es $\mathbf{H}_G = (320 \text{ g} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (9 \text{ g} \cdot \text{m}^2)\mathbf{j}$, determine *a*) la velocidad de giro, *b*) la velocidad de precesión.

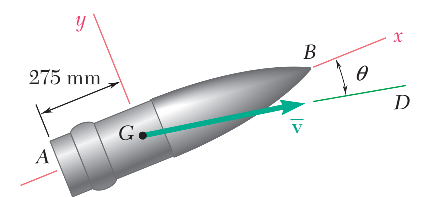


Figura P18.11

18.12 Determine la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_A$ del proyectil del problema 18.11 alrededor del centro A de su base, si se sabe que su centro de masa G tiene una velocidad $\overline{\mathbf{v}}$ de 650 m/s. Proporcione su respuesta en términos de componentes respectivamente paralelas a los ejes x y y y al tercer eje z que apunta hacia usted.

18.13 *a*) Demuestre que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_B$ de un cuerpo rígido alrededor del punto B puede obtenerse al sumar la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_A$ de ese cuerpo alrededor del punto A y el producto vectorial del vector $\mathbf{r}_{A/B}$ dibujado desde B hasta A y la cantidad de movimiento lineal $m\overline{\mathbf{v}}$ del cuerpo:

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_A + \mathbf{r}_{A/B} \times m\overline{\mathbf{v}}$$

b) Demuestre además que cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, su cantidad de movimiento angular es el mismo alrededor de cualesquiera dos puntos A y B ubicados sobre el eje fijo ($\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_B$) si y sólo si el centro de masa G del cuerpo se localiza sobre el eje fijo.

18.14 Determine la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del disco del problema resuelto 18.2 a partir de las expresiones que se obtuvieron para su cantidad de movimiento lineal $m\overline{\mathbf{v}}$ y su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$, utilizando las ecuaciones (18.11). Verifique que el resultado obtenido es el mismo que se obtuvo mediante cálculo directo.

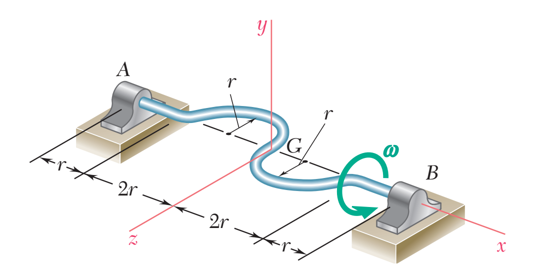


Figura P18.15

18.15 Una barra de sección transversal uniforme se utiliza para formar la flecha que se muestra en la figura. Si la masa total de la flecha se denota con m y se sabe que la flecha gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$, determine *a*) la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de la flecha alrededor de su centro de masa G, *b*) el ángulo formado por $\mathbf{H}_G$ y el eje AB.

18.16 La placa triangular mostrada tiene una masa de 7.5 kg y está soldada a una flecha vertical AB. Si se sabe que la placa gira a la razón constante $\omega = 12$ rad/s, determine su cantidad de movimiento angular alrededor de *a*) el punto C, *b*) el punto A. (*Sugerencia*: Para resolver la parte *b*) encuentre $\overline{\mathbf{v}}$ y utilice la propiedad indicada en la parte *a*) del problema 18.13.)

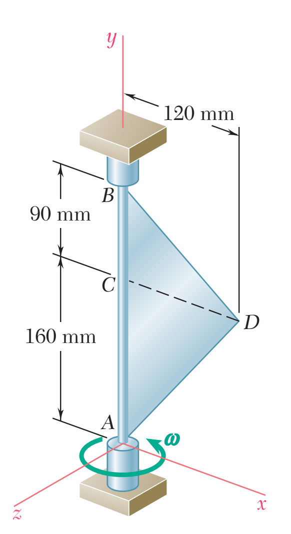


Figura P18.16 y *P18.17*

18.17 La placa triangular mostrada tiene una masa de 7.5 kg y está soldada a una flecha vertical AB. Si la placa gira a la razón constante $\omega = 12$ rad/s, determine su cantidad de movimiento angular alrededor de *a*) el punto C, *b*) el punto B. (Vea la sugerencia del problema 18.16.)

18.18 Determine la cantidad de movimiento angular de la flecha del problema 18.15 alrededor de *a*) el punto A, *b*) el punto B.

18.19 Dos brazos en forma de L, cada uno con un peso de 4 lb, se sueldan a los puntos que dividen en tercios a la flecha *AB* de 2 ft. Si se sabe que la flecha *AB* gira a la razón constante $\omega = 240$ rpm, determine *a*) la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de *A*, *b*) el ángulo que forman la cantidad de movimiento angular y la flecha *AB*.

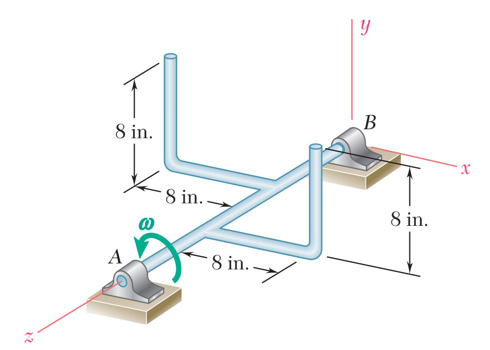


Figura P18.19

18.20 Para el cuerpo del problema 18.19, determine *a*) la cantidad de movimiento angular alrededor del punto *B*, *b*) el ángulo formado por la cantidad de movimiento angular alrededor de la flecha *BA*.

18.21 Una de las esculturas que se exhiben en un plantel universitario está compuesta por un cubo hueco hecho de seis láminas de aluminio, cada una de 5×5 ft, soldadas en conjunto y reforzadas por dentro con un peso despreciable. El cubo se monta sobre una base fija *A* y puede girar con libertad alrededor de su diagonal vertical *AB*. Al pasar al lado de esta escultura en camino a su clase de mecánica, una estudiante de ingeniería sujeta la esquina *C* del cubo y la empuja durante 1.2 s en dirección perpendicular al plano *ABC* con una fuerza promedio de 12.5 lb. Luego de observar que se requieren 5 s para que el cubo dé una revolución completa, la estudiante saca su calculadora y procede a determinar el peso del cubo. ¿Cuál es el resultado de su cálculo? (*Sugerencia*: La distancia perpendicular desde la diagonal que une los dos vértices de un cubo a cualquiera de sus otros seis vértices puede obtenerse al multiplicar el lado del cubo por $\sqrt{2/3}$.)

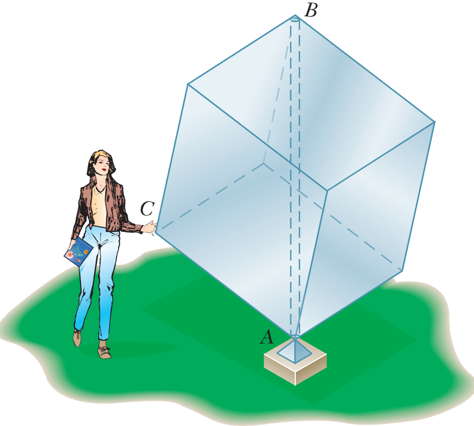


Figura P18.21

18.22 Si el cubo de aluminio del problema 18.21 se sustituyera por un cubo del mismo tamaño, fabricado con seis hojas de madera contrachapada cada una con un peso de 20 lb, ¿cuánto tardaría el cubo en completar una revolución si la estudiante empujara su esquina *C* de la misma manera que empujó la esquina del cubo de aluminio?

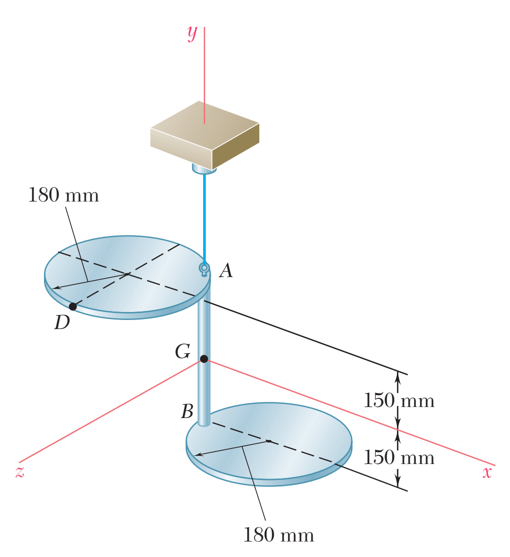


Figura P18.23 y P18.24

18.23 Dos placas circulares, cada una con una masa de 4 kg, están conectadas rígidamente mediante una varilla *AB* de masa despreciable y se suspenden del punto *A*, como se muestra en la figura. Si se sabe que un impulso $\mathbf{F}\,\Delta t = -(2.4\ \text{N}\cdot\text{s})\mathbf{k}$ se aplica en el punto *D*, determine *a*) la velocidad del centro de masa *G* del ensamble, *b*) la velocidad angular del ensamble.

18.24 Dos placas circulares, cada una con una masa de 4 kg, están conectadas rígidamente mediante una varilla *AB* de masa despreciable y se suspenden del punto *A*, como se muestra en la figura. Si se sabe que un impulso $\mathbf{F}\,\Delta t = (2.4\ \text{N}\cdot\text{s})\mathbf{j}$ se aplica en el punto *D*, determine *a*) la velocidad del centro de masa *G* del ensamble, *b*) la velocidad angular del ensamble.

18.25 Una barra uniforme de masa *m* se dobla en la forma que se muestra y se suspende de un alambre conectado en su centro de masa *G*. La barra doblada se golpea en *A* en una dirección perpendicular al plano que contiene a la barra (en la dirección *x* positiva). Si se denota el impulso correspondiente mediante $\mathbf{F}\,\Delta t$, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad del centro de masa *G*, *b*) la velocidad angular de la barra.

18.26 Retome el problema 18.25, y ahora suponga que la barra doblada se golpea en *B*.

18.27 Tres barras delgadas, cada una de masa *m* y longitud 2*a*, se sueldan entre sí para formar el ensamble que se muestra en la figura. El ensamble es golpeado en *A* con una dirección vertical hacia abajo. Si el impulso correspondiente se denota con $\mathbf{F}\,\Delta t$, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad del centro de masa *G*, *b*) la velocidad angular del ensamble.

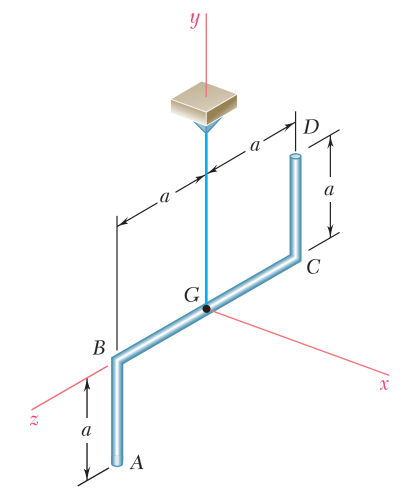


Figura P18.25

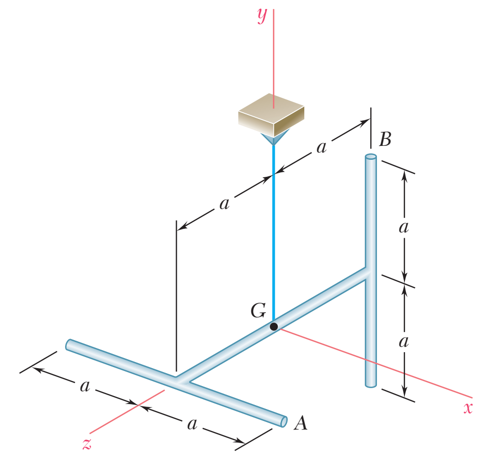


Figura *P18.27*

18.28 Retome el problema 18.27, y ahora suponga que el ensamble es golpeado en *B* con una dirección opuesta a la del eje *x*.

18.29 Una placa cuadrada de lado *a* y masa *m* que se sostiene mediante una articulación de rótula en *A* gira alrededor del eje *y* con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{j}$ cuando súbitamente aparece una obstrucción en *B* en el plano *xy*. Si se supone que el impacto en *B* es perfectamente plástico ($e = 0$), determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad de su centro de masa *G*.

18.30 Con referencia a la placa del problema 18.29, determine el impulso ejercido durante el impacto por, *a*) la obstrucción en *B*, *b*) el soporte en *A*.

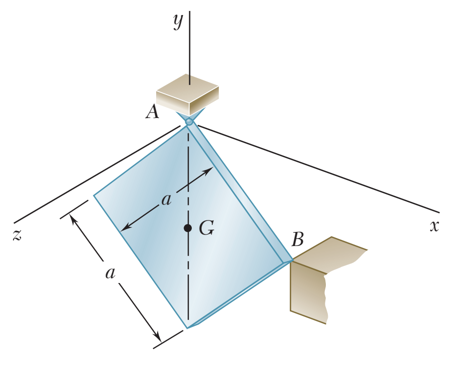


Figura P18.29

18.31 Una placa rectangular de masa m cae con una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_0$ y sin velocidad angular cuando su esquina C golpea una obstrucción. Si se supone que el impacto va a ser perfectamente plástico ($e = 0$), determine la velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.

18.32 Para la placa del problema 18.31, determine *a*) la velocidad de su centro de masa G inmediatamente después del impacto, *b*) el impulso ejercido sobre la placa por la obstrucción durante el impacto.

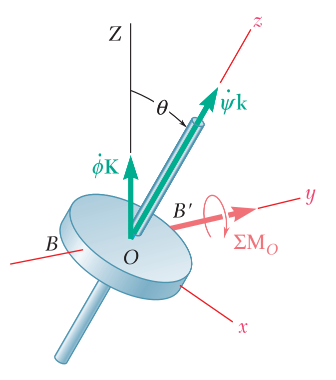


Figura P18.31

18.33 Una sonda de 2 500 kg en órbita alrededor de la Luna mide 2.4 m de altura y tiene una base octagonal de lados de 1.2 m. Los ejes de coordenadas que se muestran son los ejes de inercia centroidales de la sonda, y sus radios de giro son $k_x = 0.98$ m, $k_y = 1.06$ m y $k_z = 1.02$ m. La sonda está equipada con un propulsor principal E de 500 N y con cuatro propulsores A, B, C y D de 20 N que pueden expeler combustible en la dirección y positiva. La sonda tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (0.040$ rad/s$)\mathbf{i} + (0.060$ rad/s$)\mathbf{k}$ cuando se usan dos de los propulsores de 20 N para reducir la velocidad angular a cero. Determine *a*) cuál de los propulsores debe utilizarse, *b*) el tiempo de operación de cada uno de estos propulsores, *c*) por cuánto tiempo debe activarse el propulsor principal E si la velocidad del centro de masa de la sonda debe permanecer sin cambio.

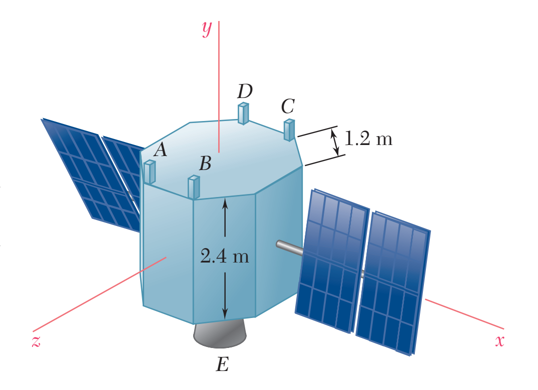


Figura P18.33

18.34 Retome el problema 18.33, y ahora suponga que la velocidad angular de la sonda es $\boldsymbol{\omega} = (0.060$ rad/s$)\mathbf{i} - (0.040$ rad/s$)\mathbf{k}$.

18.35 El eje de coordenadas que se muestra en la figura representa los principales ejes centroidales de inercia de una sonda espacial de 3 000 lb cuyos radios de giro son $k_x = 1.375$ ft, $k_y = 1.425$ ft y $k_z = 1.250$ ft. La sonda no tiene velocidad angular cuando un meteorito de 5 oz golpea uno de sus paneles solares en A con una velocidad relativa a la sonda de $\mathbf{v}_0 = (2\,400$ ft/s$)\mathbf{i} - (3\,000$ ft/s$)\mathbf{j} + (3\,200$ ft/s$)\mathbf{k}$. Si se sabe que el meteorito sale del otro lado del panel sin cambio en la dirección de su velocidad, pero con una reducción en la misma de 20 por ciento, determine la velocidad angular final de la sonda.

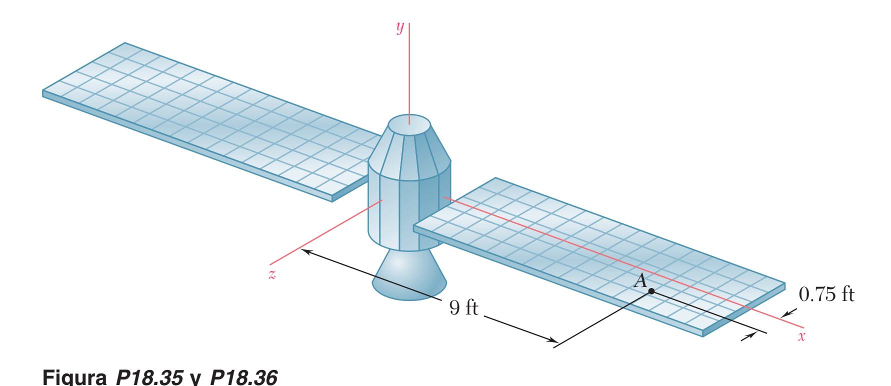


Figura *P18.35* y *P18.36*

18.36 El eje de coordenadas que se muestra en la figura representa los principales ejes centroidales de inercia de una sonda espacial de 3 000 lb cuyos radios de giro son $k_x = 1.375$ ft, $k_y = 1.425$ ft y $k_z = 1.250$ ft. La sonda no tiene velocidad angular cuando un meteorito de 5 oz golpea en uno de sus paneles solares en A y sale por el otro lado del panel sin cambio en la dirección de su velocidad, pero con una reducción en la misma de 25 por ciento. Si la velocidad angular final de la sonda es $\boldsymbol{\omega} = (0.05$ rad/s$)\mathbf{i} - (0.12$ rad/s$)\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ y la componente x del cambio resultante en la velocidad del centro

de masa de la sonda es −0.675 in./s, determine *a*) la componente ω_z de la velocidad angular final de la sonda, *b*) la velocidad relativa $\mathbf{v}_0$ con la que el meteorito choca contra el panel.

18.37 Si se denota, respectivamente, con $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{H}_O$ y T la velocidad angular, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo O, *a*) demuestre que $\mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T$; *b*) demuestre que el ángulo θ entre $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_O$ siempre será agudo.

18.38 Demuestre que la energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo O puede expresarse como $T = \frac{1}{2} I_{OL}\omega^2$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del cuerpo e I_{OL} es su momento de inercia alrededor de la línea de acción OL de $\boldsymbol{\omega}$. Deduzca esta expresión *a*) a partir de las ecuaciones (9.46) y (18.19), *b*) considere T como la suma de las energías cinéticas de las partículas P_i que describen círculos de radio ρ_i alrededor de la línea OL.

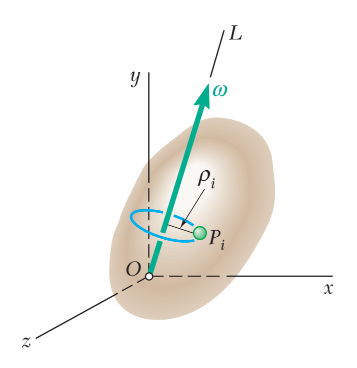


Figura P18.38

18.39 Determine la energía cinética del ensamble del problema 18.1.

18.40 Determine la energía cinética del disco del problema 18.2.

18.41 Determine la energía cinética de la placa del problema 18.3.

18.42 Determine la energía cinética del disco del problema 18.4.

18.43 Determine la energía cinética de la varilla del problema 18.15.

18.44 Determine la energía cinética de la placa triangular del problema 18.16.

18.45 Determine la energía cinética del cuerpo del problema 18.19.

18.46 Determine la energía cinética impartida al cubo del problema 18.21.

18.47 Determine la energía cinética del disco del problema 18.5.

18.48 Determine la energía cinética del disco del problema 18.6.

18.49 Determine la energía cinética del paralelepípedo sólido del problema 18.7.

18.50 Determine la energía cinética del paralelepípedo hueco del problema 18.8.

18.51 Determine la energía cinética perdida cuando la placa del problema 18. 29 golpea la obstrucción en el punto *B*.

18.52 Determine la energía cinética perdida cuando la esquina *C* de la placa del problema 18.31 golpea la obstrucción.

18.53 Determine la energía cinética de la sonda espacial del problema 18.35 en su movimiento alrededor de su centro de masa después de la colisión con el meteorito.

18.54 Determine la energía cinética de la sonda espacial del problema 18.36 en su movimiento alrededor de su centro de masa después de la colisión con el meteorito.

*18.5. MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

Como se indicó en la sección 18.2, las ecuaciones fundamentales

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

conservan su validez en el caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. Sin embargo, antes de que pudiera aplicarse la ecuación (18.2) al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido fue necesario deducir las ecuaciones (18.7), las cuales relacionan las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ con las de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Aún falta encontrar una forma efectiva y conveniente de calcular las componentes de la derivada $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular.

Puesto que $\mathbf{H}_G$ representa la cantidad de movimiento angular del cuerpo en su movimiento relativo a los ejes centroidales $GX'Y'Z'$ de orientación fija (figura 18.9), y puesto que $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa la razón de cambio de $\mathbf{H}_G$ con respecto a los mismos ejes, parecería natural utilizar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_G$ a lo largo de los ejes X', Y', Z' al escribir las relaciones (18.7). Pero puesto que el cuerpo gira, sus momentos y productos de inercia cambiarían continuamente, y resultaría necesario determinar sus valores como funciones del tiempo. Por lo tanto, es más conveniente utilizar los ejes x, y, z con origen en el cuerpo, asegurando que sus momentos y productos de inercia mantendrán los mismos valores durante el movimiento. Lo anterior es permisible puesto que, como se indicó antes, la transformación de $\boldsymbol{\omega}$ en $\mathbf{H}_G$ es independiente del sistema de ejes de coordenadas elegido. A pesar de eso, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ debe seguirse *definiendo* con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija. En ese caso, el vector $\boldsymbol{\omega}$ puede *descomponerse* en componentes a lo largo de los ejes rotatorios x, y y z. Al aplicar las relaciones (18.7), se obtienen las *componentes* del vector $\mathbf{H}_G$ a lo largo de los ejes rotatorios. Sin embargo, el vector $\mathbf{H}_G$ representa la cantidad de movimiento angular alrededor de G del cuerpo *en su movimiento relativo al sistema de referencia* $GX'Y'Z'$.

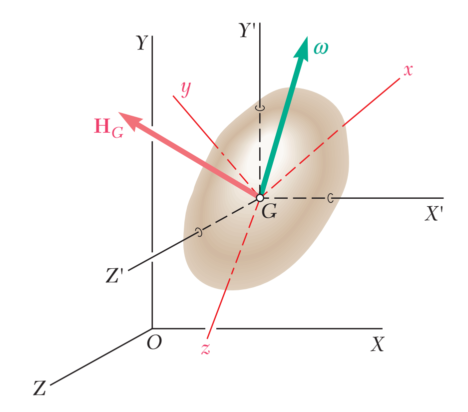


Figura 18.9

Al diferenciar con respecto a t las componentes de la cantidad de movimiento angular en (18.7), se define la razón de cambio del vector $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia en rotación $Gxyz$:

$$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} = \dot{H}_x\mathbf{i} + \dot{H}_y\mathbf{j} + \dot{H}_z\mathbf{k} \tag{18.21}$$

donde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son los vectores unitarios a lo largo de los ejes en rotación. Hay que recordar de la sección 15.10 que la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ del vector $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ se encuentra sumando a $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ el producto vectorial $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G$, donde $\boldsymbol{\Omega}$ denota la velocidad angular del sistema de referencia en rotación, se escribe

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.22}$$

donde $\mathbf{H}_G$ = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija

$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ = razón de cambio de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia en rotación $Gxyz$, que se calcula a partir de las relaciones (18.7) y (18.21)

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Gxyz$

Al sustituir $\dot{\mathbf{H}}_G$ de (18.22) en (18.2), se tiene

$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.23}$$

Si el sistema de referencia rotatorio tiene su origen en el cuerpo, como se ha supuesto en esta discusión, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idénticamente igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Sin embargo, existen muchas aplicaciones donde es ventajoso utilizar un sistema de referencia que no tiene su origen en realidad en el cuerpo, sino que gira de una manera independiente. Por ejemplo, si el cuerpo considerado es simétrico con respecto a un eje, como en el problema resuelto 18.5 o en la sección 18.9, es posible elegir un sistema de referencia con respecto al cual los momentos y productos de inercia del cuerpo permanecen constantes, pero que gire menos que el propio cuerpo.[†] Como resultado, es posible obtener expresiones más simples para la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo que las que se habrían obtenido si el sistema de referencia se hubiera fijado realmente al cuerpo. Es claro que en estos casos la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia en rotación y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo son diferentes.

*18.6. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE EULER. EXTENSIÓN DEL PRINCIPIO DE D'ALEMBERT AL MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

Si se eligen los ejes x, y y z de manera que coincidan con los ejes principales de inercia del cuerpo, es posible utilizar las relaciones simplificadas (18.10) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. Si se omiten las primas de los subíndices, se escribe

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_z\omega_z\mathbf{k} \tag{18.24}$$

donde $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e $\bar{I}_z$ denotan los momentos de inercia centroidales principales del cuerpo. Sustituyendo $\mathbf{H}_G$ de (18.24) en (18.23) y fijando $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, se obtienen las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= \bar{I}_x\,\dot{\omega}_x - (\bar{I}_y - \bar{I}_z)\omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= \bar{I}_y\,\dot{\omega}_y - (\bar{I}_z - \bar{I}_x)\omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= \bar{I}_z\,\dot{\omega}_z - (\bar{I}_x - \bar{I}_y)\omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{18.25}$$

Estas ecuaciones, llamadas *ecuaciones de movimiento de Euler* en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), se utilizan para analizar el movimiento de un cuerpo rígido alrededor de su centro de masa. En la siguiente sección, sin embargo, se utilizará de manera preferente la ecuación (18.23) en vez de las ecuaciones (18.25), ya que la primera es más general y la forma vectorial compacta en la que se expresa es más fácil de recordar.

Al escribir la ecuación (18.1) en forma escalar, se obtienen las tres ecuaciones adicionales

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = m\bar{a}_z \tag{18.26}$$

las cuales, junto con las ecuaciones de Euler, forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales. Al indicar las condiciones iniciales apropiadas, estas ecuaciones diferenciales tienen una solución única. Así, el movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones está completamente definido por la resultante y por la resultante del momento de

[†]De manera más específica, el sistema de referencia no tendrá giro (véase la sección 18.9).

las fuerzas externas que actúan sobre él. Este resultado se reconocerá como una generalización de un resultado similar que se obtuvo en la sección 16.4 en el caso del movimiento plano de una placa rígida. Se concluye que en tres, así como en dos dimensiones, dos sistemas de fuerzas que son equipolentes también resultan equivalentes, esto es, tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado.

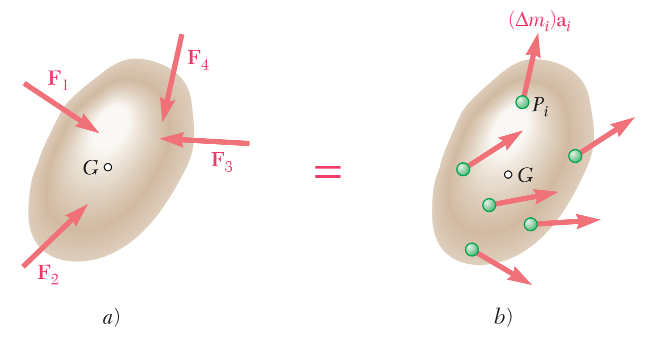


Figura 18.10

Si se consideran en particular el sistema de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (figura 18.10*a*) y el sistema de las fuerzas efectivas asociadas con las partículas que forman al cuerpo rígido (figura 18.10*b*), es posible establecer que los dos sistemas —los cuales se demostró en la sección 14.2 que eran equipolentes— también son equivalentes. Ésta es una extensión del principio de d'Alembert al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Al sustituir las fuerzas efectivas en la figura 18.10*b* por un sistema equivalente fuerza-par se confirma que el sistema de fuerzas externas que actúa sobre un cuerpo rígido en movimiento tridimensional es equivalente al sistema compuesto por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ con origen en el centro de masa G del cuerpo y el par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.11), donde $\dot{\mathbf{H}}_G$ se obtiene de las relaciones (18.7) y (18.22). Advierta que la equivalencia de los sistemas de vectores mostrados en la figura 18.10 y en la figura 18.11 se han indicado mediante signos de igualdad *rojos*. Los problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido pueden resolverse considerando la ecuación de diagramas de cuerpo libre que se representa en la figura 18.11 y al escribir ecuaciones escalares apropiadas que relacionen las componentes o momentos de las fuerzas externas y efectivas (véase el problema resuelto 18.3).

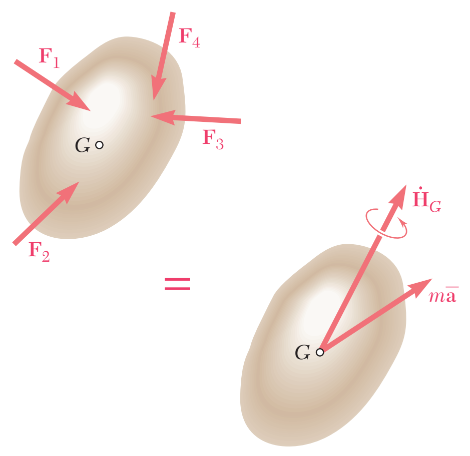


Figura 18.11

*18.7. MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO

Cuando un cuerpo rígido está restringido a girar alrededor de un punto fijo O, es deseable escribir una ecuación que incluya los momentos alrededor de O de las fuerzas externas y efectivas, pues esta ecuación no contendrá la reacción desconocida en O. Aunque una ecuación de este tipo se obtiene de la figura 18.11, es más conveniente escribirla al considerar la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor del punto fijo O (figura 18.12). Al recordar la ecuación (14.11), se escribe

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{18.27}$$

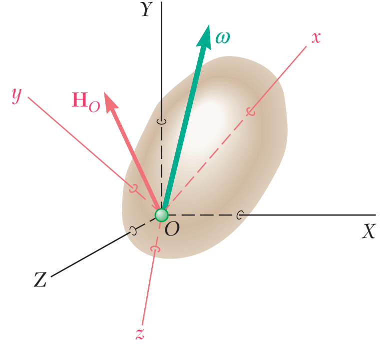


Figura 18.12

donde $\dot{\mathbf{H}}_O$ denota la razón de cambio del vector $\mathbf{H}_O$ con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$. Una deducción similar a la que se utilizó



Fotografía 18.3 El radiotelescopio giratorio es un ejemplo de una estructura restringida a girar alrededor de un punto fijo.

en la sección 18.5 permite relacionar $\dot{\mathbf{H}}_O$ con la razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ de $\mathbf{H}_O$ con respecto al sistema de referencia en rotación $Oxyz$. La sustitución en (18.27) conduce a la ecuación

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

donde $\Sigma \mathbf{M}_O$ = suma de momentos alrededor de O de las fuerzas aplicadas al cuerpo rígido

$\mathbf{H}_O$ = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$

$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = razón de cambio de $\mathbf{H}_O$ con respecto al sistema de referencia en rotación $Oxyz$, que se calculará de las relaciones (18.13)

$\mathbf{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Oxys$

Si el sistema de referencia en rotación está sobre el cuerpo, su velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ es idénticamente igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Sin embargo, como se señaló en el último párrafo de la sección 18.5, existen muchas aplicaciones en las que tiene ventaja utilizar un sistema de referencia que no está fijo en realidad al cuerpo, sino que gira de una manera independiente.

*18.8. ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

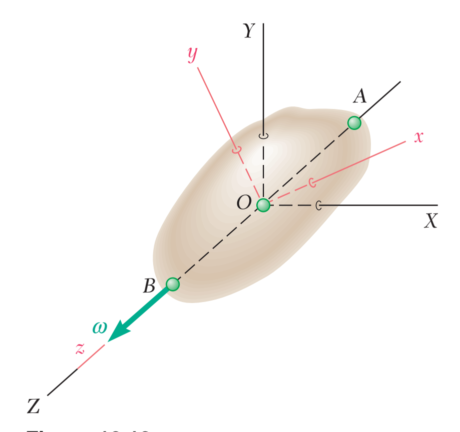


Figura 18.13

La ecuación (18.28), la cual se dedujo en la sección anterior, se usará para analizar el movimiento de un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un eje fijo AB (figura 18.13). Primero, se advierte que la velocidad angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se representa mediante el vector $\boldsymbol{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Al montar el sistema de referencia en movimiento $Oxyz$ al cuerpo, con el eje z a lo largo de AB, se tiene que $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Si se sustituye $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ en las relaciones (18.13), se obtienen las componentes a lo largo de los ejes rotatorios de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor de O:

$$H_x = -I_{xz}\omega \qquad H_y = -I_{yz}\omega \qquad H_z = I_z\omega$$

Puesto que el sistema de referencia $Oxyz$ tiene su origen en el cuerpo, se tiene $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ y la ecuación (18.28) produce

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\dot{\omega} + \omega\mathbf{k} \times (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\omega \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\alpha + (-I_{xz}\mathbf{j} + I_{yz}\mathbf{i})\omega^2\end{aligned}$$

El resultado que se obtuvo puede expresarse mediante las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= -I_{xz}\alpha + I_{yz}\omega^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\alpha - I_{xz}\omega^2 \\ \Sigma M_z &= I_z\alpha\end{aligned} \tag{18.29}$$

Cuando se conocen las fuerzas aplicadas al cuerpo, es posible obtener la aceleración angular α de las ecuaciones (18.29). La velocidad angular ω se determina entonces mediante integración y los valores que se obtienen para α y ω se sustituyen en las primeras dos ecuaciones

(18.29). Estas ecuaciones, más las tres ecuaciones (18.26) que definen el movimiento del centro de masa del cuerpo se usan entonces para determinar las reacciones en los cojinetes A y B.

Es posible elegir ejes distintos a los que se muestran en la figura 18.13 para analizar la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo. En muchos casos se encontrará que son más ventajosos los ejes principales de inercia del cuerpo. Por lo tanto, resulta prudente recurrir a la ecuación (18.28) y seleccionar el sistema de ejes que mejor se ajusta al problema que se está considerando.

Si el cuerpo en rotación es simétrico con respecto al plano xy, los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son iguales a cero y las ecuaciones (18.29) se reducen a

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = I_z\alpha \qquad (18.30)$$

que está de acuerdo con los resultados que se obtuvieron en el capítulo 16. Si, por otro lado, los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son diferentes de cero, la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor de los ejes x y y también serán diferentes de cero, aun cuando el cuerpo gire a una velocidad constante $\boldsymbol{\omega}$. De hecho, en el último caso, las ecuaciones (18.29) producen

$$\Sigma M_x = I_{yz}\omega^2 \qquad \Sigma M_y = -I_{xz}\omega^2 \qquad \Sigma M_z = 0 \qquad (18.31)$$

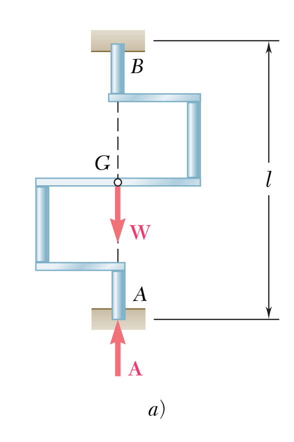
Esta última observación conduce al análisis de *balanceo de flechas rotatorias.* Considere, por ejemplo, el cigüeñal que se muestra en la figura 18.14*a,* que es simétrico alrededor de su centro de masa G. Primero se observa que cuando el cigüeñal está en reposo, no ejerce empuje lateral sobre sus soportes, ya que su centro de gravedad G está localizado directamente arriba de A. Se dice que el cigüeñal está *estáticamente balanceado.* La reacción en A, denominada muchas veces como una *reacción estática,* es vertical y su magnitud es igual al peso W de la flecha. Ahora supóngase que la flecha gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Al fijar el sistema de referencia en la flecha, con su origen en G, el eje z a lo largo de AB, y el eje y en el plano de simetría de la flecha (figura 18.14*b*), se advierte que I_{xz} es cero y que I_{yz} es positivo. De acuerdo con las ecuaciones (18.31), las fuerzas externas incluyen un par de momento $I_{yz}\omega^2\mathbf{i}$. Puesto que este par se forma mediante la reacción en B y la componente horizontal de la reacción en A, se tiene

$$\mathbf{A}_y = \frac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{j} \qquad \mathbf{B} = -\frac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{j} \qquad (18.32)$$

Puesto que las reacciones en los cojinetes son proporcionales a ω^2, la flecha tendrá la tendencia a desprenderse de sus cojinetes cuando gire a elevadas velocidades. Además, puesto que las reacciones en los cojinetes $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}$, denominadas *reacciones dinámicas,* están contenidas en el plano yz, éstas giran con la flecha y ocasionan la vibración de la estructura de soporte. Estos efectos indeseables se evitarán rearreglando la distribución de masa alrededor de la flecha o agregando masas correctivas, dejando que I_{yz} se vuelva igual a cero. Las reacciones dinámicas en $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}$ se anularán y las reacciones en los cojinetes se reducirán a la reacción estática $\mathbf{A}_z$, la dirección de la cual está fija. El eje estará entonces *balanceado tanto dinámica como estáticamente.*



Fotografía 18.4 Las fuerzas ejercidas mediante un cigüeñal giratorio de automóvil sobre sus cojinetes son las reacciones estática y dinámica. Es posible diseñar el cigüeñal para que esté equilibrado tanto dinámica como estáticamente.



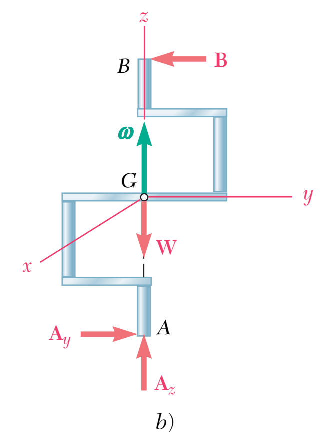
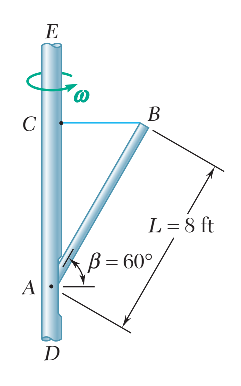


Figura 18.14



PROBLEMA RESUELTO 18.3

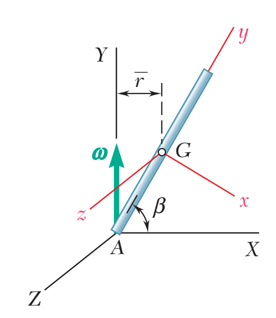
Una barra ligera *AB* de longitud $L = 8$ ft y peso $W = 40$ lb se conecta por medio de un pasador en *A* a un eje vertical *DE* que gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ de 15 rad/s. La barra mantiene su posición mediante un alambre horizontal *BC* conectado al eje y al extremo *B* de la barra. Determine la tensión en el alambre y la reacción en *A*.

SOLUCIÓN

Las fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ con origen en *G* y al par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Puesto que *G* describe un círculo horizontal de radio $\bar{r} = \frac{1}{2}L \cos \beta$ a la velocidad constante ω, se tiene

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_n = -\bar{r}\omega^2\mathbf{I} = -(\tfrac{1}{2}L \cos \beta)\omega^2\mathbf{I} = -(450 \text{ ft/s}^2)\mathbf{I}$$

$$m\bar{\mathbf{a}} = \frac{40}{g}(-450\mathbf{I}) = -(559 \text{ lb})\mathbf{I}$$



Determinación de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Se calcula primero la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. Si se utilizan los ejes centroidales principales de inercia *x*, *y*, *z*, se escribe

$$\bar{I}_x = \tfrac{1}{12}mL^2 \qquad \bar{I}_y = 0 \qquad \bar{I}_z = \tfrac{1}{12}mL^2$$

$$\omega_x = -\omega \cos \beta \qquad \omega_y = \omega \text{ sen } \beta \qquad \omega_z = 0$$

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_z\omega_z\mathbf{k}$$

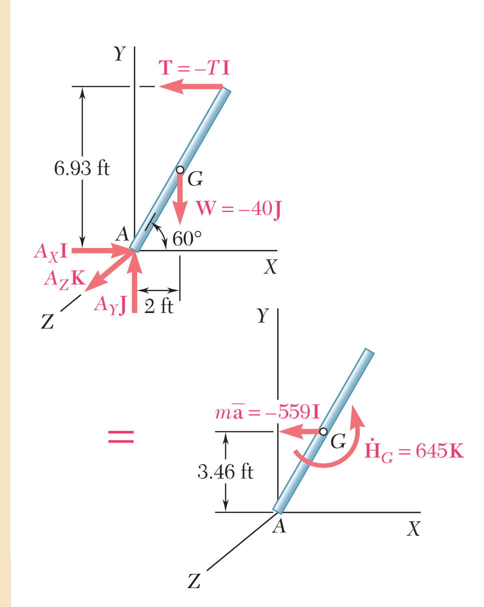
$$\mathbf{H}_G = -\tfrac{1}{12}mL^2\omega \cos \beta \; \mathbf{i}$$

La razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de $\mathbf{H}_G$ con respecto a los ejes de orientación fija se obtiene de la ecuación (18.22). Si se observa que la razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia en rotación *Gxyz* es cero, y que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la barra, se tiene

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = 0 + (-\omega \cos \beta \; \mathbf{i} + \omega \text{ sen } \beta \; \mathbf{j}) \times (-\tfrac{1}{12}mL^2\omega \cos \beta \; \mathbf{i})$$

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \tfrac{1}{12}mL^2\omega^2 \text{ sen } \beta \cos \beta \; \mathbf{k} = (645 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$$



Ecuaciones de movimiento. Si se expresa que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, se escribe

$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{M}_A)_{\text{ef}}$:

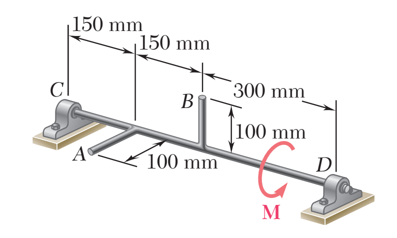
$$6.93\mathbf{J} \times (-T\mathbf{I}) + 2\mathbf{I} \times (-40\mathbf{J}) = 3.46\mathbf{J} \times (-559\mathbf{I}) + 645\mathbf{K}$$

$$(6.93T - 80)\mathbf{K} = (1934 + 645)\mathbf{K} \qquad T = 384 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{ef}}$: $\quad A_X\mathbf{I} + A_Y\mathbf{J} + A_Z\mathbf{K} - 384\mathbf{I} - 40\mathbf{J} = -559\mathbf{I}$

$$\mathbf{A} = -(175 \text{ lb})\mathbf{I} + (40 \text{ lb})\mathbf{J} \quad \blacktriangleleft$$

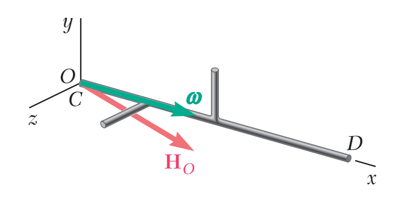
Observación. El valor de *T* podría haberse obtenido de $\mathbf{H}_A$ y la ecuación (18.28). Sin embargo, el método que se utilizó aquí también produce la reacción en *A*. Además, centró la atención en el efecto de la asimetría de la barra en la solución del problema al demostrar claramente que tanto el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\dot{\mathbf{H}}_G$ deben utilizarse para representar las fuerzas efectivas.



PROBLEMA RESUELTO 18.4

Dos barras A y B de 100 mm, cada una de 300 g de masa, se sueldan a la flecha CD que está soportada mediante cojinetes en C y D. Si se aplica a la flecha un par $\mathbf{M}$ de magnitud igual a 6 N · m, determine las componentes de las reacciones dinámicas en C y D en el instante en el que el eje ha alcanzado una velocidad angular de 1 200 rpm. Ignore el momento de inercia de la flecha.

SOLUCIÓN

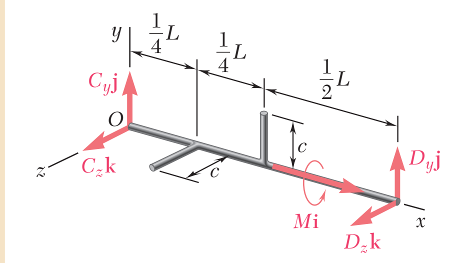


Cantidad de movimiento angular con respecto a *O*. Se asocia al cuerpo el sistema de referencia $Oxyz$ y se observa que los ejes elegidos no son ejes principales de inercia para el cuerpo. Puesto que el cuerpo gira alrededor del eje x, se tiene $\omega_x = \omega$ y $\omega_y = \omega_z = 0$. Sustituyendo en las ecuaciones (18.13),

$$H_x = I_x\omega \qquad H_y = -I_{xy}\omega \qquad H_z = -I_{xz}\omega$$
$$\mathbf{H}_O = (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\omega$$

Momentos de las fuerzas externas con respecto a *O*. Como el sistema de referencia gira con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, la ecuación (18.28) produce

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\ &= (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\alpha + \omega\mathbf{i} \times (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\omega \\ &= I_x\alpha\mathbf{i} - (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)\mathbf{j} - (I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)\mathbf{k} \qquad (1)\end{aligned}$$



Reacción dinámica en *D*. Las fuerzas externas son los pesos de los ejes y las barras, el par $\mathbf{M}$, las reacciones estáticas en C y D y las reacciones dinámicas en C y D. Puesto que los pesos y las reacciones estáticas están equilibrados, las fuerzas externas se reducen al par $\mathbf{M}$ y a las reacciones dinámicas $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ como se muestra en la figura. Al tomar los momentos con respecto a O, se tiene

$$\Sigma\mathbf{M}_O = L\mathbf{i} \times (D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}) + M\mathbf{i} = M\mathbf{i} - D_zL\mathbf{j} + D_yL\mathbf{k} \qquad (2)$$

Si se igualan los coeficientes del vector unitario $\mathbf{i}$ en (1) y (2)

$$M = I_x\alpha \qquad M = 2(\tfrac{1}{3}mc^2)\alpha \qquad \alpha = 3M/2mc^2$$

Al igualar los coeficientes de $\mathbf{k}$ y $\mathbf{j}$ en (1) y (2)

$$D_y = -(I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)/L \qquad D_z = (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)/L \qquad (3)$$

Al utilizar el teorema de ejes paralelos y notar que el producto de inercia de cada barra es cero con respecto a los ejes centroidales, se tiene

$$I_{xy} = \Sigma m\bar{x}\bar{y} = m(\tfrac{1}{2}L)(\tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{4}mLc$$
$$I_{xz} = \Sigma m\bar{x}\bar{z} = m(\tfrac{1}{4}L)(\tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{8}mLc$$

Al sustituir en (3) los valores que se encontraron para I_{xy}, I_{xz} y α:

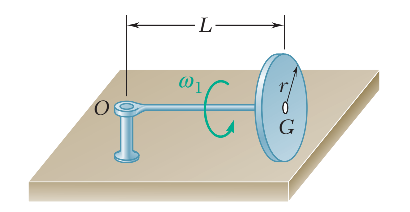
$$D_y = -\tfrac{3}{16}(M/c) - \tfrac{1}{4}mc\omega^2 \qquad D_z = \tfrac{3}{8}(M/c) - \tfrac{1}{8}mc\omega^2$$

Al sustituir ω = 1 200 rpm = 125.7 rad/s, c = 0.100 m, M = 6 N · m y m = 0.300 kg, se tiene

$$D_y = -129.8 \text{ N} \qquad D_z = -36.8 \text{ N} \quad ◀$$

Reacción dinámica en *C*. Utilizando el sistema de referencia asociado en D, se obtienen ecuaciones similares a las ecuaciones (3), las cuales producen

$$C_y = -152.2 \text{ N} \qquad C_z = -155.2 \text{ N} \quad ◀$$



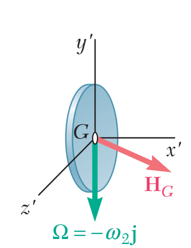
PROBLEMA RESUELTO 18.5

Un disco homogéneo de radio r y masa m se monta sobre un eje OG de longitud L y masa despreciable. El eje gira en el punto fijo O y el disco está restringido a rodar sobre un piso horizontal. Si el disco gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la velocidad constante ω_1 alrededor del eje, determine *a*) la fuerza (que se supone vertical) que ejerce el piso sobre el disco, *b*) la reacción en el pivote O.

SOLUCIÓN

Las fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado en G y al par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Recordando del problema resuelto 18.2 que el eje gira alrededor del eje y a la velocidad $\omega_2 = r\omega_1/L$, se escribe

$$m\bar{\mathbf{a}} = -mL\omega_2^2\mathbf{i} = -mL(r\omega_1/L)^2\mathbf{i} = -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} \qquad (1)$$



Determinación de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Recuérdese del problema resuelto 18.2 que la cantidad de movimiento angular del disco respecto a G es

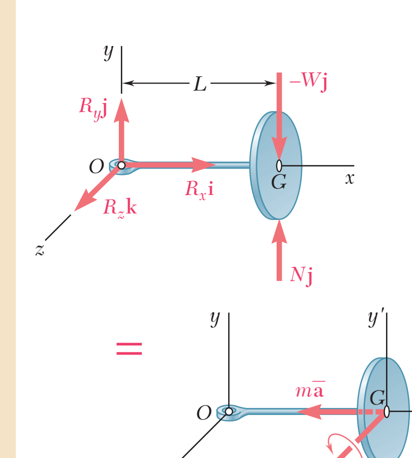
$$\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right)$$

donde $\mathbf{H}_G$ se descompone en componentes a lo largo de los ejes en rotación x', y', z', con x' a lo largo de OG y y' vertical. La razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de $\mathbf{H}_G$ con respecto a los ejes de orientación fija se obtiene de la ecuación (18.22). Al notar que la razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'}$ de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia en rotación es cero, y que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia es

$$\boldsymbol{\Omega} = -\omega_2\mathbf{j} = -\frac{r\omega_1}{L}\mathbf{j}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \\ &= 0 - \frac{r\omega_1}{L}\mathbf{j} \times \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k} \qquad (2)\end{aligned}$$



Ecuaciones de movimiento. Si se expresa que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, se escribe

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{M}_O)_{\text{ef}}: \qquad L\mathbf{i} \times (N\mathbf{j} - W\mathbf{j}) = \dot{\mathbf{H}}_G$$

$$(N - W)L\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k}$$

$$N = W + \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2 \qquad \mathbf{N} = [W + \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2]\mathbf{j} \quad (3) \blacktriangleleft$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{ef}}: \qquad \mathbf{R} + N\mathbf{j} - W\mathbf{j} = m\bar{\mathbf{a}}$$

Al sustituir N de (3), y $m\bar{\mathbf{a}}$ de (1) y resolver para $\mathbf{R}$, se tiene

$$\mathbf{R} = -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = -\frac{mr^2\omega_1^2}{L}\left(\mathbf{i} + \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se pedirá que se resuelvan problemas que implican el *movimiento tridimensional de cuerpos rígidos.* El método empleado es básicamente el mismo que se aplicó en el capítulo 16, donde se estudió el movimiento plano de cuerpos rígidos. Se dibujará una ecuación de diagramas de cuerpo libre que muestre que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas, y se igualarán las sumas de componentes y las sumas de momentos en ambos lados de esta ecuación. Sin embargo, en este caso el sistema de fuerzas efectivas se representará mediante el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y un vector par $\dot{\mathbf{H}}_G$, cuya determinación se explicará en los párrafos 1 y 2 siguientes.

Para resolver un problema que implique el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, se seguirán estos pasos:

1. *Determinar la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo con respecto a su centro de masa G* a partir de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija. Ésta es una operación que se aprendió en la lección anterior. Sin embargo, puesto que la configuración del cuerpo cambiará con el tiempo, ahora será necesario utilizar un sistema de ejes auxiliares $Gx'y'z'$ (figura 18.9) para calcular las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo. Estos ejes pueden estar rígidamente asociados al cuerpo, en cuyo caso su velocidad angular es igual a $\boldsymbol{\omega}$ [problemas resueltos 18.3 y 18.4] o quizá tengan una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ propia [problema resuelto 18.5].

Recuerde lo siguiente de la lección precedente:

a) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en G, úselos como ejes de coordenadas x', y' y z', ya que los productos de inercia correspondientes del cuerpo serán iguales a cero. (Advierta que si el cuerpo es simétrico con respecto a un eje, estos ejes no necesitan estar asociados rígidamente al cuerpo.) Descomponga $\boldsymbol{\omega}$ en componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ y $\omega_{z'}$ a lo largo de estos ejes y calcule los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$. Las componentes correspondientes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ son

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

b) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en G, será necesario utilizar las ecuaciones (18.7) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$. Estas ecuaciones requieren el cálculo previo de los *productos de inercia* del cuerpo, así como de sus momentos de inercia con respecto a los ejes seleccionados.

2. *Calcular la razón de cambio de $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$.* Advierta que este sistema de referencia tiene una *orientación fija* en tanto que el sistema de referencia $Gx'y'z'$ que se utilizó al calcular las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$ era un *sistema de referencia en rotación.* Hay que recurrir al análisis de la sección 15.10 de la razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación. Al recordar la ecuación (15.31), la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ se expresará de la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.22}$$

El primer término en el miembro del lado derecho de la ecuación (18.22) representa la razón de cambio de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia en rotación $Gx'y'z'$. Este término se anula si $\boldsymbol{\omega}$ y, en consecuencia, $\mathbf{H}_G$ permanece constante tanto en magnitud como en dirección cuando se observa desde ese sistema de referencia. Por otro lado, si cualesquiera de las derivadas respecto al tiempo $\dot{\omega}_{x'}$, $\dot{\omega}_{y'}$ y $\dot{\omega}_z$ es diferente de cero, también serán

(*continúa*)

diferentes de cero, $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'}$ y sus componentes deberán determinarse al diferenciar las ecuaciones (18.10) con respecto a t. Finalmente, recuérdese que si el sistema de referencia en rotación está rígidamente asociado al cuerpo, su velocidad angular será la misma que la del cuerpo, y $\mathbf{\Omega}$ puede sustituirse por $\boldsymbol{\omega}$.

3. Dibujar la ecuación de diagramas de cuerpo libre para el cuerpo rígido, que muestre que el sistema de fuerzas externas ejercidas sobre el cuerpo es equivalente al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado en G y el vector par $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.11). Al igualar las componentes en cualquier dirección y los momentos alrededor de cualquier punto, es posible escribir hasta seis ecuaciones de movimiento escalares e independientes [problemas resueltos 18.3 y 18.5].

4. Al resolver problemas que implican el movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un punto fijo O, es posible que se encuentre conveniente utilizar la siguiente ecuación, que se dedujo en la sección 18.7, la cual elimina las componentes de la reacción en el soporte O,

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

donde el primer término en el miembro del lado derecho representa la razón de cambio de $\mathbf{H}_O$ con respecto al sistema de referencia en rotación $Oxyz$, y donde $\mathbf{\Omega}$ es la velocidad angular de ese sistema de referencia.

5. Cuando se determinen las reacciones en los cojinetes de una flecha rotatoria, recurra a la ecuación (18.28) y siga estos pasos:

a) Coloque el punto fijo O en uno de los dos cojinetes que sostienen la flecha y sitúe el sistema de referencia en rotación $Oxyz$ en la flecha, con uno de los ejes dirigido a lo largo de ella. Suponiendo, por ejemplo, que se ha alineado con la flecha al eje x, se tendrá $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}$ [problema resuelto 18.4].

b) Puesto que los ejes elegidos no serán, en la mayoría de los casos, los ejes principales de inercia en O, es necesario calcular los productos *de inercia* de la flecha, así como sus momentos de inercia, con respecto a estos ejes, y utilizar las ecuaciones (18.13) para determinar $\mathbf{H}_O$. Suponiendo otra vez que el eje x se ha alineado con la flecha, las ecuaciones (18.13) se reducen a

$$H_x = I_x\omega \qquad H_y = -I_{yz}\omega \qquad H_z = -I_{zx}\omega \tag{18.13'}$$

la cual muestra que $\mathbf{H}_O$ *no estará dirigida a lo largo de la flecha.*

c) Para obtener $\dot{\mathbf{H}}_O$ sustituya las expresiones obtenidas en la ecuación (18.28) y deje que $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}$. Si la velocidad angular de la flecha es constante, el primer término del miembro del lado derecho de la ecuación se anulará. Sin embargo, si la flecha tiene una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{i}$, el primer término no será cero y debe determinarse diferenciando con respecto a t las expresiones en (18.13′). El resultado serán ecuaciones similares a las (18.13′), con α en lugar de ω.

d) Puesto que el punto O coincide con uno de los cojinetes, las tres ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación (18.28) pueden resolverse para las componentes de la reacción dinámica en el otro cojinete. Si el centro de masa G de la flecha se localiza en la línea que une los dos cojinetes, la fuerza efectiva $m\bar{\mathbf{a}}$ será cero. Al dibujar la ecuación de diagramas de cuerpo libre de la flecha, se puede observar en ese caso que las componentes de la reacción dinámica del primer cojinete deben ser iguales y opuestas a las que acaba de determinar. Si G no se ubica sobre la línea que une a los dos cojinetes, es posible determinar la reacción en el primer cojinete colocando el punto fijo O en el segundo cojinete y repitiendo el procedimiento anterior [problema resuelto 18.4]; o también puede obtener ecuaciones de movimiento adicionales de la ecuación de diagramas de cuerpo libre de la flecha, asegurándose de determinar e incluir primero la fuerza efectiva $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicada en G.

e) La mayoría de los problemas requieren la determinación de las "reacciones dinámicas" en los cojinetes, esto es, para las *fuerzas adicionales* que ejercen los cojinetes sobre la flecha cuando ésta gira. Al determinar las reacciones dinámicas, ignore el efecto de las cargas estáticas, como el peso de la flecha.

Problemas

18.55 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_D$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_D$ del ensamble del problema 18.1.

18.56 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del disco del problema 18.2.

18.57 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_A$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_A$ de la placa del problema 18.3, si se sabe que su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ permanece constante.

18.58 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del disco del problema 18.4.

18.59 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del disco del problema 18.5.

18.60 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_A$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_A$ del disco del problema 18.6.

18.61 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_D$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_D$ del ensamble del problema 18.1, suponiendo que en el instante considerado el ensamble tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (12 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = (96 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.

18.62 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_D$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_D$ del ensamble del problema 18.1, suponiendo que en el instante considerado el ensamble tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (12 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = -(96 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.

18.63 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_A$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_A$ de la placa del problema 18.3, suponiendo que ésta tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{j}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{j}$.

18.64 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del disco del problema 18.4, suponi1178endo que en el instante considerado el ensamble tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{j}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{j}$.

18.65 Una placa triangular homogénea y delgada con masa de 2.5 kg está soldada a una flecha vertical ligera, la cual se sostiene mediante cojinetes en A y B. Si la placa gira a la razón constante $\omega = 8$ rad/s, determine las reacciones dinámicas en A y B.

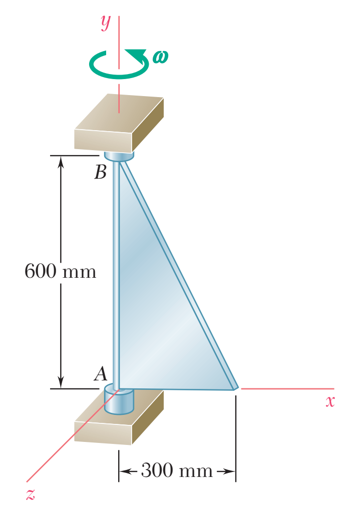


Figura P18.65

18.66 Una barra delgada y uniforme AB con masa m y una flecha vertical CD, cada una con longitud $2b$, se sueldan entre sí en sus puntos medios G. Si la flecha gira a la razón constante ω, determine las reacciones dinámicas en C y D.

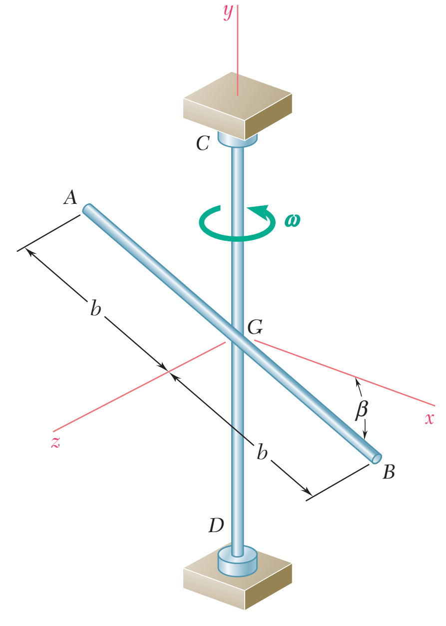


Figura P18.66

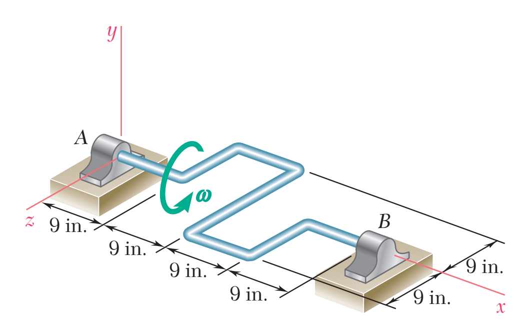


Figura P18.67

18.67 La flecha de 16 lb que se muestra tiene una sección transversal uniforme. Si la flecha gira a la razón constante $\omega = 12$ rad/s, determine las reacciones dinámicas en A y B.

18.68 El ensamble que se muestra consta de piezas de lámina de aluminio de espesor uniforme y de un peso total de 2.7 lb soldadas a una flecha ligera soportada mediante los cojinetes A y B. Si se sabe que el ensamble gira a la razón constante $\omega = 240$ rpm, determine las reacciones dinámicas en A y B.

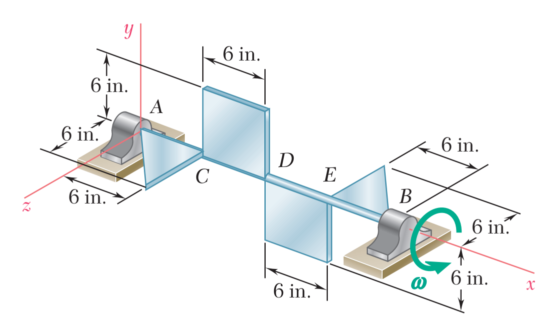


Figura P18.68

18.69 Cuando el neumático de 18 kg que se muestra en la figura se monta en una máquina de balanceo y se hace girar a 12.5 rev/s, se encuentra que las fuerzas ejercidas por el neumático sobre la máquina son equivalentes a un sistema fuerza-par consistente en una fuerza $\mathbf{F} = (160 \text{ N})\mathbf{j}$ aplicada en C y un par $\mathbf{M}_C = (14.7 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$, donde los vectores unitarios forman una tríada que gira con el neumático. *a*) Determine la distancia desde el eje de rotación hasta el centro de masa del neumático y los productos de inercia I_{xy} e I_{zx}. *b*) Si sólo se usan dos masas de corrección para balancear estática y dinámicamente al neumático, ¿cuáles deben ser los valores de estas masas y en cuál de los puntos A, B, D o E deben colocarse?

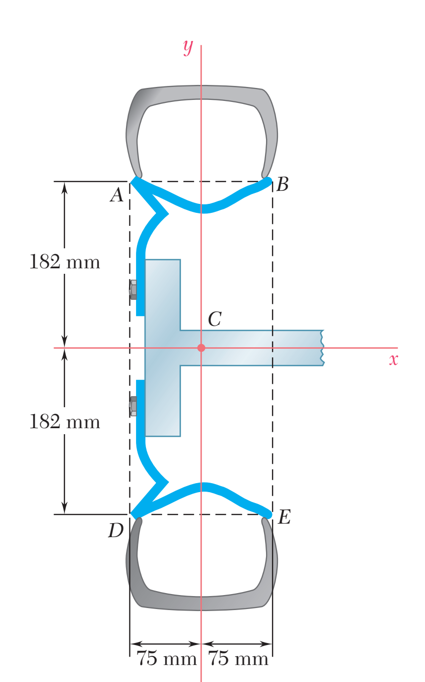


Figura *P18.69* y *P18.70*

18.70 Después de colocar el neumático de 18 kg en la máquina de balanceo y hacerlo girar a 15 rev/s, el mecánico determina que para balancear un neumático tanto estática como dinámicamente debe utilizar dos masas de corrección, una de 170 g situada en B y otra de 56 g ubicada en D. Utilizando un sistema de referencia derecho que gira con la rueda (con el eje z perpendicular al plano de la figura), determine antes de las masas correctivas que se han agregado *a*) la distancia desde el eje de rotación hasta el centro de masa del neumático y los productos de inercia I_{xy} e I_{zx}, *b*) el sistema fuerza-par en C equivalente a las fuerzas ejercidas por el neumático sobre la máquina.

18.71 Si se sabe que la placa del problema 18.65 está inicialmente en reposo ($\omega = 0$) cuando se aplica a la placa un par de momento $\mathbf{M}_0 = (0.75 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$, determine *a*) la aceleración angular resultante de la placa, *b*) las reacciones dinámicas en los puntos A y B inmediatamente después de que el par se ha aplicado.

18.72 Si se sabe que el ensamble del problema 18.66 está inicialmente en reposo ($\omega = 0$) cuando se aplica a la flecha CD un par de momento $\mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{j}$, determine *a*) la aceleración angular resultante del ensamble, *b*) las reacciones dinámicas en los puntos C y D inmediatamente después de que el par se ha aplicado.

18.73 El componente de lámina de metal que se muestra en la figura tiene un grosor uniforme y una masa de 600 g. Se conecta a un eje ligero soportado por cojinetes en *A* y *B* separados por una distancia de 150 mm. El componente está en reposo cuando se somete a un par $\mathbf{M}_0$ como se muestra en la figura. Si la aceleración angular resultante es $\boldsymbol{\alpha} = (12 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$, determine *a*) el par $\mathbf{M}_0$, *b*) las reacciones dinámicas en *A* y *B* inmediatamente después de haber aplicado el par.

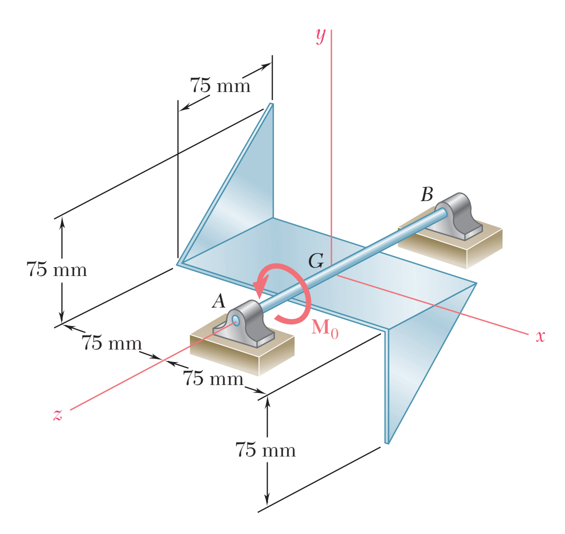


Figura *P18.73*

18.74 Para el componente de lámina de metal del problema 18.73, determine *a*) la velocidad angular del componente 0.6 s después de que se le ha aplicado el par M_0, *b*) la magnitud de las reacciones dinámicas en *A* y *B* en ese instante.

18.75 La flecha del problema 18.67 se encuentra inicialmente en reposo ($\boldsymbol{\omega} = 0$), cuando se le aplica un par $\mathbf{M}_0$. Si la aceleración angular resultante de la flecha es $\boldsymbol{\alpha} = (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$, determine *a*) el par $\mathbf{M}_0$, *b*) las reacciones dinámicas en *A* y *B* inmediatamente después de que se ha aplicado el par.

18.76 El ensamble del problema 18.68 se encuentra inicialmente en reposo ($\boldsymbol{\omega} = 0$), cuando se aplica un par $\mathbf{M}_0$ al eje *AB*. Si la aceleración angular resultante del ensamble es $\boldsymbol{\alpha} = (150 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$, determine *a*) el par $\mathbf{M}_0$, *b*) las reacciones dinámicas en *A* y *B* inmediatamente después de que se ha aplicado el par.

18.77 El ensamble que se muestra en la figura pesa 12 lb y está compuesto por cuatro placas semicirculares y delgadas de aluminio de 16 in. de diámetro soldadas a una flecha ligera *AB* de 40 in. de largo. El ensamble se encuentra en reposo ($\boldsymbol{\omega} = 0$) en el instante $t = 0$ cuando un par $\mathbf{M}_0$ se le aplica en la forma indicada, ocasionando que el ensamble realice una revolución completa en 2 s. Determine *a*) el par $\mathbf{M}_0$, *b*) las reacciones dinámicas en *A* y *B* en $t = 0$.

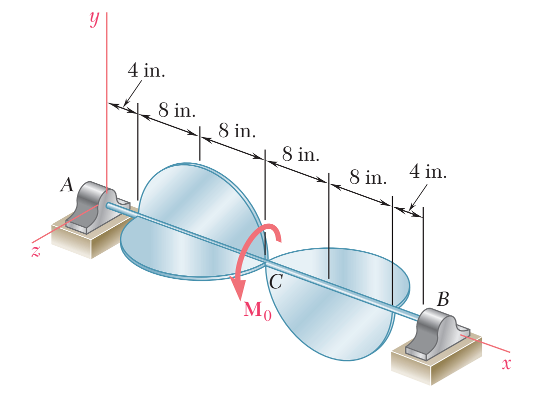


Figura P18.77

18.78 Para el ensamble del problema 18.77, determine las reacciones dinámicas en *A* y *B* cuando $t = 2$ s.

18.79 El volante de un motor de automóvil, que está rígidamente unido al cigüeñal, es equivalente a una placa de acero de 400 mm de diámetro y 15 mm de grosor. Determine la magnitud del par que ejerce el volante sobre el cigüeñal horizontal cuando el automóvil recorre una curva sin peralte de 200 m de radio a una velocidad de 90 km/h, con el volante girando a 2 700 rpm. Suponga que el automóvil tiene *a*) tracción trasera con el motor montado longitudinalmente, *b*) tracción delantera con el motor montado de manera transversal. (Densidad del acero = 7 860 kg/m^3.)

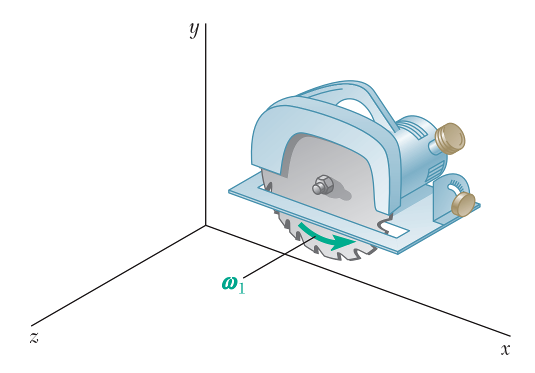


Figura *P18.81*

18.80 La hélice con cuatro aspas de un avión pesa 160 kg y tiene un radio de giro de 800 mm. Si se sabe que la hélice gira a 1 600 rpm cuando el avión viaja en una trayectoria circular vertical de 600 m de radio a 540 km/h, determine la magnitud del par ejercido por la hélice sobre el eje debido a la rotación del avión.

18.81 La hoja de una sierra portátil y el rotor de su motor tienen un peso total de 2.5 lb y un radio de giro combinado de 1.5 in. Si la hoja gira como se indica a la razón $\omega_1 = 1\,500$ rpm, determine la magnitud y dirección del par **M** que debe ejercer un trabajador sobre la agarradera de la sierra para girarla con una velocidad angular constante $\omega_2 = -(2.4 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

18.82 El aspa de un ventilador oscilante y el rotor de su motor tienen un peso total de 8 oz y un radio de giro combinado de 3 in. Se soportan mediante cojinetes en *A* y *B*, separados 5 in. y giran a la velocidad $\omega_1 = 1\,800$ rpm. Determine las reacciones dinámicas en *A* y *B* cuando la carcasa del motor tiene una velocidad angular $\omega_2 = (0.6 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

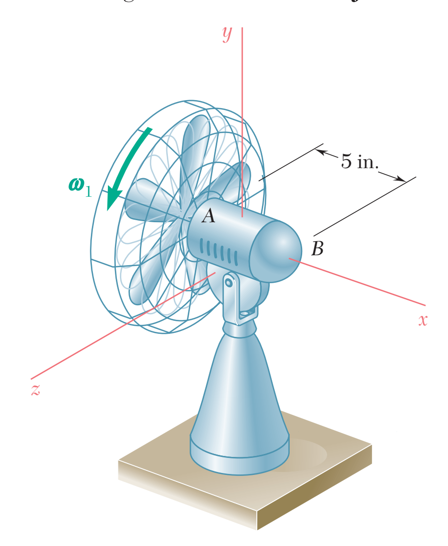


Figura *P18.82*

18.83 Cada neumático de un automóvil tiene un peso de 22 kg, un diámetro de 575 mm y un radio de giro de 225 mm. El automóvil viaja por una curva sin peralte de 150 m de radio a una velocidad de 95 km/h. Si la distancia transversal entre los neumáticos es de 1.5 m, determine la fuerza normal adicional producida por el movimiento del automóvil y ejercida por el suelo sobre cada uno de los neumáticos externos.

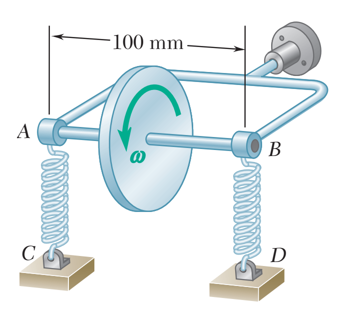


Figura P18.84

18.84 Se muestra la estructura básica de cierto tipo de indicador de viraje de avión. Cada resorte tiene una constante de 500 N/m, y el disco uniforme de 200 g y radio de 40 mm gira a la velocidad de 10 000 rpm. Los resortes se alargan y ejercen fuerzas verticales iguales en la horquilla *AB* cuando el avión viaja en una trayectoria recta. Determine el ángulo que girará la horquilla cuando el piloto ejecute un giro horizontal de 750 m de radio hacia la derecha a una velocidad de 800 km/h. Indique si el punto *A* ascenderá o descenderá.

18.85 Una placa semicircular uniforme de 120 mm de radio se articula en los puntos A y B a una horquilla que gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje vertical. Determine *a*) el ángulo β que forma la placa con el eje x horizontal cuando $\omega = 15$ rad/s, *b*) el valor más grande de ω para el cual la placa permanece vertical ($\beta = 90°$).

18.86 Una placa semicircular uniforme de 120 mm de radio se articula en los puntos A y B a una horquilla que gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del eje vertical. Determine el valor de ω para el cual la placa forma un ángulo constante $\beta = 50°$ con el eje x horizontal.

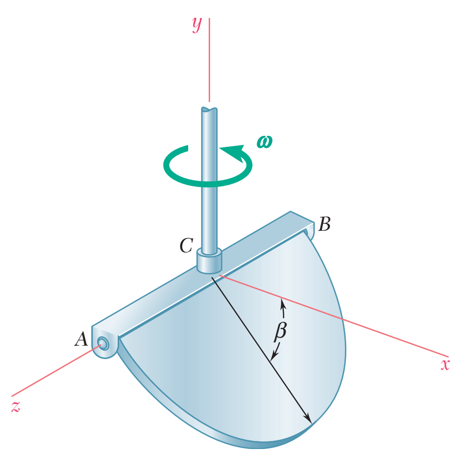
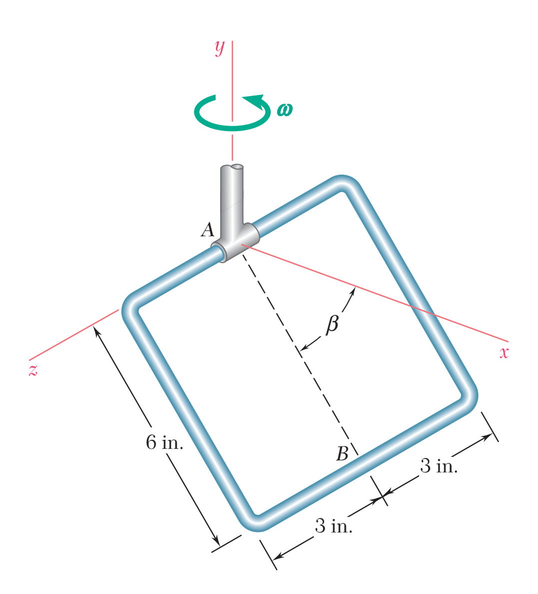


Figura P18.85 y P18.86



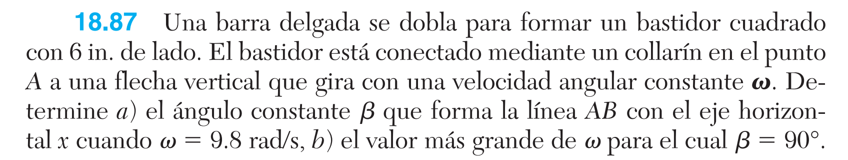


Figura P18.87 y P18.88

18.87 Una barra delgada se dobla para formar un bastidor cuadrado con 6 in. de lado. El bastidor está conectado mediante un collarín en el punto A a una flecha vertical que gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine *a*) el ángulo constante β que forma la línea AB con el eje horizontal x cuando $\omega = 9.8$ rad/s, *b*) el valor más grande de ω para el cual $\beta = 90°$.

18.88 Una barra delgada se dobla para formar un bastidor cuadrado con 6 in. de lado. El bastidor está conectado mediante un collarín en el punto A a una flecha vertical que gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine el valor de ω para el cual la línea AB forma un ángulo $\beta = 48°$ con el eje horizontal x.

18.89 El engrane A de 950 g está restringido a rodar sobre el engrane fijo B, pero tiene la libertad de girar en torno al eje AD, el cual tiene 400 mm de longitud y una masa despreciable. El eje AD se conecta mediante una horquilla a la flecha vertical DE que gira como se indica en la figura con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$. Si se supone que el engrane A puede aproximarse mediante un disco delgado de 80 mm de radio, determine el valor máximo permisible de ω_1 si el engrane A no pierde contacto con el engrane B.

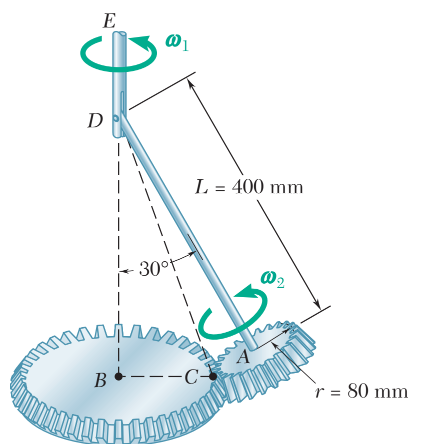


Figura P18.89

18.90 Determine la fuerza **F** ejercida por el engrane B sobre el engrane A del problema 18.89 cuando el eje DE gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1 = 4$ rad/s. (*Sugerencia*: La fuerza **F** debe ser perpendicular a la línea trazada desde D hasta C.)

18.91 y 18.92 La barra esbelta AB se conecta mediante una horquilla a un brazo BCD que gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de la línea central de su porción vertical CD. Determine la magnitud de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

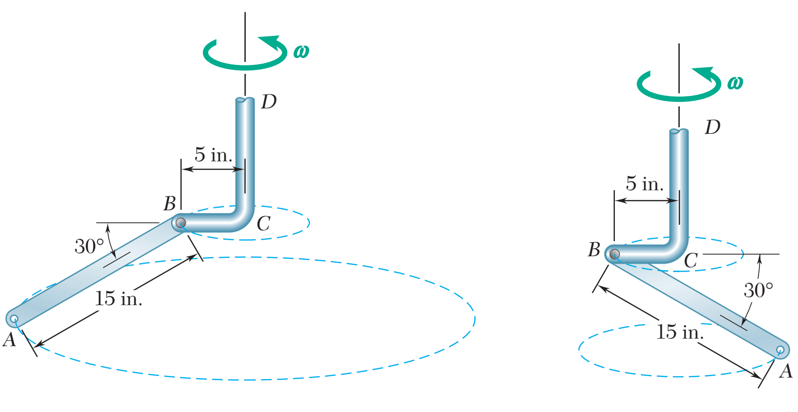


Figura P18.91 **Figura P18.92**

18.93 Dos discos, cada uno de 5 kg de masa y 100 mm de radio, giran como se muestra a la razón $\omega_1 = 1\,500$ rpm alrededor de una barra AB de masa despreciable que gira alrededor de un eje vertical z a la razón $\omega_2 = 45$ rpm. *a*) Determine las reacciones dinámicas en los puntos C y D. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que se invierte la dirección de giro del disco B.

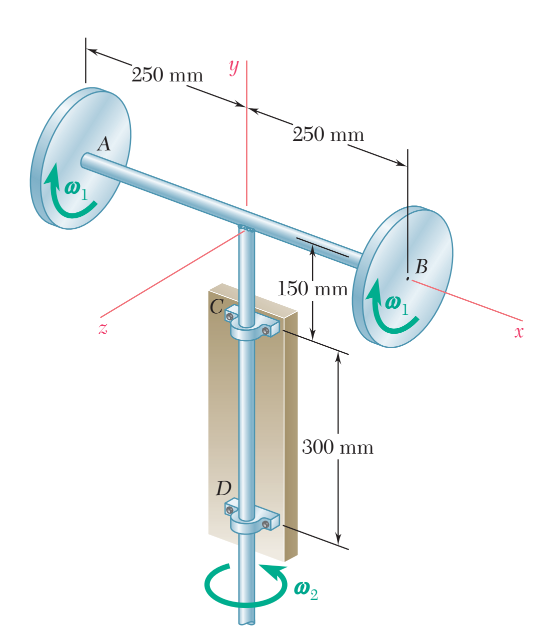


Figura P18.93 y P18.94

18.94 Dos discos, cada uno de 5 kg de masa y 100 mm de radio, giran como se muestra a una velocidad $\omega_1 = 1\,500$ rpm alrededor de una barra AB de masa despreciable que gira alrededor de un eje vertical a la razón ω_2. Determine el valor máximo permisible de ω_2 si las reacciones dinámicas en C y D no deben exceder 250 N.

18.95 El disco de 10 oz. que se muestra gira a la razón $\omega_1 = 750$ rpm, mientras el eje *AB* gira como se muestra con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ de 6 rad/s. Determine las reacciones dinámicas en *A* y *B*.

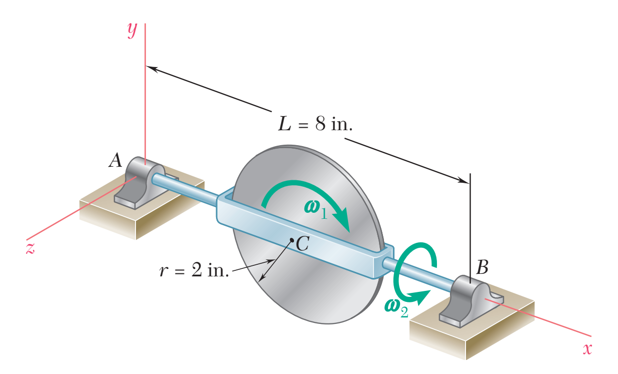


Figura P18.95 y P18.96

18.96 El disco de 10 oz. que se muestra gira a la razón $\omega_1 = 750$ rpm, mientras el eje *AB* gira como se muestra con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$. Determine la magnitud máxima permisible de $\boldsymbol{\omega}_2$ si cada una de las reacciones dinámicas en *A* y *B* no debe exceder 0.25 lb.

18.97 Un disco delgado de peso $W = 10$ lb gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ con respecto al brazo *ABC*, el cual gira a su vez con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ alrededor del eje *y*. Si se sabe que $\omega_1 = 5$ rad/s, que $\boldsymbol{\omega}_2 = 15$ rad/s y que ambas son constantes, determine el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica en el soporte en *A*.

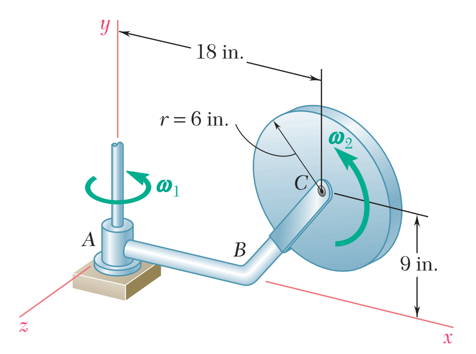


Figura P18.97

18.98 Un disco homogéneo de peso $W = 6$ lb gira a la velocidad constante $\omega_1 = 16$ rad/s con respecto al brazo *ABC*, el cual está soldado a la flecha *DCE* que gira a la velocidad constante $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine las reacciones dinámicas en *D* y *E*.

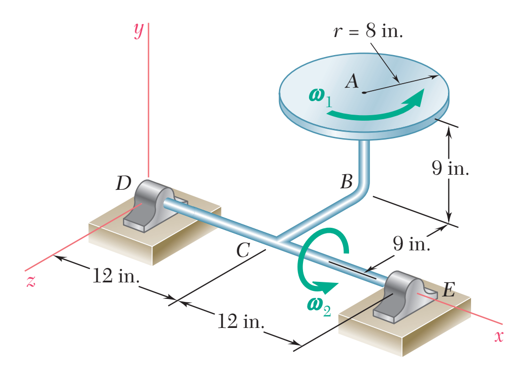


Figura *P18.98*

***18.99** Un tablero publicitario de 48 kg, longitud $2a = 2.4$ m y ancho $2b = 1.6$ m se mantiene en rotación a una velocidad constante ω_1 alrededor de su eje horizontal mediante un pequeño motor eléctrico unido en *A* al bastidor *ACB*. El mismo bastidor se mantiene en rotación a una velocidad constante ω_2 alrededor de un eje vertical por medio de un segundo motor unido en *C* a la columna *CD*. Si el tablero y el bastidor realizan una revolución completa en 6 s y 12 s, respectivamente, exprese, como función del ángulo θ, la reacción dinámica ejercida sobre la columna *CD* por su soporte en *D*.

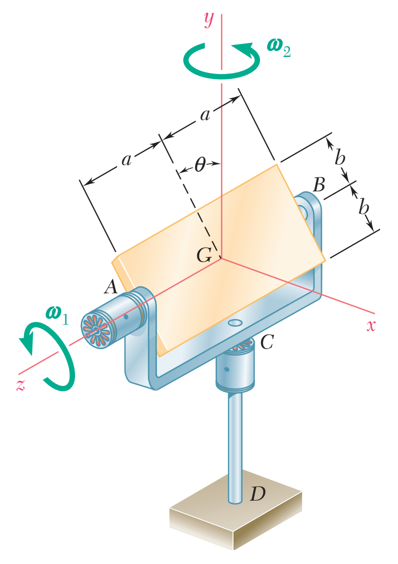


Figura P18.99

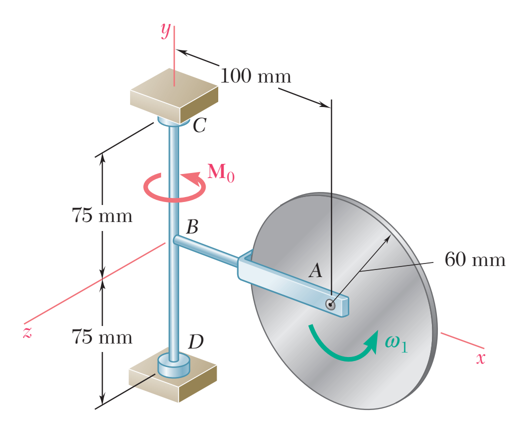


Figura P18.101 y P18.102

***18.100** Para el sistema del problema 18.99, demuestre que *a*) la reacción dinámica en *D* es independiente de la longitud $2a$ del panel, *b*) la relación M_1/M_2 de las magnitudes de los pares ejercidos por los motores en *A* y *C*, respectivamente, es independiente de las dimensiones y masa del tablero y es igual a $\omega_2/2\omega_1$ en cualquier instante determinado.

18.101 Un disco homogéneo de 3 kg y 60 mm de radio gira como se muestra en la figura a la velocidad $\boldsymbol{\omega}_1 = 60$ rad/s. El disco se sostiene mediante la varilla *AB* con una horquilla en el extremo, la cual está soldada a la flecha vertical *CBD*. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica un par $\mathbf{M}_0 = (0.40 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$ a la flecha durante 2 s y después se retira. Determine las reacciones dinámicas en *C* y *D* después de haber retirado el par.

18.102 Un disco homogéneo de 3 kg y 60 mm de radio gira como se muestra en la figura a la velocidad $\boldsymbol{\omega}_1 = 60$ rad/s. El disco se sostiene mediante la varilla *AB* con una horquilla en el extremo, la cual está soldada a la flecha vertical *CBD*. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica, de la manera mostrada, un par $\mathbf{M}_0$ a la flecha durante 3 s y después se retira. Si la velocidad angular máxima alcanzada por la flecha es de 18 rad/s, determine *a*) el par $\mathbf{M}_0$, *b*) las reacciones dinámicas en *C* y *D* después de haber retirado el par.

18.103 Para el disco del problema 18.97 determine *a*) el par $M_1\mathbf{j}$ que debe aplicarse al brazo *ABC* para darle una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_1 = -(7.5 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$ cuando $\boldsymbol{\omega}_1 = 5$ rad/s, si se sabe que el disco gira a la velocidad constante $\boldsymbol{\omega}_2 = 15$ rad/s, *b*) el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica en *A* en ese instante. Suponga que *ABC* tiene una masa insignificante.

18.104 Se supone que en el instante mostrado la flecha *DCE* del problema 18.98 tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2 = (8 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_2 = (6 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$. Si se recuerda que el disco gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_1 = (16 \text{ rad/s})\mathbf{j}$, determine *a*) el par que debe aplicarse a la flecha *DCE* para producir la aceleración angular dada, *b*) las reacciones dinámicas correspondientes en *D* y *E*.

18.105 Un disco homogéneo de 2.5 kg y 80 mm de radio gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ con respecto al brazo *ABC*, el cual está soldado al eje *DCE* que rota en la forma mostrada a la velocidad constante $\boldsymbol{\omega}_2 = 12$ rad/s. La fricción en el cojinete en *A* ocasiona que ω_1 disminuya a una razón de 15 rad/s^2. Determine las reacciones dinámicas en *D* y *E* en el instante en el que ω_1 ha disminuido hasta 50 rad/s.

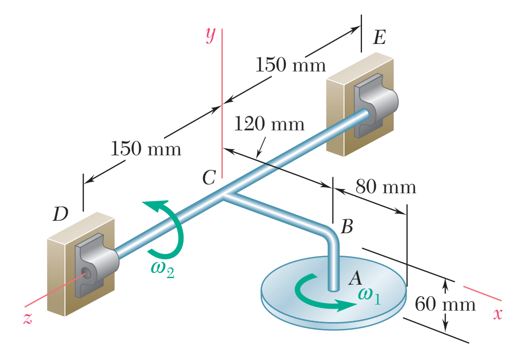


Figura *P18.105*

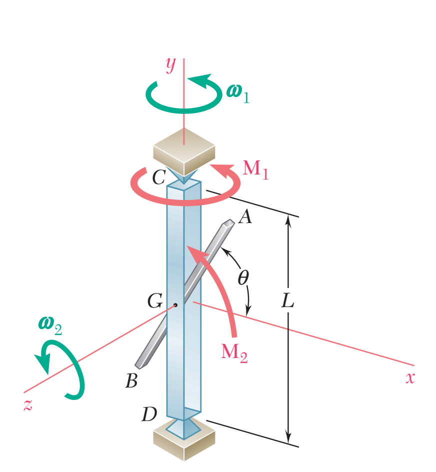


Figura *P18.106*

****18.106*** Una varilla delgada homogénea *AB* de masa *m* y longitud *L* está hecha para girar a una razón constante ω_2 alrededor del eje horizontal *z*, mientras que el bastidor *CD* se construyó para girar a la razón constante ω_1 alrededor del eje *y*. Exprese como una función del ángulo θ *a*) el par $\mathbf{M}_1$ requerido para mantener la rotación del bastidor, *b*) el par $\mathbf{M}_2$ requerido para mantener la rotación de la varilla, *c*) las reacciones dinámicas en los soportes *C* y *D*.

*18.9. MOVIMIENTO DE UN GIROSCOPIO. ÁNGULOS DE EULER

Un *giroscopio* consiste, esencialmente, en un rotor que puede girar libremente alrededor de su eje geométrico. Cuando está montado en una suspensión de Cardan (figura 18.15), es posible que asuma cualquier orientación, pero su centro de masa debe permanecer fijo en el espacio. Para definir la posición de un giroscopio en un instante dado, se elige un sistema de referencia fijo $OXYZ$, con el origen O localizado en el centro de masa del giroscopio y el eje Z dirigido a lo largo de la línea definida por los cojinetes A y A' del balancín externo. Considérese una posición de referencia del giroscopio en la cual los dos balancines y un diámetro dado DD' del rotor se ubican en el plano fijo YZ (figura 18.15*a*). El giroscopio puede llevarse de su posición de referencia a cualquier posición arbitraria (figura 18.15*b*) por medio de los siguientes pasos: (1) una rotación de un ángulo ϕ del balancín exterior alrededor del eje AA', (2) una rotación θ del balancín interior alrededor de BB' y (3) una rotación ψ del rotor alrededor de CC'. Los ángulos ϕ, θ y ψ reciben el nombre de *ángulos de Euler*; éstos caracterizan por completo la posición del giroscopio en cualquier instante determinado. Sus derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ definen, de manera respectiva, la velocidad de *precesión,* la velocidad de *nutación* y la velocidad de *giro* del giroscopio en el instante considerado.

Para calcular las componentes de la velocidad angular y de la cantidad de movimiento angular del giroscopio, se usará un sistema de ejes en rotación *Oxyz ubicado en el balancín interno,* con el eje y a lo largo de BB' y el eje z a lo largo de CC' (figura 18.16). Éstos son los ejes principales de inercia del giroscopio, y aunque siguen su precesión y nutación, sin embargo, no giran; por esa razón, son más convenientes que el uso de ejes montados en verdad en el giroscopio. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del giroscopio con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se expresará ahora como la suma de tres velocidades angulares parciales correspondientes, respectivamente, a la precesión, la nutación y el giro del giroscopio. Si se denota por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes en rotación, y por $\mathbf{K}$ el vector unitario a lo largo del eje fijo Z, se tiene

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\psi}\mathbf{k} \tag{18.33}$$

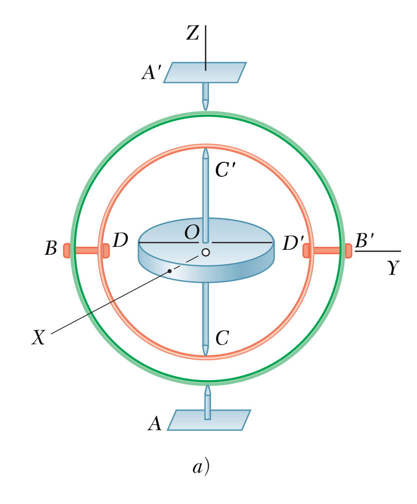
Puesto que las componentes del vector que se obtuvieron para $\boldsymbol{\omega}$ en (18.33) no son ortogonales (figura 18.16), el vector unitario $\mathbf{K}$ se descompondrá en componentes a lo largo de los ejes x y z; se escribe

$$\mathbf{K} = -\text{sen}\ \theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{k} \tag{18.34}$$

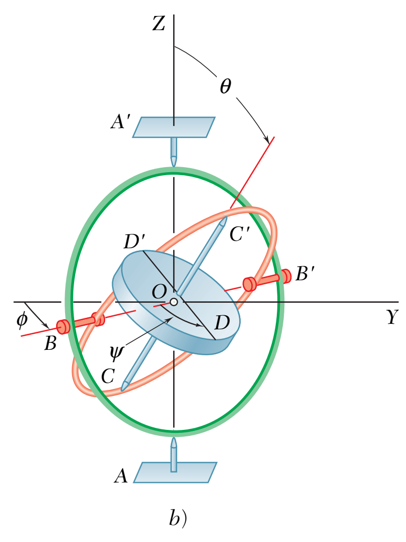
y al sustituir $\mathbf{K}$ en (18.33),

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi}\ \text{sen}\ \theta\ \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\mathbf{k} \tag{18.35}$$

Puesto que los ejes de coordenadas son ejes principales de inercia, las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ pueden obtenerse al multiplicar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ por los momentos de iner-



a)



b)

Figura 18.15

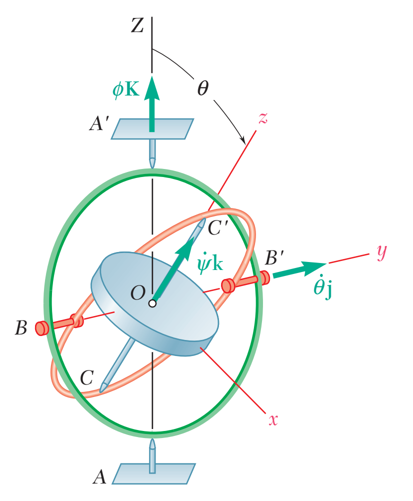


Figura 18.16

cia del rotor alrededor de los ejes x, y y z, respectivamente. Al denotar por I el momento de inercia del rotor alrededor de su eje de giro, por I' su momento de inercia con respecto al eje transversal que pasa por O, e ignorar la masa de los balancines, se escribe

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + I'\dot{\theta}\mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \tag{18.36}$$

Si se recuerda que los ejes en rotación se asocian al balancín interno y, por ello, se expresa su velocidad angular como la suma

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{j} \tag{18.37}$$

o, al sustituir **K** de (18.34),

$$\mathbf{\Omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \, \mathbf{k} \tag{18.38}$$

Al sustituir $\mathbf{H}_O$ y $\mathbf{\Omega}$ de (18.36) y (18.38) en la ecuación

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

se obtienen las tres ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I'(\ddot{\phi} \text{ sen } \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) + I\dot{\theta} \, (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ \Sigma M_y &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \text{ sen } \theta \cos \theta) + I\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ \Sigma M_z &= I \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned} \tag{18.39}$$



Fotografía 18.5 Un giroscopio puede usarse para medir la orientación y es capaz de mantener la misma dirección absoluta en el espacio.

Las ecuaciones (18.39) definen el movimiento de un giroscopio sujeto a un sistema dado de fuerzas cuando se ignoran las masas de sus balancines. También es posible usarlas para definir el movimiento de un cuerpo *simétrico con respecto a un eje* (o cuerpo de revolución) fijo en un punto de su eje de simetría, así como para definir el movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje en relación con su centro de masa. Si bien los balancines del giroscopio nos ayudan a visualizar los ángulos de Euler, es claro que estos ángulos pueden utilizarse para definir la posición de cualquier cuerpo rígido con respecto a los ejes centrados en un punto del cuerpo, independientemente de la manera en la cual se soporte el cuerpo en realidad.

Puesto que las ecuaciones (18.39) son no lineales, no será posible, en general, expresar los ángulos de Euler ϕ, θ y ψ como funciones analíticas del tiempo t, y será necesario recurrir a métodos de solución numéricos. Sin embargo, como se verá en las siguientes secciones, hay varios casos particulares de interés que pueden analizarse con facilidad.

*18.10. PRECESIÓN ESTABLE DE UN GIROSCOPIO

Se investigará ahora el caso particular de movimiento giroscópico en el cual el ángulo θ, la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$ permanecen constantes. Se pretende determinar las fuerzas que deben aplicarse al giroscopio para mantener este movimiento, conocido como *precesión estable* de un giroscopio.

En vez de aplicar las ecuaciones generales (18.39), se determina la suma de los momentos de las fuerzas requeridas calculando la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular del giroscopio en el caso particular considerado. Se observa primero que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del giroscopio, su momento angular $\mathbf{H}_O$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia en rotación (figura 18.17) se reducen, respectivamente, a

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k} \tag{18.40}$$
$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + I\omega_z \mathbf{k} \tag{18.41}$$
$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \, \mathbf{k} \tag{18.42}$$

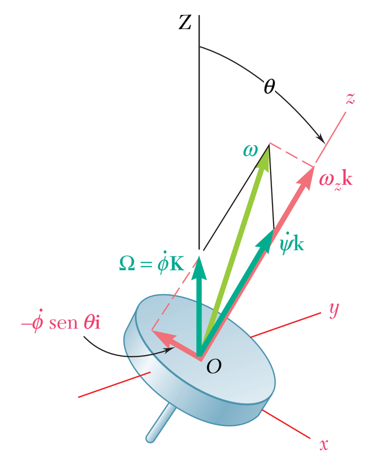


Figura 18.17

donde $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi}$ coseno de θ = componente rectangular a lo largo del eje de giro de la velocidad angular total del giroscopio.

Puesto que θ, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, el vector $\mathbf{H}_O$ es constante en magnitud y dirección con respecto al sistema de referencia en rotación y su razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ con respecto a ese sistema de referencia es cero. De tal modo la ecuación (18.28) se reduce a

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.43}$$

la cual produce, después de sustituciones de (18.41) y (18.42),

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (I\omega_z - I'\dot{\phi} \cos \theta)\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{j} \tag{18.44}$$

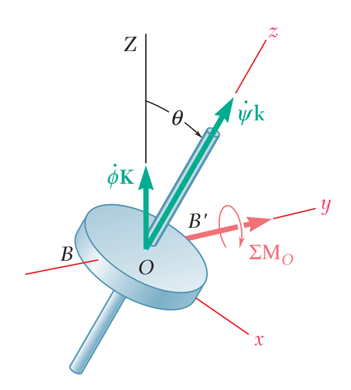


Figura 18.18

Puesto que el centro de masa del giroscopio está fijo en el espacio, se tiene, por (18.1), $\Sigma\mathbf{F} = 0$; así, las fuerzas que deben aplicarse al giroscopio para mantener su precesión estable se reducen a un par de momento igual al miembro del lado derecho de la ecuación (18.44). Se puede observar que *este par debe aplicarse alrededor de un eje perpendicular al eje de precesión y al eje de giro del giroscopio* (figura 18.18).

En el caso particular en el que el eje de precesión y el eje de giro forman un ángulo recto entre sí, se tiene que $\theta = 90°$ y la ecuación (18.44) se reduce a

$$\Sigma \mathbf{M}_O = I\dot{\psi}\dot{\phi}\mathbf{j} \tag{18.45}$$

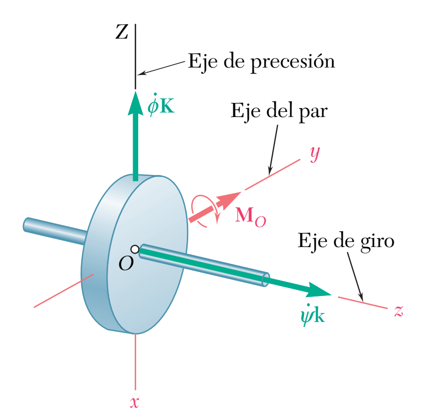


Figura 18.19

De tal modo, si se aplica al giroscopio un par $\mathbf{M}_O$ alrededor de un eje perpendicular a su eje de giro, el giroscopio precederá alrededor de un eje perpendicular tanto al eje de giro como al eje del par, en un sentido tal que los vectores que representan el giro, el par y la precesión, respectivamente, forman una tríada derecha (figura 18.19).

En vista de los pares relativamente grandes que se requieren para cambiar la orientación de sus ejes, los giroscopios se utilizan como estabilizadores en torpedos y barcos. Las balas y granadas rotatorias permanecen tangentes a su trayectoria debido a la acción giroscópica. Ade-

más, resulta fácil mantener balanceada una bicicleta a altas velocidades gracias al efecto estabilizador de sus ruedas giratorias. Sin embargo, la acción giroscópica no siempre es pertinente y debe tomarse en cuenta en el diseño de los cojinetes de soporte de flechas giratorias sujetas a precesión forzada. Las reacciones que ejercen las hélices de un aeroplano en un cambio de dirección de vuelo también deben considerarse y compensarse siempre que sea posible.

*18.11. MOVIMIENTO DE UN CUERPO SIMÉTRICO CON RESPECTO A UN EJE Y QUE NO SE SOMETE A NINGUNA FUERZA

Figura 18.20

En esta sección se analizará el movimiento alrededor de su centro de masa de un cuerpo con respecto a un eje y que no está sometido a ninguna fuerza excepto su peso. Ejemplos de tal movimiento son los proyectiles, si se ignora la resistencia del aire, y los vehículos artificiales en vehículos espaciales después de que se consumen sus cohetes de lanzamiento.

Puesto que la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor del centro de masa G del cuerpo es cero, la ecuación (18.2) produce $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$. Se deduce que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo alrededor de G es constante. De tal manera la dirección de $\mathbf{H}_G$ está fija en el espacio y puede utilizarse para definir el eje Z, o eje de precesión (figura 18.20). Al seleccionar un sistema rotatorio de ejes $Gxyz$ con el eje z a lo largo del eje de simetría del cuerpo, el eje x en el plano definido por los ejes Z y z, y el eje y apuntando en sentido contrario a usted, se tiene

$$H_x = -H_G \operatorname{sen} \theta \qquad H_y = 0 \qquad H_z = H_G \cos \theta \quad (18.46)$$

donde θ representa el ángulo formado por los ejes Z y z, y H_G denota la magnitud constante de la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de G. Puesto que los ejes x, y y z son ejes principales de inercia para el cuerpo considerado, es posible escribir

$$H_x = I'\omega_x \qquad H_y = I'\omega_y \qquad H_z = I\omega_z \qquad (18.47)$$

donde I denota el momento de inercia del cuerpo alrededor de su eje de símetría e I' su momento de inercia alrededor de un eje transversal que pasa a través de G. Se sigue de las ecuaciones (18.46) y (18.47) que

$$\omega_x = -\frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I'} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \frac{H_G \cos \theta}{I} \quad (18.48)$$

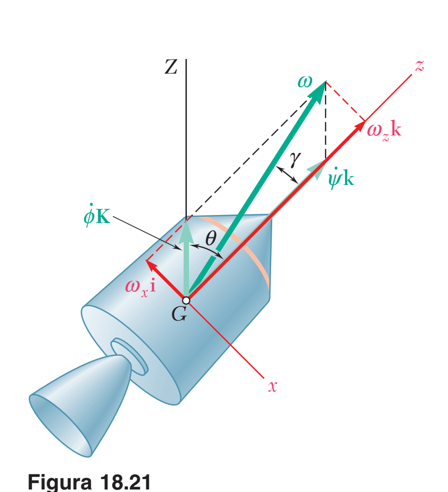


Figura 18.21

La segunda de las relaciones obtenidas muestra que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ no tiene componente a lo largo del eje y, esto es, a lo largo de un eje perpendicular al plano Zz. Por consiguiente, el ángulo θ formado por los ejes Z y z permanece constante y *el cuerpo se encuentra en precesión estable con respecto al eje Z.*

Al dividir miembro a miembro la primera y tercera relaciones (18.48), y observando de la figura 18.21 que $-\omega_x/\omega_z$ = tangente γ, se obtiene la siguiente relación entre los ángulos γ y θ que los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_G$ forman, respectivamente, con los ejes de simetría del cuerpo;

$$\tan \gamma = \frac{I}{I'} \tan \theta \qquad (18.49)$$

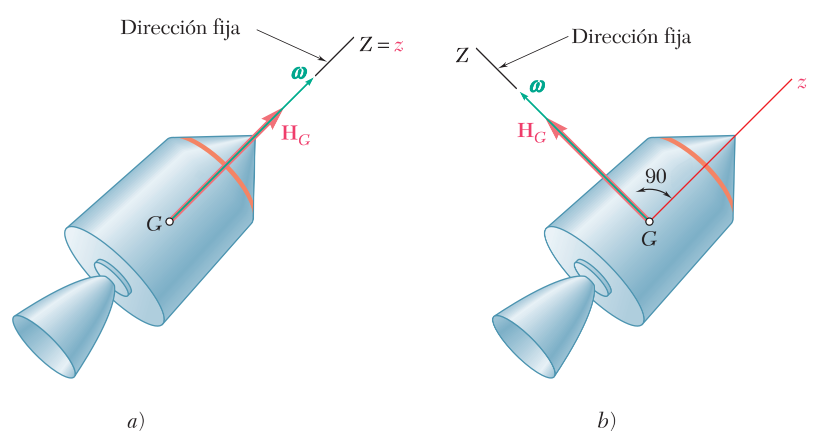


Figura 18.22

Hay dos casos particulares de movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje y no sometido a alguna fuerza que no implican precesión: (1) Si el cuerpo se pone a girar alrededor de su eje de simetría, se tiene $\omega_x = 0$ y, por (18.47), $H_x = 0$; los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_G$ tienen la misma orientación y el cuerpo se mantiene girando alrededor de su eje de simetría (figura 18.22*a*). (2) Si el cuerpo se pone a girar con respecto a su eje transversal, se tiene $\omega_z = 0$ y, por (18.47), $H_z = 0$; también en este caso $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{H}_G$ tienen la misma orientación y el cuerpo se mantiene girando alrededor de un eje transversal determinado (figura 18.22*b*).

Considerando ahora el caso general representado en la figura 18.21, recuérdese de la sección 15.12 que el movimiento de un cuerpo alrededor de un punto fijo, con respecto a su centro de masa, pueda representarse mediante el movimiento de un cono corporal que rueda sobre un cono espacial. En el caso de precesión estable, los dos conos son circulares, ya que los ángulos γ y $\theta - \gamma$ que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ forma, respectivamente, con los ejes de simetría del cuerpo y con los ejes de precesión son constantes. Deben distinguirse dos casos:

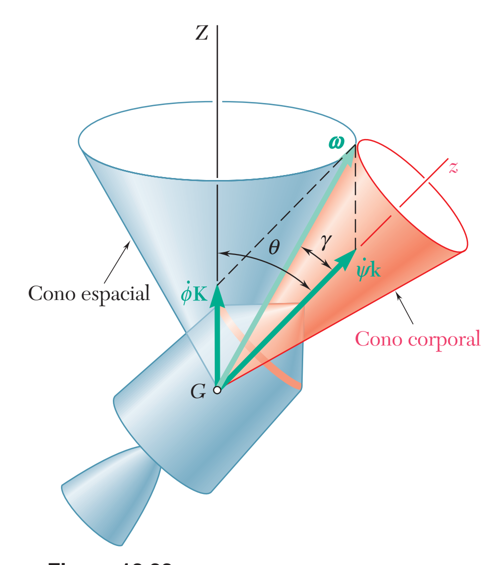


Figura 18.23

1. $I < I'$. Éste es el caso de un cuerpo elongado, tal como el vehículo espacial de la figura 18.23. Por (18.49) se tiene $\gamma < \theta$; el vector $\boldsymbol{\omega}$ se encuentra dentro del ángulo ZGz; el cono espacial y el cono corporal son tangentes externamente; tanto el giro como la precesión se observan en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje z positivo. Se dice que la precesión es *directa.*

2. $I > I'$. Éste es el caso de un cuerpo achatado, como el satélite de la figura 18.24. Por (18.49) se tiene que $\gamma > \theta$; puesto que el vector $\boldsymbol{\omega}$ debe estar fuera del ángulo ZGz, el vector $\dot{\psi}\mathbf{k}$ tiene un sentido opuesto al del eje z; el cono espacial se encuentra dentro del cono corporal; la precesión y el giro tienen sentidos opuestos. Se afirma que la precesión es *retrógrada.*

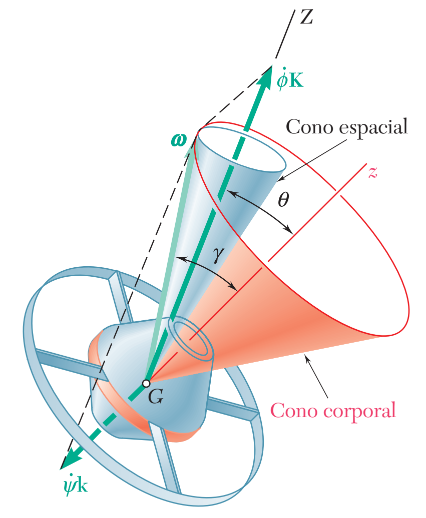
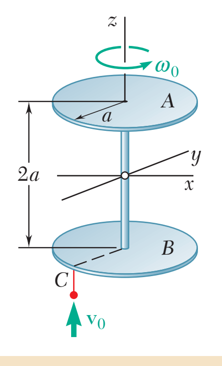


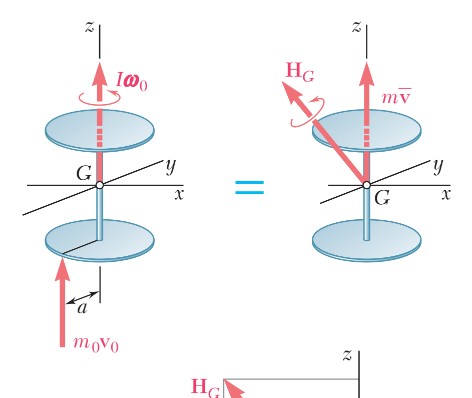
Figura 18.24



PROBLEMA RESUELTO 18.6

Se sabe que un satélite espacial de masa m es dinámicamente equivalente a dos discos delgados de igual masa. Los discos tienen un radio $a = 800$ mm y están rígidamente conectados mediante una barra ligera de longitud $2a$. En un principio, el satélite gira con libertad alrededor de su eje de simetría a la velocidad $\boldsymbol{\omega}_0 = 60$ rpm. Un meteorito, de masa $m_0 = m/1\,000$ y que viaja con una velocidad $\mathbf{v}_0$ de 2 000 m/s relativa al satélite, choca con éste y se incrusta en C. Determine *a*) la velocidad angular del satélite inmediatamente después del impacto, *b*) el eje de precesión del movimiento resultante, *c*) las velocidades de precesión y giro del movimiento subsecuente.

SOLUCIÓN



Momentos de inercia. Se puede observar que los ejes que se muestran son los ejes principales de inercia del satélite y se escribe

$$I = I_z = \tfrac{1}{2}ma^2 \qquad I' = I_x = I_y = 2[\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}m)a^2 + (\tfrac{1}{2}m)a^2] = \tfrac{5}{4}ma^2$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Se considera el satélite y el meteorito como un solo sistema. Puesto que no actúa fuerza externa sobre este sistema, las cantidades de movimiento antes y después del impacto son equipolentes. Al considerar los momentos con respecto a G, se escribe

$$-a\mathbf{j} \times m_0v_0\mathbf{k} + I\omega_0\mathbf{k} = \mathbf{H}_G$$
$$\mathbf{H}_G = -m_0v_0a\mathbf{i} + I\omega_0\mathbf{k} \tag{1}$$

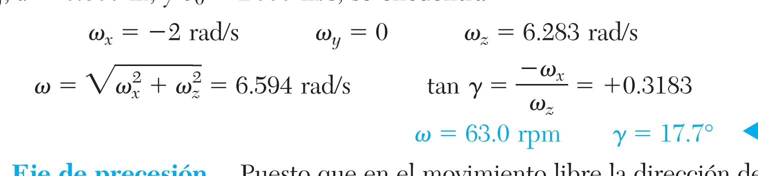
Velocidad angular después del impacto. Al sustituir los valores obtenidos para las componentes de $\mathbf{H}_G$, y para los momentos de inercia en

$$H_x = I_x\omega_x \qquad H_y = I_y\omega_y \qquad H_z = I_z\omega_z$$

se escribe

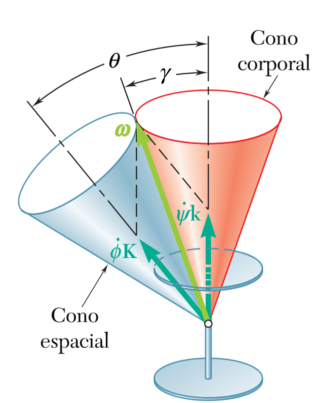
$$-m_0v_0a = I'\omega_x = \tfrac{5}{4}ma^2\omega_x \qquad 0 = I'\omega_y \qquad I\omega_0 = I\omega_z$$
$$\omega_x = -\frac{4}{5}\frac{m_0v_0}{ma} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_0 \tag{2}$$

Para el satélite considerado se tiene $\omega_0 = 60$ rpm $= 6.283$ rad/s, $m_0/m = \frac{1}{1\,000}$, $a = 0.800$ m, y $v_0 = 2\,000$ m/s; se encuentra



$$\omega_x = -2 \text{ rad/s} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = 6.283 \text{ rad/s}$$
$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 6.594 \text{ rad/s} \qquad \tan\gamma = \frac{-\omega_x}{\omega_z} = +0.3183$$

$\omega = 63.0$ rpm $\gamma = 17.7°$ ◀



Eje de precesión. Puesto que en el movimiento libre la dirección de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ permanece fija en el espacio, el satélite precederá con respecto a esta dirección. El ángulo θ formado por el eje de precesión y el eje z es

$$\tan\theta = \frac{-H_x}{H_z} = \frac{m_0v_0a}{I\omega_0} = \frac{2m_0v_0}{ma\omega_0} = 0.796$$

$\theta = 38.5°$ ◀

Velocidades de precesión y giro. Se dibujan los conos espacial y corporal para el movimiento libre del satélite. Recurriendo a la ley de los senos, se calculan las velocidades de precesión y giro.

$$\frac{\omega}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\dot{\phi}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\dot{\psi}}{\operatorname{sen}(\theta - \gamma)}$$

$\dot{\phi} = 30.8$ rpm $\dot{\psi} = 35.9$ rpm ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se analizó el movimiento de *giroscopios* y de otros *cuerpos simétricos con respecto a un eje* con un punto fijo O. Para definir la posición de estos cuerpos en un instante determinado, se introdujeron los tres *ángulos de Euler* ϕ, θ y ψ (figura 18. 15), y se advirtió que sus derivadas con respecto al tiempo definen, respectivamente, la velocidad de *precesión,* la velocidad de *nutación* y la velocidad de *giro* (figura 18.16). Los problemas que se presentarán entran dentro de una de las siguientes categorías.

1. Precesión estable. Éste es el movimiento de un giroscopio u otro cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo ubicado en su eje de simetría, en el cual permanecen constantes el ángulo θ, la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$.

a) Utilizando el sistema de referencia rotatorio Oxyz que se muestra en la figura 18.17, el cual *precede* con el cuerpo, *pero no gira* con él, se obtuvieron las siguientes expresiones para la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, su cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$, y la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia $Oxyz$:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k} \tag{18.40}$$
$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + I \, \omega_z \mathbf{k} \tag{18.41}$$
$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \, \mathbf{k} \tag{18.42}$$

donde I = momento de inercia del cuerpo con respecto a su eje de simetría
I' = momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje transversal que pasa por O
ω_z = componente *rectangular* de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje $z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

b) La suma de los momentos alrededor de O de las fuerzas aplicadas al cuerpo es igual a la razón de cambio de su cantidad de movimiento angular, como lo expresa la ecuación (18.28). Pero, puesto que θ y las razones de cambio $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, se concluye de las ecuaciones (18.41) que $\mathbf{H}_O$ permanece constante en magnitud y dirección cuando se observa desde el sistema de referencia $Oxyz$. De tal modo, su razón de cambio es cero con respecto al sistema de referencia y es posible escribir

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.43}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{H}_O$ se definen, respectivamente, mediante las ecuaciones (18.42) y (18.41). La ecuación que se obtiene muestra que el momento resultante en O en las fuerzas aplicadas al cuerpo es perpendicular tanto al eje de precesión como al eje de giro (figura 18.18).

c) Téngase en cuenta que el método descrito se aplica no sólo a giroscopios, donde el punto fijo O coincide con el centro de masa G, sino también a *cualquier cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo O localizado en su eje de simetría.* Por lo tanto, este método puede utilizarse para analizar la *precesión estable de un trompo* que gira en un suelo irregular.

d) Cuando un cuerpo simétrico con respecto a un eje no tiene un punto fijo, pero se encuentra en precesión estable con respecto a su centro de masa G, es necesario dibujar una *ecuación de diagramas de cuerpo libre* en la que se indique que el sistema de las fuerzas externas ejercidas sobre el cuerpo (incluyendo el peso del mismo) es equivalente al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado en G y al vector par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Se pueden utilizar las ecuaciones (18.40) a (18.42), sustituyendo $\mathbf{H}_O$ por $\mathbf{H}_G$, y expresar el momento del par como

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G$$

Es posible utilizar en ese caso la ecuación de diagramas de cuerpo libre para escribir hasta seis ecuaciones escalares independientes.

(continúa)

2. *Movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje que no está sometido a ninguna fuerza, excepto a su propio peso.* Se tiene como $\Sigma \mathbf{M}_G = 0$ y, en consecuencia, $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$, se sigue que *la cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_G$ es constante en magnitud y dirección (sección 18.11). El cuerpo está en *precesión estable* con el eje de precesión GZ dirigido a lo largo de $\mathbf{H}_G$ (figura 18.20). Utilizando el sistema de referencia en rotación $Gxyz$ y denotando por γ el ángulo que $\boldsymbol{\omega}$ forma con el eje de giro Gz (figura 18.21), se obtiene la siguiente relación entre γ y el ángulo θ formado por los ejes de precesión de giro

$$\tan \gamma = \frac{I}{I'} \tan \theta \qquad (18.49)$$

Se afirma que la precesión es *directa* si $I < I'$ (figura 18.23) y *retrógrada* si $I > I'$ (figura 18.24).

a) En muchos de los problemas que tienen que ver con el movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje y que no se somete a ninguna fuerza, se pedirá determinar el *eje de precesión* y las *velocidades de precesión y de giro* del cuerpo, si se conocen la magnitud de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el ángulo γ que ésta forma con el eje de simetría Gz (figura 18.21). A partir de la ecuación (18.49) se determinará el ángulo θ que el eje de precesión GZ forma con Gz y se descompondrá $\boldsymbol{\omega}$ en sus dos *componentes oblicuas* $\dot{\phi}\mathbf{K}$ y $\dot{\psi}\mathbf{k}$. Utilizando la ley de los senos, se determinará la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$.

b) En otros problemas el cuerpo estará sujeto a *un impulso determinado* y se establecería primero la *cantidad de movimiento angular* resultante $\mathbf{H}_G$. Utilizando las ecuaciones (18.10) se calcularán las componentes rectangulares de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, su magnitud ω y el ángulo γ que ésta forma con el eje de simetría. Después se determinará el *eje de precesión* y las *velocidades de precesión y giro* como se describió antes [problema resuelto 18.6].

3. *Movimiento general de un cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo O localizado en su eje de simetría y sujeto únicamente a su propio peso.* Éste es un movimiento en el cual se permite la variación del ángulo θ. En cualquier instante dado debe considerarse la velocidad de precesión $\dot{\phi}$, la velocidad de giro $\dot{\psi}$ *y la velocidad de nutación* $\dot{\theta}$, ninguna de las cuales permanecerá constante. Un ejemplo de movimiento de este tipo es el de un trompo, el cual se analiza en los problemas 18.139 y 18.140. El sistema de referencia rotatorio $Oxyz$ que se usará sigue siendo el que se muestra en la figura 18.18, aunque éste no girará en este caso alrededor del eje y a la velocidad $\dot{\theta}$. Por lo tanto, las ecuaciones (18.40), (18.41) y (18.42) deben sustituirse por las siguientes:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\, \mathbf{k} \qquad (18.40')$$

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{i} + I'\dot{\theta}\mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\, \mathbf{k} \qquad (18.41')$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta\, \mathbf{k} \qquad (18.42')$$

Como la sustitución de estas expresiones en la ecuación (18.44) conducirán a ecuaciones diferenciales no lineales, es preferible, siempre que sea factible, aplicar los siguientes principios de conservación:

a) Conservación de la energía. Denotando por c la distancia entre el punto fijo O y el centro de masa G del cuerpo, y por E la energía total, se escribirá

$$T + V = E: \qquad \tfrac{1}{2}(I'\omega_x^2 + I'\omega_y^2 + I\omega_z^2) + mgc \cos \theta = E$$

y se sustituyen las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ de la expresión que se obtuvo en la ecuación (18.40′). Advierta que c será positiva o negativa, dependiendo de la posición de G relativa a O. Además, $c = 0$ si G coincide con O; en ese caso la *energía cinética* se conserva.

b) Conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje de precesión. Puesto que el soporte en O se ubica en el eje Z y en vista de que el peso del cuerpo y el eje Z son ambos verticales y, por ello, paralelos entre sí, se concluye que $\Sigma M_Z = 0$ y, por consiguiente, que H_Z permanece constante. Esto puede expresarse escribiendo que el producto escalar $\mathbf{K} \cdot \mathbf{H}_O$ es constante, donde $\mathbf{K}$ es el vector unitario a lo largo del eje Z.

c) Conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje de giro. Puesto que el soporte en O y el centro de gravedad G están localizados ambos en el eje z, se deduce que $\Sigma M_z = 0$ y, por ello, que H_z permanece constante. Esto se expresa escribiendo que el coeficiente del vector unitario $\mathbf{k}$ en la ecuación (18.41′) es constante. Advierta que este último principio de conservación no se puede aplicar cuando al cuerpo no se le permite girar alrededor de su eje de simetría, aunque en ese caso las únicas variables son θ y ϕ.

Problemas

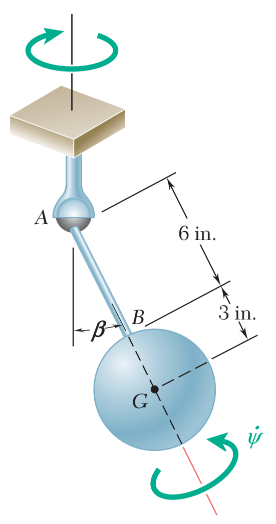


Figura P18.107 y P18.108

18.107 Una esfera de aluminio sólido de 3 in. de radio se suelda al extremo de una varilla *AB* de 6 in. de largo y masa despreciable que se sostiene mediante una articulación de rótula en *A*. Si se sabe que la esfera precede con respecto al eje vertical a la razón constante de 60 rpm en el sentido indicado y que la varilla *AB* forma un ángulo $\beta = 30°$ con la vertical, determine la velocidad de giro de la esfera alrededor de la línea *AB*.

18.108 Una esfera de aluminio sólido de 3 in. de radio se suelda al extremo de una varilla *AB* de 6 in. de largo y masa despreciable que se sostiene mediante una articulación de rótula en *A*. Si la esfera gira como se muestra alrededor de la línea *AB* y a la razón de 700 rpm, determine el ángulo β para el cual la esfera precederá con respecto al eje vertical a la velocidad constante de 60 rpm en el sentido indicado.

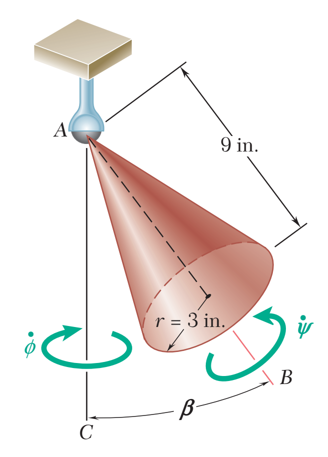


Figura P18.109 y *P18.110*

18.109 Un cono sólido de 9 in. de altura, con una base circular de 3 in. de radio se sostiene mediante una articulación de rótula en *A*. Si se observa que el cono precede con respecto al eje vertical *AC* a la razón constante de 40 rpm en el sentido indicado, y que su eje de simetría forma un ángulo $\beta = 40°$ con *AC*, determine la velocidad a la que gira el cono alrededor de su eje *AB*.

18.110 Un cono sólido de 9 in. de altura, con una base circular de 3 in. de radio se sostiene mediante una articulación de rótula en *A*. Si el cono gira alrededor de su eje de simetría *AB* a una razón de 3 000 rpm y *AB* forma un ángulo $\beta = 60°$ con el eje vertical *AC*, determine las dos razones posibles de precesión estable del cono alrededor del eje *AC*.

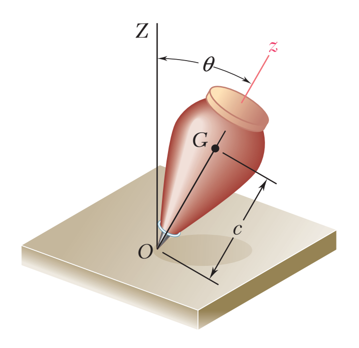


Figura P18.111 y *P18.112*

18.111 El trompo de 85 g que se muestra en la figura se apoya en el punto fijo *O*. Los radios de giro del trompo con respecto a su eje de simetría y con respecto a su eje transversal que pasa por *O* son, respectivamente, 21 y 45 mm. Si se sabe que $c = 37.5$ mm y la velocidad de giro del trompo con respecto a su eje de simetría es de 1 800 rpm, determine las dos posibles velocidades de precesión estable correspondientes a $\theta = 30°$.

18.112 El trompo que se muestra en la figura se apoya en el punto fijo *O* y sus momentos de inercia con respecto a su eje de simetría y con respecto a un eje transversal que pasa por *O* se denotan, respectivamente, por *I* e *I'*. *a*) Muestre que la condición para la precesión estable del trompo es

$$(I\omega_z - I'\dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi} = Wc$$

donde $\dot{\phi}$ es la razón de precesión y ω_z es la componente rectangular de la velocidad angular a lo largo del eje de simetría del trompo. *b*) Demuestre que si la razón de giro $\dot{\psi}$ del trompo es muy grande comparada con su razón de precesión $\dot{\phi}$, la condición para precesión estable es o $I\dot{\psi}\dot{\phi} \approx Wc$. *c*) Determine el error porcentual que se presenta cuando se usa la última relación para aproximar la más baja de las dos razones de precesión obtenidas para el trompo del problema 18.111.

18.113 Un cubo sólido de lado $c = 80$ mm se conecta como se muestra a la cuerda AB. Se observa que el cubo gira a la razón $\dot{\psi} = 40$ alrededor de su diagonal BC y precede a la razón constante $\dot{\phi} = 5$ rad/s alrededor del eje vertical AD. Si $\beta = 30°$, determine el ángulo θ que forma la diagonal BC con la vertical. (*Sugerencia*: El momento de inercia de un cubo alrededor de un eje a través de su centro es independiente de la orientación de ese eje.)

18.114 Un cubo sólido de lado $c = 120$ mm se conecta en la forma mostrada a una cuerda AB de 240 mm de longitud. El cubo gira alrededor de su diagonal BC y precede alrededor del eje vertical AD. Si $\theta = 25°$ y $\beta = 40°$, determine *a*) la velocidad de giro del cubo, *b*) su velocidad de precesión. (Vea la sugerencia del problema 18.113.)

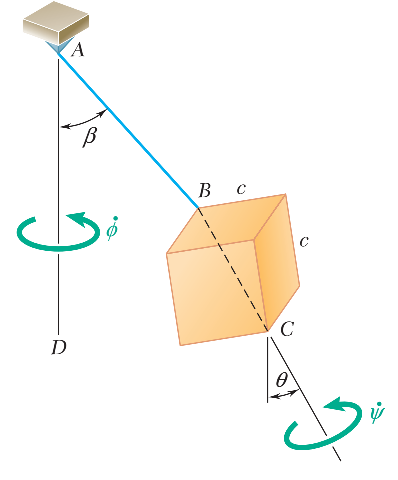
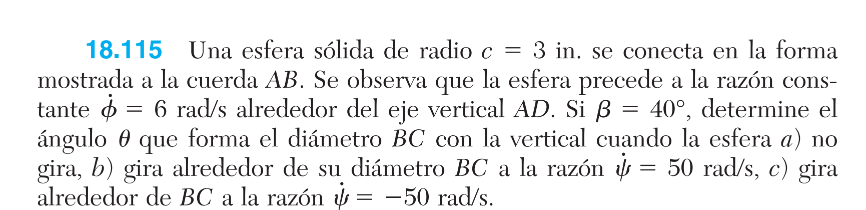
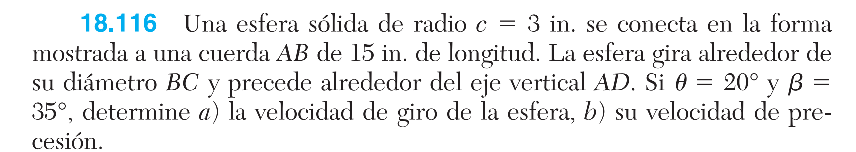


Figura P18.113 y P18.114



18.115 Una esfera sólida de radio $c = 3$ in. se conecta en la forma mostrada a la cuerda AB. Se observa que la esfera precede a la razón constante $\dot{\phi} = 6$ rad/s alrededor del eje vertical AD. Si $\beta = 40°$, determine el ángulo θ que forma el diámetro BC con la vertical cuando la esfera *a*) no gira, *b*) gira alrededor de su diámetro BC a la razón $\dot{\psi} = 50$ rad/s, *c*) gira alrededor de BC a la razón $\dot{\psi} = -50$ rad/s.



18.116 Una esfera sólida de radio $c = 3$ in. se conecta en la forma mostrada a una cuerda AB de 15 in. de longitud. La esfera gira alrededor de su diámetro BC y precede alrededor del eje vertical AD. Si $\theta = 20°$ y $\beta = 35°$, determine *a*) la velocidad de giro de la esfera, *b*) su velocidad de precesión.

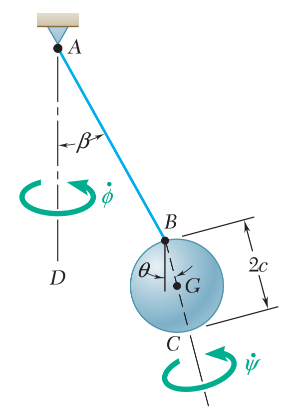


Figura P18.115 y

18.117 Si la Tierra fuera una esfera, la atracción gravitacional del Sol, la Luna y los planetas siempre sería equivalente a una sola fuerza **R** que actúa en el centro de masa de nuestro planeta. En realidad la Tierra es un esferoide achatado y el sistema gravitacional que actúa sobre ella es equivalente a una fuerza **R** y un par **M**. Si se sabe que el efecto del par **M** es causar que el eje terrestre preceda alrededor del eje GA a una velocidad de una revolución en 25 800 años, determine la magnitud promedio del par **M** aplicado a la Tierra. Suponga que su densidad promedio es de 5.51 g/cm^3, que el radio promedio terrestre es de 6 370 km, y que $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$. (*Nota*: Esta precesión forzada se conoce como la precesión de los equinoccios y no debe confundirse con la precesión libre que se analiza en el problema 18.123.)

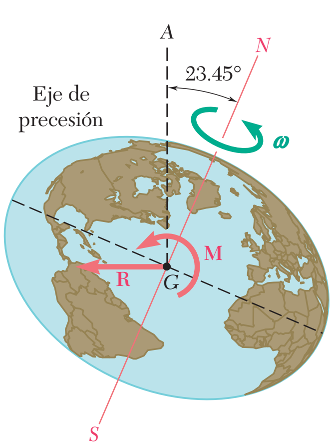


Figura *P18.117*

18.118 Un registro fotográfico de alta velocidad muestra que cierto proyectil se lanzó con una velocidad horizontal $\overline{\mathbf{v}}$ de 600 m/s y con su eje de simetría formando un ángulo $\beta = 3°$ con la horizontal. La razón de giro $\dot{\psi}$ del proyectil fue de 6 000 rpm y el arrastre atmosférico resultó equivalente a una fuerza **D** de 120 N que actuaba en el centro de presión C_P, ubicado a una distancia $c = 150$ mm de G. *a*) Si se sabe que el proyectil tiene una masa de 20 kg y un radio de giro de 50 mm con respecto a su eje de simetría, determine su razón aproximada de precesión estable. *b*) Si se sabe además que el radio de giro del proyectil con respecto al eje transversal que pasa por G es de 200 mm, determine los valores exactos de las dos posibles razones de velocidades de precesión.

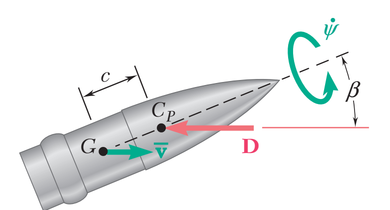
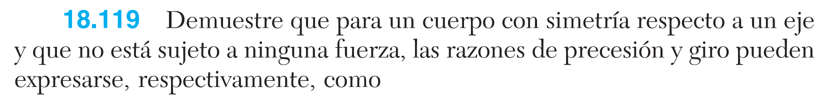


Figura *P18.118*



18.119 Demuestre que para un cuerpo con simetría respecto a un eje y que no está sujeto a ninguna fuerza, las razones de precesión y giro pueden expresarse, respectivamente, como

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I'}$$

y

$$\dot{\psi} = \frac{H_G \cos\theta (I' - I)}{II'}$$

donde H_G es el valor constante de la cantidad de movimiento angular del cuerpo.

18.120 *a*) Demuestre que para un cuerpo con simetría respecto a un eje y no sometido a ninguna fuerza, la velocidad de precesión puede expresarse como

$$\dot{\phi} = \frac{I\omega_2}{I' \cos\theta}$$

donde ω_2 es la componente rectangular de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de simetría del cuerpo. *b*) Utilice este resultado para verificar que la condición (18.44) para precesión estable se satisface en el caso de un cuerpo con simetría respecto a un eje y no sujeto a ninguna fuerza.

18.121 Demuestre que el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de un cuerpo simétrico con respecto a un eje, que no está sometido a una fuerza es visto desde el cuerpo mismo, que gira alrededor del eje de simetría a la razón constante

$$n = \frac{(I' - I)}{I'}\omega_2$$

donde ω_2 es la componente rectangular $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de simetría del cuerpo.

18.122 Para un cuerpo con simetría respecto a un eje que no está sometido a ninguna fuerza, demuestre *a*) que la razón de la precesión retrógrada nunca puede ser menor que el doble de la razón de giro del cuerpo respecto a su eje de simetría, *b*) que en la figura 18.24 el eje de simetría del cuerpo nunca puede estar dentro del cono espacial.

18.123 Utilizando la relación dada en el problema 18.121, determine el periodo de precesión del polo norte de la Tierra alrededor de su eje de simetría. La Tierra puede aproximarse mediante un asteroide achatado de momento de inercia axial I y un momento de inercia transversal $I' = 0.99671I$. (*Nota*: Las observaciones reales muestran un periodo de precesión del polo norte de aproximadamente 432.5 días solares medios, la diferencia entre los periodos observados y calculados se debe al hecho de que la Tierra no es un cuerpo perfectamente rígido. La precesión libre que se considera aquí no debe confundirse con la precesión mucho más lenta de los equinoccios, que es una precesión forzada. Vea el problema 18.117.)

18.124 El vector de velocidad angular de una pelota de futbol americano que acaba de patearse está en posición horizontal y su eje de simetría OC se orienta en la forma mostrada. Si la magnitud de la velocidad angular es de 200 rpm y el cociente entre los momentos de inercia axial y transversal es $I/I' = \frac{1}{3}$, determine *a*) la orientación del eje de precesión OA, *b*) las velocidades de precesión y de giro.

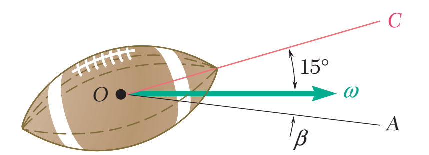


Figura *P18.124*

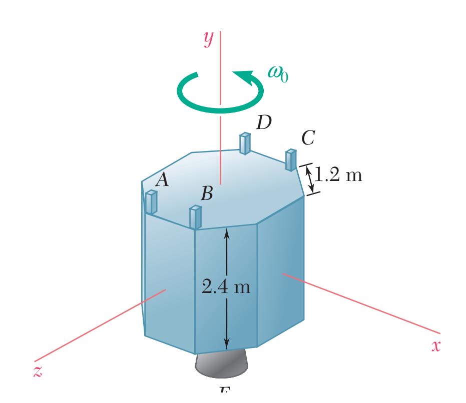


Figura P18.125

18.125 Un satélite de 2 500 kg mide 2.4 m de altura y tiene bases octagonales de 1.2 m de lado. Los ejes de coordenadas mostrados son los principales ejes centroidales de inercia del satélite y sus radios de giro son $k_x = k_z = 0.90$ m y $k_y = 0.98$ m. El satélite está equipado con un propulsor principal E de 500 N y cuatro propulsores A, B, C y D de 20 N, los cuales pueden expeler combustible en la dirección y positiva. El satélite está girando a 36 rev/h alrededor de su eje de simetría Gy, que mantiene una dirección fija en el espacio, cuando los propulsores A y B se activan durante 2 s. Determine *a*) el eje de precesión del satélite, *b*) su velocidad de precesión, *c*) su velocidad de giro.

18.126 Retome el problema 18.125, y ahora suponga que los propulsores A y D (en vez de A y B) se activan durante 2 s.

18.127 Un satélite geoestacionario de 800 lb gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_0 = (1.5 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ cuando es golpeado en B por un meteorito de 6 oz. que viaja con una velocidad relativa al satélite de $\mathbf{v}_0 = -(1\,600 \text{ ft/s})\mathbf{i} + (1\,300 \text{ ft/s})\mathbf{j} + (4\,000 \text{ ft/s})\mathbf{k}$. Si se sabe que $b = 20$ in. y que los radios de giro del satélite son $\bar{k}_x = \bar{k}_z = 28.8$ in. y $\bar{k}_y = 32.4$ in., determine el eje de precesión y las velocidades de precesión y giro del satélite después del impacto.

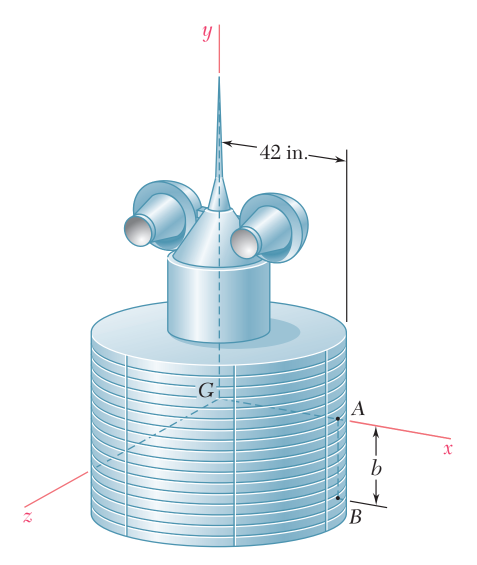


Figura *P18.127*

18.128 Retome el problema 18.127, ahora suponga que el meteorito golpea al satélite en A en vez de en B.

18.129 Una moneda se lanza al aire. Se observa que gira a la velocidad de 600 rpm alrededor de un eje GC perpendicular a la moneda y que precede alrededor de la dirección vertical GD. Si se sabe que GC forma un ángulo de 15° con GD, determine *a*) el ángulo que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la moneda forma con GD, *b*) la velocidad de precesión de la moneda alrededor de GD.

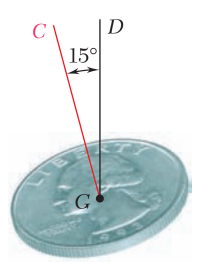


Figura P18.129

18.130 Encuentre la solución el problema resuelto 18.6, si se supone que el meteorito golpea al satélite en C con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (2\,000\ \text{m/s})\mathbf{i}$.

18.131 Un disco homogéneo de masa m se conecta en A y B al extremo en forma de horquilla de una flecha de masa insignificante que se sostiene mediante un cojinete en C. El disco gira libremente alrededor de su diámetro horizontal AB y la flecha tiene la libertad de rotar alrededor del eje vertical que pasa por C. Al inicio el disco yace en el plano vertical ($\theta_0 = 90°$) y la flecha tiene una velocidad angular $\dot{\phi} = 8$ rad/s. Si el disco se perturba ligeramente, determine para el movimiento subsecuente *a*) el valor mínimo de $\dot{\phi}$, *b*) el valor máximo de $\dot{\theta}$.

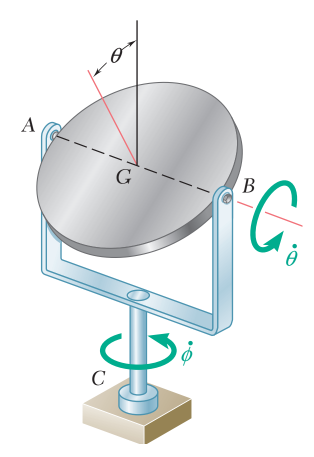


Figura P18.131

18.132 Una varilla delgada homogénea AB de masa m y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro de masa G. El eje se sostiene mediante un bastidor de masa despreciable que puede girar libremente alrededor de la vertical CD. Si en un inicio $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ muestre que la varilla oscilará alrededor del eje horizontal y determine *a*) el rango de valores del ángulo θ durante este movimiento, *b*) el valor máximo de $\dot{\theta}$, *c*) el valor mínimo de $\dot{\phi}$.

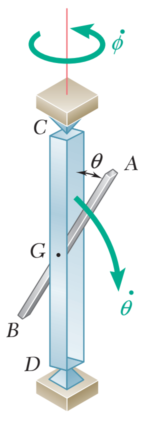
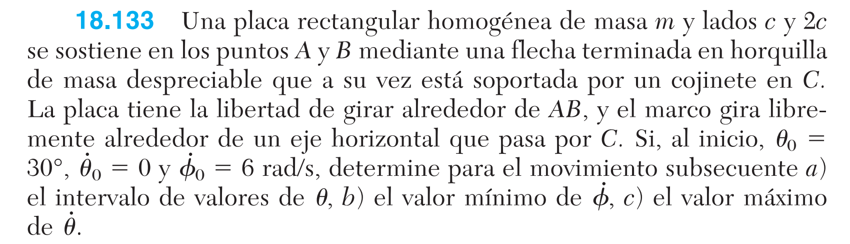


Figura P18.132



18.133 Una placa rectangular homogénea de masa m y lados c y $2c$ se sostiene en los puntos A y B mediante una flecha terminada en horquilla de masa despreciable que a su vez está soportada por un cojinete en C. La placa tiene la libertad de girar alrededor de AB, y el marco gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por C. Si, al inicio, $\theta_0 = 30°$, $\dot{\theta}_0 = 0$ y $\dot{\phi}_0 = 6$ rad/s, determine para el movimiento subsecuente *a*) el intervalo de valores de θ, *b*) el valor mínimo de $\dot{\phi}$, *c*) el valor máximo de $\dot{\theta}$.

18.134 Una placa rectangular homogénea de masa m y lados c y $2c$ se sostiene en los puntos A y B mediante una flecha terminada en horquilla de masa despreciable que a su vez está soportada por un cojinete en C. La placa tiene la libertad de girar alrededor de AB, y el marco gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por C. Al inicio la placa yace en el plano de la horquilla ($\theta_0 = 0$) y la flecha tiene una velocidad angular $\dot{\phi}_0 = 6$ rad/s. Si la placa se perturba ligeramente, determine para el movimiento subsecuente *a*) el valor mínimo de $\dot{\phi}$, *b*) el valor máximo de $\dot{\theta}$.

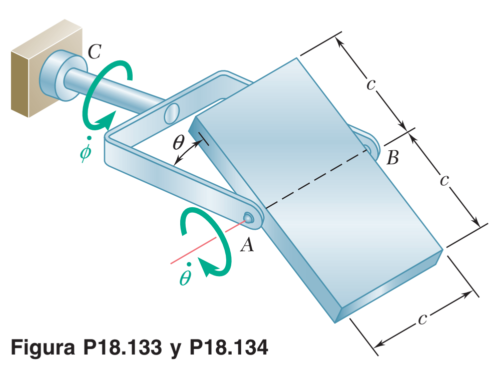


Figura P18.133 y P18.134

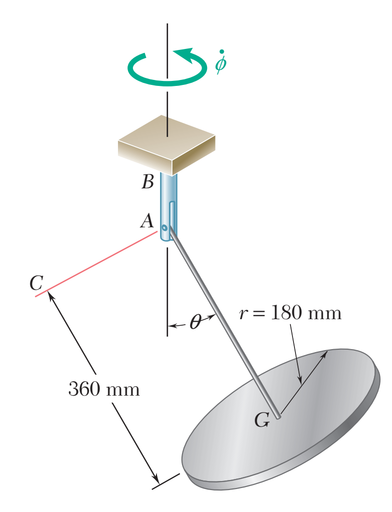


Figura *P18.135* y *P18.136*

18.135 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra *AG* de 360 mm de longitud y masa despreciable que se conecta mediante una horquilla a una flecha vertical *AB*. La barra y el disco pueden girar con libertad alrededor de un eje horizontal *AC*, y la flecha *AB* tiene la posibilidad de rotar libremente en torno al eje vertical. En un principio, la barra *AG* está en posición horizontal ($\theta_0 = 90°$) y no tiene velocidad angular respecto a *AC*. Si se sabe que el valor máximo $\dot{\phi}_m$ de la velocidad angular de la flecha *AB* en el movimiento subsecuente es el doble del valor inicial $\dot{\phi}_0$, determine *a*) el valor mínimo de θ, *b*) la velocidad angular inicial $\dot{\phi}_0$ de la flecha *AB*.

18.136 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra *AG* de 360 mm de longitud y masa despreciable que se conecta mediante una horquilla a una flecha vertical *AB*. La barra y el disco pueden girar con libertad alrededor de un eje horizontal *AC*, y la flecha *AB* tiene la posibilidad de rotar libremente en torno al eje vertical. Al inicio la barra *AC* está en posición horizontal ($\theta_0 = 90°$) y no tiene velocidad angular respecto a *AC*. Si el valor más pequeño de θ en el movimiento subsecuente es de 30°, determine *a*) la velocidad angular inicial de la flecha *AB*, *b*) su velocidad angular máxima.

***18.137** Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra *AG* de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se soporta mediante una articulación de rótula en *A*. El disco se suelta con una razón de giro $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, con velocidades de precesión y nutación cero y con la barra *AG* horizontal ($\theta_0 = 90°$). Determine *a*) el valor más pequeño de θ en el movimiento subsecuente, *b*) las razones de precesión y de giro cuando el disco pasa por su posición más baja.

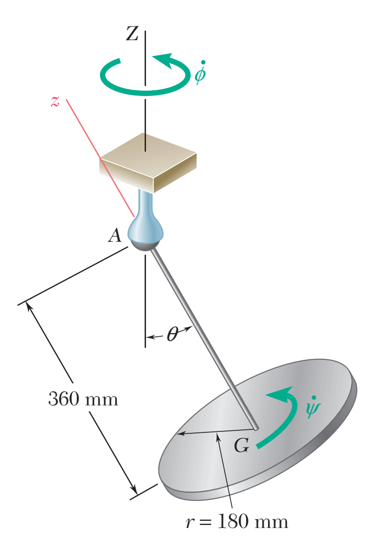


Figura P18.137 y P18.138

***18.138** Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra *AG* de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se soporta mediante una articulación de rótula en *A*. El disco se suelta con una razón de giro $\dot{\psi}_0$, en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se ve desde *A*, con velocidades de precesión y nutación cero y con la barra *AG* horizontal ($\theta_0 = 90°$). Si el valor más pequeño de θ en el movimiento subsecuente es de 30°, determine *a*) la razón de giro $\dot{\psi}_0$ del disco en la posición inicial, *b*) las razones de precesión y de giro cuando el disco pasa por su posición más baja.

***18.139** El trompo que se muestra se sostiene en el punto fijo O. Si se denota con ϕ, θ y ψ los ángulos de Euler que definen la posición del trompo con respecto a un sistema de referencia fijo, considere el movimiento general del trompo en el cual varían todos los ángulos de Euler.

a) Si se observa que $\Sigma M_Z = 0$ y $\Sigma M_z = 0$ y se denota con I e I', respectivamente, los momentos de inercia del trompo respecto a su eje de simetría y de su eje transversal que pasa por O, deduzca las dos ecuaciones diferenciales de primer orden para el movimiento

$$I'\dot{\phi}\ \text{sen}^2\ \theta + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = \alpha$$

$$I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \beta$$

donde α y β son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones expresan que la cantidad de movimiento angular del trompo se conserva con respecto tanto del eje Z como del z, esto es, que la componente rectangular de $\mathbf{H}_O$ a lo largo de cada uno de estos ejes es constante.

b) Utilice 1as ecuaciones (1) y (2) para demostrar que la componente rectangular ω_z de la velocidad angular del trompo es constante y que la razón de precesión $\dot{\phi}$ depende del valor del ángulo de nutación θ.

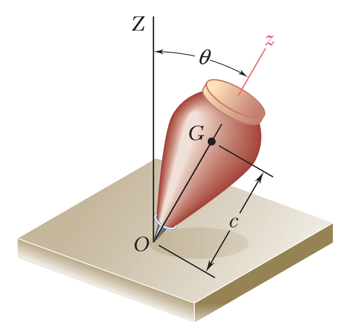


Figura P18.139 y P18.140

***18.140** *a*) Mediante la aplicación del principio de la conservación de la energía, deduzca una tercera ecuación diferencial para el movimiento general del trompo del problema 18.139.

b) Eliminando las derivadas $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ de la ecuación que se obtuvo y de las dos ecuaciones del problema 18.139, demuestre que la razón de nutación $\dot{\theta}$ se define mediante la ecuación diferencial $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$, donde

$$f(\theta) = \frac{1}{I'}\left(2E - \frac{\beta^2}{I} - 2mgc\cos\theta\right) - \left(\frac{\alpha - \beta\cos\theta}{I'\ \text{sen}\ \theta}\right)^2$$

c) Demuestre también, introduciendo la variable auxiliar $x = \cos\theta$, que los valores máximo y mínimo de θ pueden obtenerse al resolver respecto a x la ecuación cúbica

$$\left(2E - \frac{\beta^2}{I} - 2mgcx\right)(1 - x^2) - \frac{1}{I'}(\alpha - \beta x)^2 = 0$$

18.141 Una esfera homogénea de masa m y radio a está soldada a una varilla AB de masa insignificante, la cual se sostiene mediante un soporte de rótula en A. La esfera se suelta en la posición $\beta = 0$ con una razón de precesión $\dot{\phi}_0 = \sqrt{17g/11a}$ sin giro o nutación. Determine el valor máximo de β en el movimiento subsecuente.

18.142 Una esfera homogénea de masa m y radio a está soldada a una varilla AB de masa insignificante, la cual se sostiene mediante un soporte de rótula en A. La esfera se suelta en la posición $\beta = 0$ con una razón de precesión $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ sin giro o nutación. Si el valor máximo de β en el movimiento subsecuente es de 30°, determine *a*) la razón de precesión $\dot{\phi}_0$ de la esfera en su posición inicial, *b*) las razones de precesión y de giro cuando $\beta = 30°$.

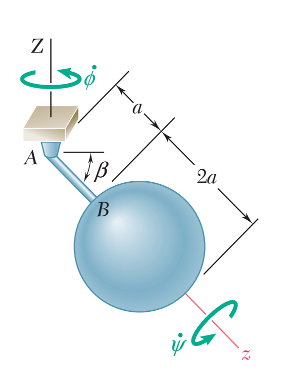
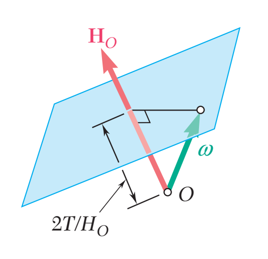


Figura *P18.141* y *P18.142*



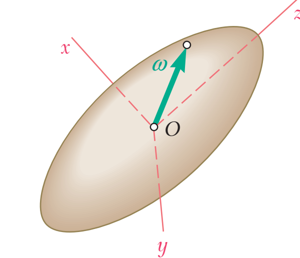


Figura P18.143

***18.143** Considere un cuerpo rígido de forma arbitraria que está fijo en su centro de masa O y que sólo se somete a la fuerza de su peso y a la reacción en el apoyo O.

a) Demuestre que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor del punto fijo O es constante en magnitud y dirección, que la energía cinética T del cuerpo es constante y que la proyección a lo largo de $\mathbf{H}_O$ de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo es constante.

b) Demuestre que la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$ describe una curva sobre un plano fijo en el espacio (llamado *plano invariable*), el cual es perpendicular a $\mathbf{H}_O$ y se encuentra a una distancia $2T/H_O$ desde O.

c) Muestre que con respecto al sistema de referencia asociado al cuerpo y que coincide con sus ejes principales de inercia, la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$ parece describir una curva sobre un elipsoide de ecuación

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2T = \text{constante}$$

El elipsoide (denominado *elipsoide de Poinsot*) está rígidamente unido al cuerpo y es de la misma forma que el elipsoide de inercia, pero de tamaño diferente.

***18.144** Con referencia al problema 18.143, *a*) demuestre que el elipsoide de Poinsot es tangente al plano invariable, *b*) demuestre que el movimiento del cuerpo rígido debe ser tal que el elipsoide de Poinsot parece rodar sobre el plano invariable. [*Sugerencia:* En el inciso *a*) muestre que la normal al elipsoide de Poinsot en la punta de $\boldsymbol{\omega}$ es paralela *a*) $\mathbf{H}_O$. Se recuerda que la dirección de la normal a la superficie de ecuación $F(x, y, z) =$ constante en un punto P es la misma que la del gradiente de la función F en el punto P (**grad** F).]

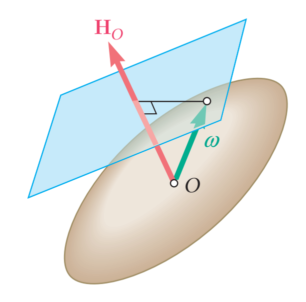


Figura P18.144

***18.145** Utilizando los resultados que se obtuvieron en los problemas 18.143 y 18.144, muestre que para un cuerpo simétrico con respecto a un eje asociado a su centro de masa O y que no se somete a ninguna fuerza que no sea su peso o la reacción en O, el elipsoide de Poinsot es un elipsoide de revolución y los conos espacial y corporal son circulares y tangentes entre sí. Demuestre además que *a*) los dos conos son tangentes externamente y que la precesión es directa, cuando $I < I'$, donde I e I' denotan, respectivamente, los momentos de inercia axial y transversal del cuerpo, *b*) el cono espacial está dentro del cono corporal, y la precesión es retrógrada, cuando $I > I'$.

***18.146** Con referencia a los problemas 18.143 y 18.144.

a) Demuestre que la curva (llamada *polhodo*) que describe la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia que coincide con los ejes principales de inercia de un cuerpo rígido está definida por las ecuaciones

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2T = \text{constante} \qquad (1)$$
$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = H_O^2 = \text{constante} \qquad (2)$$

y que la curva puede, por tanto, obtenerse al intersecar el elipsoide de Poinsot con el elipsoide definido por la ecuación (2).

b) Además, suponiendo que $I_x > I_y > I_z$, demuestre que los polhodos obtenidos para diversos valores de H_O tienen las formas indicadas en la figura.

c) Utilizando el resultado obtenido en el inciso *b*) demuestre que un cuerpo rígido que no está sometido a ninguna fuerza puede girar alrededor de un eje centroidal fijo si y sólo si, ese eje coincide con uno de los ejes principales de inercia del cuerpo, y que el movimiento será estable si el eje de rotación coincide con el eje mayor o menor de la elipsoide de Poinsot (eje z o x en la figura) e inestable si coincide con el eje intermedio (eje y).

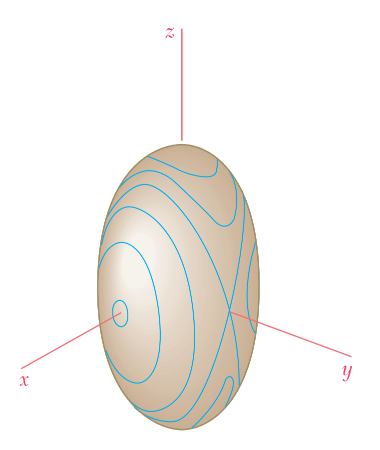


Figura P18.146

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 18

Este capítulo se dedicó al análisis cinético de movimiento de cuerpos rígidos en tres dimensiones.

Ecuaciones fundamentales del movimiento de un cuerpo rígido

Se pudo observar primero [sección 18.1] que las dos ecuaciones fundamentales que se obtuvieron en el capítulo 14 para el movimiento de un sistema de partículas

$$\Sigma \mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

proporcionan el fundamento del análisis, justo como ocurrió en el capítulo 16 en el caso del movimiento plano de cuerpos rígidos. El cálculo de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo y de su derivada $\dot{\mathbf{H}}_G$, sin embargo, revisten ahora una importancia considerable.

Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones

En la sección 18.2 se vio que las componentes rectangulares de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ de un cuerpo rígido pueden expresarse en términos de las componentes de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y de sus momentos y productos centroidales de inercia de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x\omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{xz}\omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx}\omega_x + \bar{I}_y\omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx}\omega_x - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z\omega_z \end{aligned} \tag{18.7}$$

Si se usan los *ejes principales de inercia* $Gx'y'z'$, estas relaciones se reducen a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

Se observó que, en general, *la cantidad de movimiento angular* $\mathbf{H}_G$ *y la velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *no tienen la misma dirección* (figura 18.25). Sin embargo, la tendrán si $\boldsymbol{\omega}$ está dirigida a lo largo de uno de los ejes principales de inercia del cuerpo.

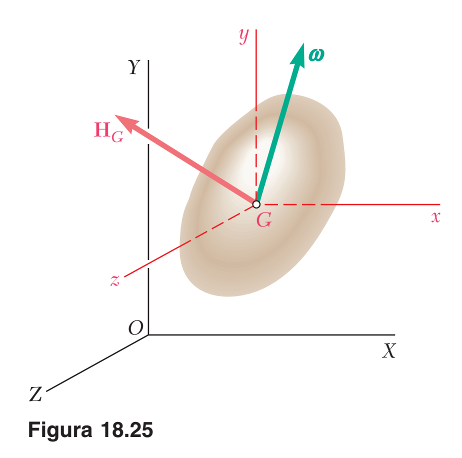


Figura 18.25

Cantidad de movimiento angular alrededor de un punto dado

Como el sistema de cantidades de movimiento de las partículas que forman a un cuerpo rígido puede reducirse al vector $m\bar{\mathbf{v}}$ asociado a G y al par $\mathbf{H}_G$ (figura 18.26), se advirtió que, una vez que se ha determinado la cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ y la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_G$ del cuerpo rígido, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor de cualquier punto O puede obtenerse al escribir

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \tag{18.11}$$

Cuerpo rígido con un punto fijo

En el caso particular de un cuerpo rígido *restringido a girar alrededor de un punto fijo O*, las componentes de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ del cuerpo alrededor de O se obtienen directamente de las componentes de su velocidad angular y de sus momentos y productos de inercia con respecto a los ejes que pasan por O. Se escribió

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \end{aligned} \tag{18.13}$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento

El *principio del impulso y la cantidad de movimiento* para un cuerpo rígido en movimiento tridimensional [sección 18.3] se expresa mediante la misma fórmula fundamental que se utilizó en el capítulo 17 para un cuerpo rígido en movimiento plano,

$$\textbf{Cant. Mov. Sist.}_1 + \textbf{Imp. Ext. Sis.}_{1\to 2} = \textbf{Cant. Mov. Sist.}_2 \tag{17.4}$$

aunque los sistemas de la cantidad de movimiento inicial y final ahora deben representarse como se indica en la figura 18.26, y es necesario calcular $\mathbf{H}_G$ a partir de las relaciones (18.7) o (18.10) [problemas resueltos 18.1 y 18.2].

Energía cinética de un cuerpo rígido en tres dimensiones

La *energía cinética* de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional puede dividirse en dos partes [sección 18.4], una asociada con el movimiento de su centro de masa G y la otra con su movimiento con respecto a G. Utilizando los ejes centroidales principales x', y', z', se escribió

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \tag{18.17}$$

donde
$\bar{\mathbf{v}}$ = velocidad del centro de masa
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular
m = masa del cuerpo rígido
$\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$ = momentos de inercia centroidales principales

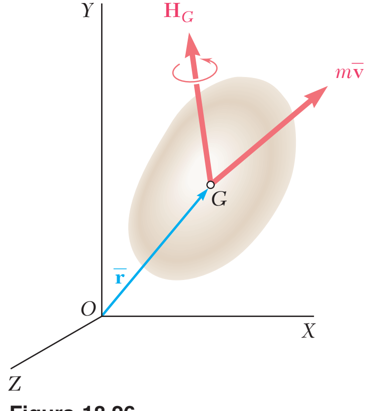


Figura 18.26

Se notó también que en el caso de un cuerpo rígido *restringido a girar alrededor de un punto fijo O*, la energía cinética del cuerpo puede expresarse como

$$T = \frac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.20)$$

donde los ejes x', y' y z' son los ejes principales de inercia del cuerpo en O. Los resultados que se obtuvieron en la sección 18.4 posibilitan extender al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido la aplicación del *principio del trabajo y la energía* y del *principio de la conservación de la energía.*

Utilización de un sistema de referencia en rotación para escribir las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido en el espacio

La segunda parte del capítulo se dedicó a la aplicación de las ecuaciones fundamentales

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad (18.1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (18.2)$$

al movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones. Se recordó [sección 18.5] que $\mathbf{H}_G$ representa la cantidad de movimiento angular del cuerpo relativa al sistema de referencia centroidal $GX'Y'Z'$ de orientación fija (figura 18.27) y que $\dot{\mathbf{H}}_G$ en la ecuación (18.2) representa la razón de cambio de $\mathbf{H}_G$ con respecto a ese sistema de referencia. Se vio que, cuando el cuerpo gira, sus momentos y productos de inercia con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ cambian en forma continua. Por lo tanto, resulta más conveniente utilizar un sistema de referencia en rotación $Gxyz$ cuando se descompone $\boldsymbol{\omega}$ en componentes y se calculan los momentos y productos de inercia que se usarán para determinar $\mathbf{H}_G$ de las ecuaciones (18.7) o (18.10). Sin embargo, puesto que $\dot{\mathbf{H}}_G$ en la ecuación (18.2) representa la razón de cambio de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija, se debe utilizar el método de la sección 15.10 para determinar su valor. Recordando la ecuación (15.31), se escribió

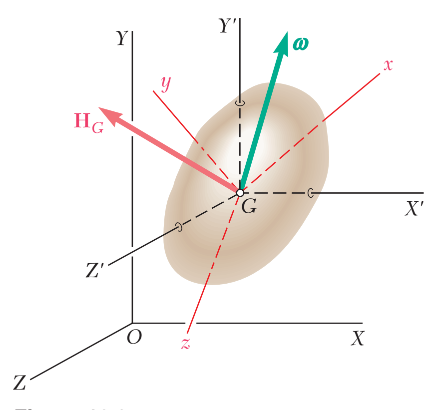


Figura 18.27

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (18.22)$$

donde $\mathbf{H}_G$ = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija

$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ = razón de cambio de $\mathbf{H}_G$ con respecto al sistema de referencia en rotación $Gxyz$, que se calculó de las relaciones (18.7)

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Gxyz$

Al sustituir $\dot{\mathbf{H}}_G$ de (18.22) en (18.2), se obtiene

$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (18.23)$$

Si el sistema de referencia en rotación está realmente sujeto al cuerpo, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idénticamente igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Sin embargo, hay muchas aplicaciones en las que tiene ventajas utilizar un sistema de referencia que no está asociado con el cuerpo, sino que gira de una manera independiente [problema resuelto 18.5].

Ecuaciones de movimiento de Euler. Principio de d'Alembert

Con $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ en la ecuación (18.23) utilizando los ejes principales y escribiendo esta ecuación en forma escalar, se obtienen las *ecuaciones de movimiento de Euler* [sección 18.6]. Un análisis de la solución de estas ecuaciones y de las ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación (18.1) lleva a extender el principio de d'Alembert al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido y a concluir que el sistema de fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido no es sólo equipolente, sino en verdad *equivalente* a las fuerzas efectivas del cuerpo representado por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.28). Los problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido pueden resolverse considerando la ecuación de diagramas de cuerpo libre representada en la figura 18.28 y escribiendo ecuaciones escalares apropiadas que relacionen las componentes o momentos de las fuerzas externas y las fuerzas efectivas [problemas resueltos 18.3 y 18.5].

Ecuación de diagramas de cuerpo libre

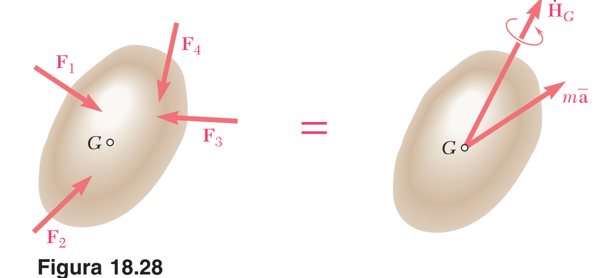


Figura 18.28

Cuerpo rígido con un plano fijo

En el caso de un cuerpo rígido *restringido a girar alrededor de un punto fijo O*, un método alternativo de solución, que incluye los momentos de las fuerzas y la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular alrededor del punto O, puede utilizarse. Se escribió [sección 18.7]:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \qquad (18.28)$$

donde $\Sigma \mathbf{M}_O$ = suma de momentos alrededor de O de las fuerzas aplicadas al cuerpo rígido
$\mathbf{H}_O$ = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$
$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = razón de cambio de $\mathbf{H}_O$ con respecto a un sistema de referencia en rotación $Oxyz$, que se calculará de las relaciones (18.13)
$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Oxyz$

Este planteamiento puede utilizarse para resolver ciertos problemas que implican la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo [sección 18.8], por ejemplo, una flecha rotatoria desbalanceada [problema resuelto 18.4].

Movimiento de un giroscopio

En la última parte del capítulo se consideró el movimiento de *giroscopios* y otros *cuerpos simétricos con respecto a un eje.* Al introducir los *ángulos de Euler* ϕ, θ y ψ para definir la posición de un giroscopio (figura 18.29), se observó que sus derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ representan, respectivamente, las velocidades de *precesión, nutación* y *giro* del giroscopio [sección 18.9]. Al expresar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en términos de estas derivadas, se escribió

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \,\mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \qquad (18.35)$$

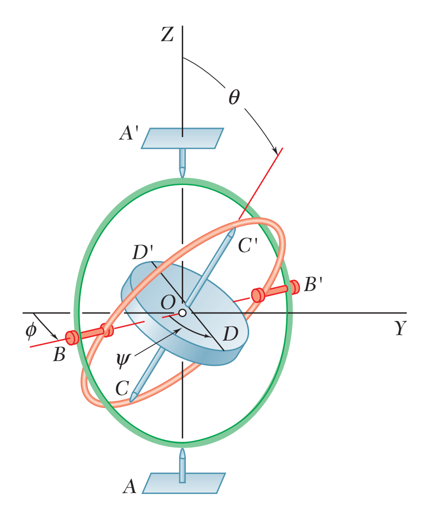


Figura 18.29

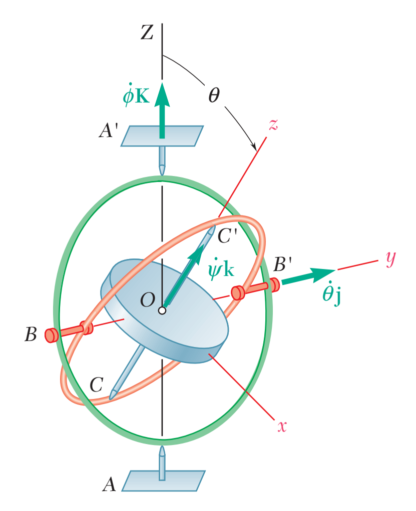


Figura 18.30

donde los vectores unitarios se asocian con el sistema de referencia *Oxyz* asociado con el balancín interno del giroscopio (figura 18.30) y gira, en consecuencia, con la velocidad angular

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \,\mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \,\mathbf{k} \qquad (18.38)$$

Al denotar por I el momento de inercia del giroscopio con respecto a su eje de giro z y por I' su momento de inercia con respecto a un eje transversal que pasa por O, se escribió

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \,\mathbf{i} + I'\dot{\theta}\mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \qquad (18.36)$$

Al sustituir $\mathbf{H}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ en la ecuación (18.28) lleva a ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del giroscopio.

Precesión estable

En el caso particular de la *precesión estable* del giroscopio [sección 18.10], el ángulo θ, la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$ permanecen constantes. Se vio que un movimiento de este tipo sólo es posible si los momentos de las fuerzas externas alrededor de O satisfacen la relación

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (I\omega_z - I'\dot{\phi} \cos \theta)\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} \qquad (18.44)$$

esto es, si las fuerzas externas se reducen a un par de momento igual al miembro del lado derecho de la ecuación (18.44) y se aplican *alrededor de un eje perpendicular al eje de precesión y al eje de giro* (figura 18.31). El capítulo finalizó con el análisis del movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje que gira y precede *sin someterse a ninguna fuerza* [sección 18.11; problema resuelto 18.6].

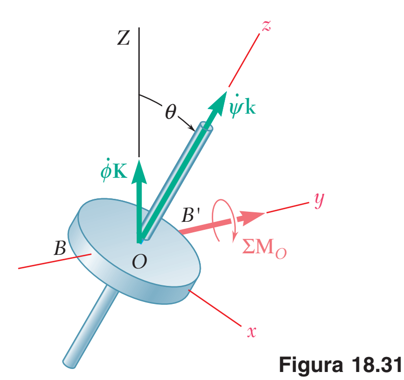


Figura 18.31

Problemas de repaso

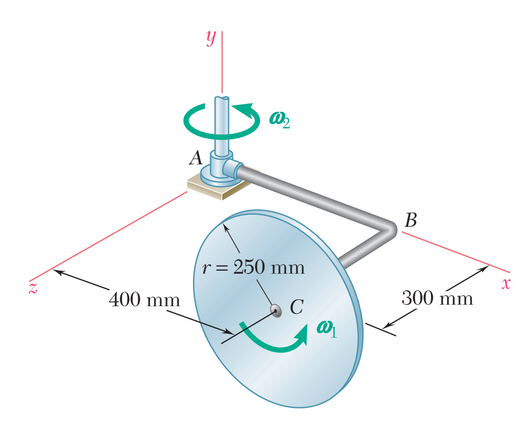


Figura P18.147

18.147 Un disco homogéneo de masa $m = 5$ kg gira a la razón constante $\omega_1 = 8$ rad/s con respecto al eje doblado *ABC*, el cual a su vez rota a la velocidad constante $\omega_2 = 3$ rad/s alrededor del eje *y*. Determine la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_C$ del disco alrededor de su centro *C*.

18.148 Dos brazos en forma de L, cada uno con un peso de 5 lb, se sueldan a los puntos que dividen en tercios a la flecha *AB* de 24 in. Si se sabe que la flecha *AB* gira a la razón constante $\omega = 180$ rpm, determine *a*) la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_A$ del cuerpo alrededor de *A*, *b*) el ángulo que forma $\mathbf{H}_A$ con la flecha.

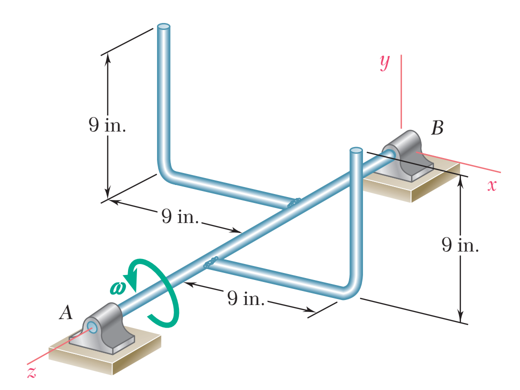


Figura P18.148

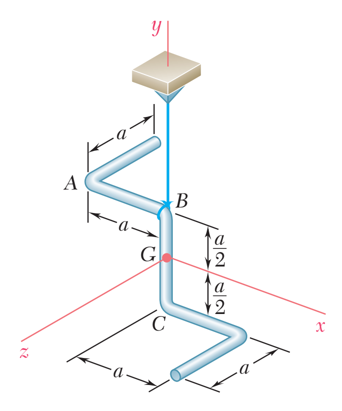


Figura *P18.149*

18.149 Una barra uniforme de masa *m* y longitud 5*a* se dobla en la forma mostrada y se suspende de un alambre conectado al punto *B*. Si la barra se golpea en el punto *C* en la dirección *z* negativa y se denota al impulso correspondiente con $-(F\,\Delta t)\mathbf{k}$, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular de la barra, *b*) la velocidad de su centro de masa *G*.

18.150 Un disco homogéneo de radio *a* y masa *m* está soportado por una articulación de rótula en el punto *A* gira alrededor de su diámetro vertical con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{j}$ cuando se introduce de manera repentina una obstrucción en el punto *B*. Si se supone que el impacto será perfectamente plástico ($e = 0$), determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular del disco, *b*) la velocidad de su centro de masa *G*.

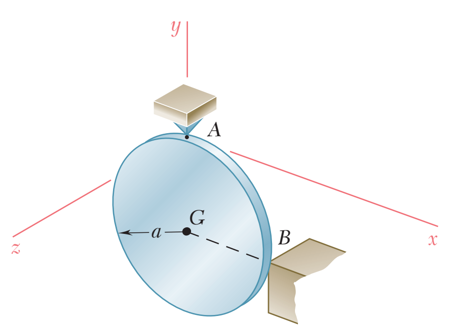


Figura P18.150

18.151 Determine la energía cinética perdida cuando el disco del problema 18.150 golpea la obstrucción en B.

18.152 Cada una de las dos placas triangulares que se muestran en la figura tiene una masa de 5 kg y están soldadas a una flecha vertical AB. Si se sabe que el ensamble gira a la velocidad constante $\boldsymbol{\omega} = 8$ rad/s, determine las reacciones dinámicas en A y en B.

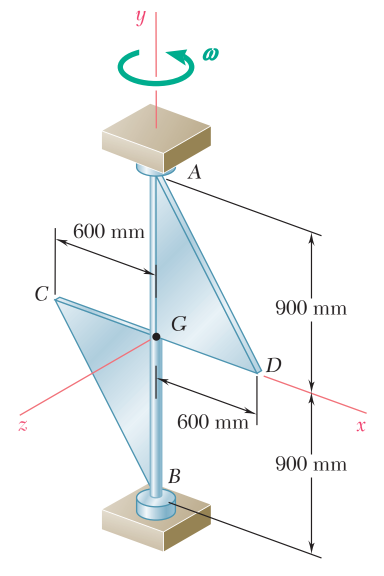


Figura *P18.152*

18.153 Una pieza de lámina de acero de 2.4 kg, con dimensiones de 160 × 640 mm se dobló para formar el componente mostrado. El componente está en reposo ($\boldsymbol{\omega} = 0$) cuando se le aplica un par $\mathbf{M}_0 = 0.8$ N · m)$\mathbf{k}$. Determine a) la aceleración angular del componente, b) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de que el par ha sido aplicado.

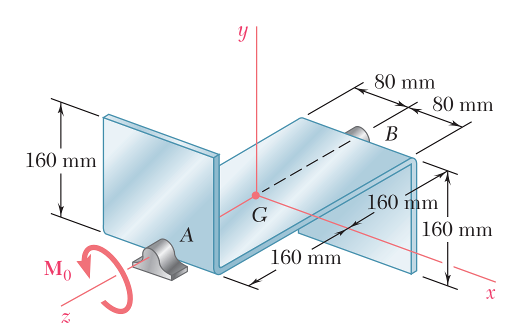


Figura *P18.153*

18.154 Un anillo delgado de 3 in. de radio se conecta mediante un collarín en el punto A a una flecha vertical que gira con una velocidad angular constante ω. Determine a) el ángulo constante β que forma el plano del anillo con la vertical cuando $\omega = 12$ rad/s, b) el valor máximo de ω para el cual el anillo permanecerá vertical ($\beta = 0$).

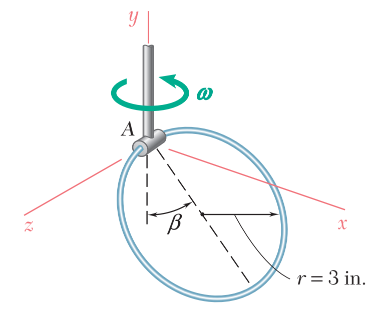


Figura P18.154

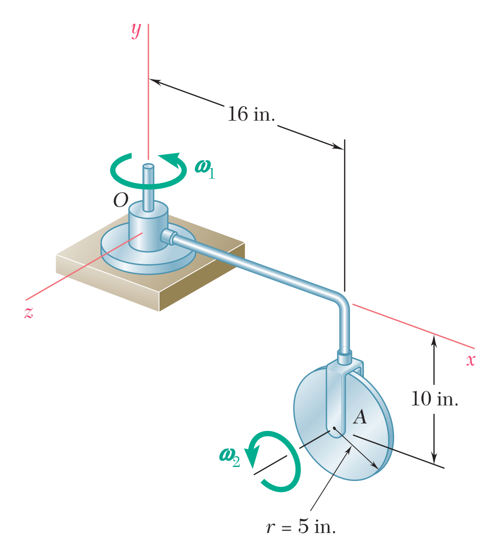


Figura P18.155

18.155 Un disco delgado de peso $W = 8$ lb gira con una velocidad angular ω_2 con respecto al brazo OA, el cual a su vez rota con una velocidad angular ω_1 alrededor del eje y. Determine a) el par $M_1\mathbf{j}$ que debe aplicarse al brazo OA para darle una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_1 = (6 \text{ rad/s}^{2)}\mathbf{j}$ con $\omega_1 = 4$ rad/s, si se sabe que el disco gira a la razón constante $\omega_2 = 12$ rad/s, b) el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica en O en ese instante. Suponga que el brazo OA tiene una masa insignificante.

18.156 Un concentrador de energía solar experimental de lentes Fresnel puede girar alrededor del eje horizontal AB que pasa a través de su centro de masa G. Está soportado en A y B por una estructura de acero que puede girar alrededor del eje vertical y. El concentrador tiene una masa de 30 Mg, un radio de giro de 12 m alrededor de su eje de simetría CD y un radio de giro de 10 m alrededor de cualquier eje transversal que pasa por G. Si las velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ tienen magnitudes constantes iguales a 0.20 rad/s y 0.25 rad/s, respectivamente, determine para la posición $\theta = 60°$ *a*) las fuerzas ejercidas sobre el concentrador en A y B, *b*) el par $M_2\mathbf{k}$ aplicado al concentrador en ese instante.

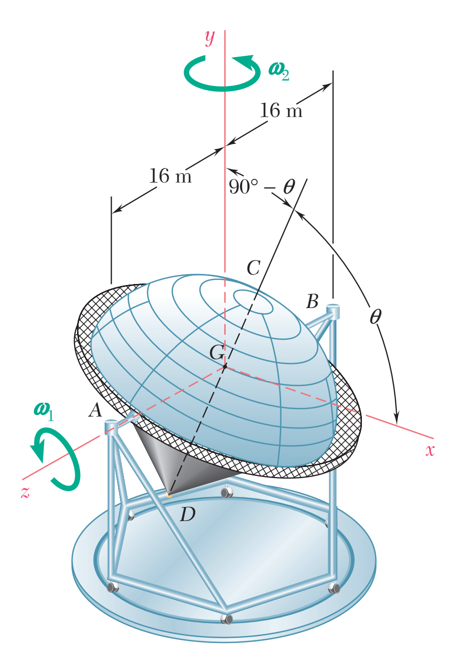


Figura P18.156

18.157 Un disco de 2 kg y 150 mm de diámetro se conecta al extremo de una barra AB de masa despreciable que se soporta mediante una articulación de rótula en el punto A. Si se observa que el disco precede alrededor del eje vertical en el sentido indicado y a la velocidad constante de 36 rpm, determine la velocidad de giro $\dot{\psi}$ del disco alrededor de AB.

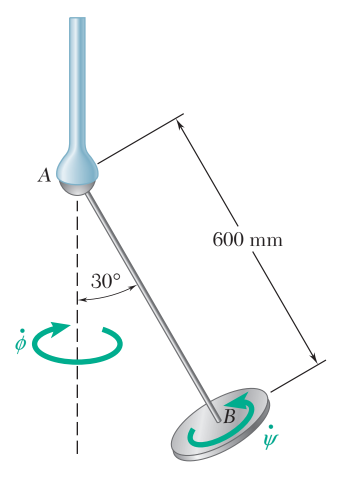


Figura P18.157

18.158 En la figura se muestran las características esenciales del girocompás. El rotor gira a la razón $\dot{\psi}$ alrededor de un eje montado en una sola junta universal, que puede girar libremente alrededor del eje vertical AB. El ángulo formado por el eje del rotor y el plano del meridiano se denota con θ, y la latitud de la posición sobre la Tierra se denota con λ. Se observa que la línea OC es paralela al eje de la Tierra y con ω_e se denota la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje.

a) Demuestre que las ecuaciones de movimiento del girocompás son

$$I'\ddot{\theta} + I\omega_z\omega_e \cos\lambda \operatorname{sen}\theta - I'\omega_e^2 \cos^2\lambda \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0$$
$$I\dot{\omega}_z = 0$$

donde ω_z es la componente rectangular de la velocidad angular total $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje del rotor, e I e I' son los momentos de inercia del rotor con respecto a su eje de simetría y un eje transversal que pasa por O, respectivamente.

b) Si se desprecia el término que contiene ω_e^2, demuestre que para valores pequeños de θ, se tiene

$$\ddot{\theta} + \frac{I\omega_z\omega_e \cos\lambda}{I'}\theta = 0$$

y que el eje del girocompás oscila alrededor de la dirección norte-sur.

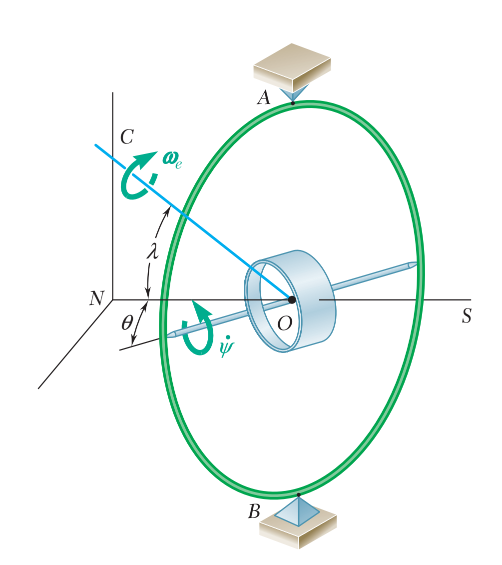


Figura *P18.158*

Problemas de computadora

18.C1 Un alambre de sección transversal uniforme y peso por unidad de longitud de $\frac{5}{8}$ oz./ft se usa para formar la figura de alambre que se muestra, la cual se suspende de la cuerda *AD*. Se aplica un impulso $\mathbf{F}\,\Delta t = (0.5$ lb · s)$\mathbf{j}$ a la figura de alambre en el punto *E*. Utilice software para calcular y graficar, inmediatamente después del impacto, para valores de θ desde 0 hasta 180°, *a*) la velocidad del centro de masa de la figura de alambre, *b*) la velocidad angular de la figura.

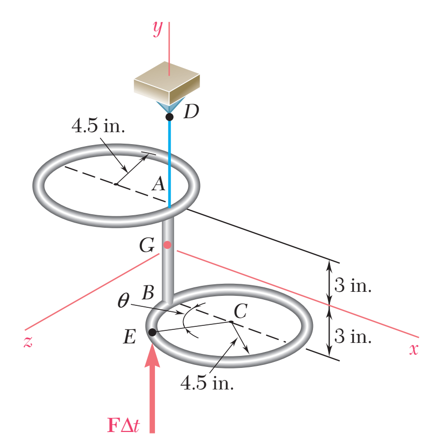


Figura P18.C1

18.C2 Una sonda de 2 500 kg en órbita alrededor de la Luna mide 2.4 m de altura y tiene una base octagonal de lados de 1.2 m. Los ejes de coordenadas que se muestran son los ejes de inercia centroidales de la sonda, y sus radios de giro son $k_x = 0.98$ m, $k_y = 1.06$ m y $k_z = 1.02$ m. La sonda está equipada con un propulsor principal *E* de 500 N y con cuatro propulsores *A*, *B*, *C* y *D* de 20 N que pueden expeler combustible en la dirección *y* positiva. La sonda tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_z\mathbf{k}$ cuando se usan dos de los propulsores de 20 N para reducir la velocidad angular a cero. Use software a fin de determinar, para cualquier par de valores de ω_x y ω_z menor o igual que 0.06 rad/s, cuáles de los propulsores deben utilizarse y por cuánto tiempo deben activarse. Aplique este programa con el supuesto de que $\boldsymbol{\omega}$ es *a*) la velocidad angular dada en el problema 18.33, *b*) la velocidad angular dada en el problema 18.34, *c*) $\boldsymbol{\omega} = (0.06$ rad/s$)\mathbf{i} + (0.02$ rad/s$)\mathbf{k}$, *d*) $\boldsymbol{\omega} = (0.06$ rad/s$)\mathbf{i} - (0.02$ rad/s$)\mathbf{k}$.

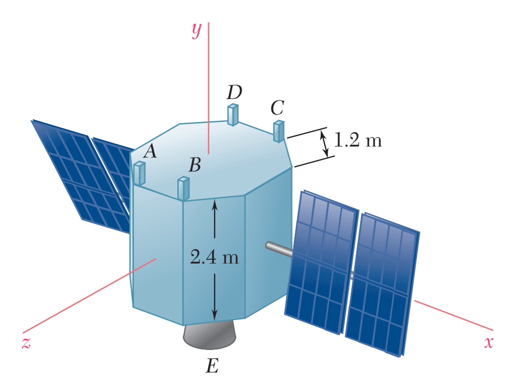


Figura P18.C2

18.C3 Un par $\mathbf{M}_0 = (0.03 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i}$ se aplica a un ensamble compuesto de piezas de hoja de aluminio de espesor uniforme y 2.7 lb de peso total, las cuales se sueldan a un eje ligero soportado por los cojinetes en A y B. Use software para determinar las reacciones dinámicas ejercidas por los cojinetes sobre el eje en cualquier tiempo t después que se ha aplicado el par. Descomponga estas reacciones en componentes dirigidas a lo largo de los ejes y y z que giran con el ensamble. *a*) Calcule y grafique las componentes de las reacciones desde $t = 0$ hasta $t = 2$ s con intervalos de 0.1 s. *b*) Determine el tiempo en el cual las componentes z de las reacciones en A y B son iguales a cero.

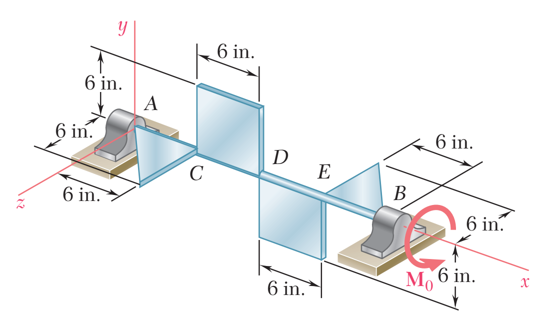


Figura P18.C3

18.C4 Un disco homogéneo de 2.5 kg de 80 mm de radio puede girar con respecto al brazo ABC, el cual está soldado a la flecha DCE soportada mediante los cojinetes en D y E. Tanto el brazo como la flecha tienen masa insignificante. En el tiempo $t = 0$ se aplica un par $\mathbf{M}_0 = (0.5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ a la flecha DCE. Si se sabe que en $t = 0$ la velocidad angular del disco es $\boldsymbol{\omega}_1 = (60 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ y esa fricción en el cojinete en A ocasiona que la magnitud de ω_1 disminuya a razón de 15 rad/s^2, determine las reacciones dinámicas ejercidas sobre la flecha por los cojinetes en D y E en cualquier tiempo t. Descomponga estas reacciones en componentes dirigidas a lo largo de los ejes x y y que giran con la flecha. Utilice software *a*) para calcular y graficar las componentes de las reacciones desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s, *b*) para determinar los tiempos t_1 y t_2 en los cuales las componentes x y y de las reacciones en E son, respectivamente, iguales a cero.

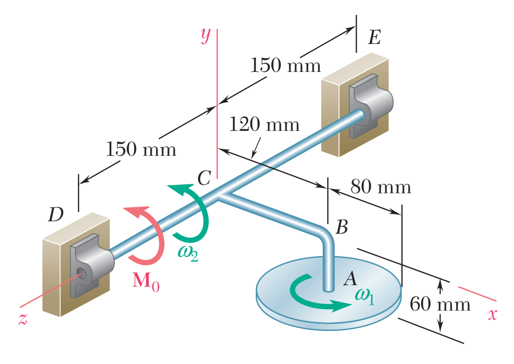


Figura P18.C4

18.C5 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra *AG* de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se conecta mediante una horquilla a un eje vertical *AB*. La barra y el disco pueden girar con libertad alrededor de un eje horizontal *AC*, y la flecha *AB* gira libremente alrededor de un eje vertical. En un principio la barra *AG* forma un ángulo dado θ_0 con la vertical descendente y su velocidad angular $\dot{\theta}_0$ alrededor de *AC* es cero. A la flecha *AB* se le imprime después una velocidad angular $\dot{\phi}_0$ alrededor de la vertical. Emplee software *a*) para calcular el valor mínimo θ_m del ángulo θ en el movimiento subsecuente y el periodo de oscilación en θ, es decir, el tiempo requerido para que θ recupere su valor inicial θ_0, *b*) para calcular y graficar la velocidad angular $\dot{\phi}$ de la flecha *AB* para valores de θ desde θ_0 hasta θ_m. Aplique este software con las condiciones iniciales *i*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, *ii*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\phi}_0 = 10$ rad/s, *iii*) $\theta_0 = 60°$, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s. [*Sugerencia*: Utilice el principio de la conservación de la energía y el hecho de que la cantidad de momento angular del cuerpo respecto a la vertical que pasa por *A* se conservan para obtener una ecuación de la forma $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Esta ecuación puede integrarse mediante un método numérico.]

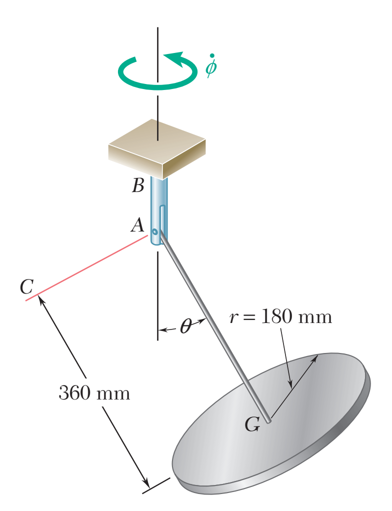


Figura P18.C5

18.C6 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra *AG* de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se sostiene mediante una junta de rótula en *A*. El disco se suelta en la posición $\theta = \theta_0$, con una razón de giro $\dot{\psi}_0$, una razón de precesión $\dot{\phi}_0$ y una razón de nutación nula. Utilice software *a*) para calcular el valor mínimo θ_m del ángulo θ en el movimiento subsecuente y el periodo de oscilación en θ es decir, el tiempo que se requiere para que θ vuelva a su valor inicial θ_0, *b*) para calcular y graficar la razón de giro $\dot{\psi}$ y la razón de precesión $\dot{\phi}$ para valores de θ desde θ_0 hasta θ_m usando decrementos de 2°. Aplique este software con las condiciones iniciales *i*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 0$, *ii*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 0$, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, *iii*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, *iv*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 10$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, *v*) $\theta_0 = 60°$, $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s. [*Sugerencia:* Utilice el principio de la conservación de la energía y el hecho de que la cantidad de momento angular del cuerpo se conserva con respecto tanto al eje *Z* como al eje *z* para obtener una ecuación de la forma $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Esta ecuación puede integrarse mediante un método numérico.]

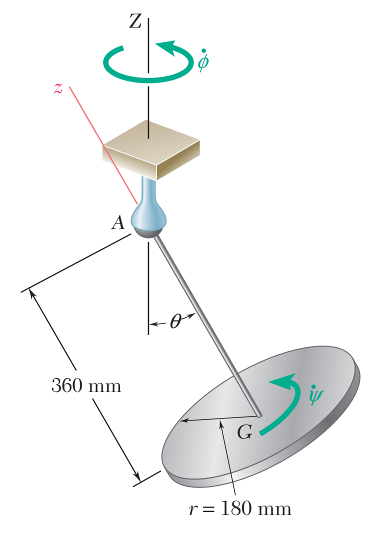


Figura P18.C6

El amortiguador de viento dentro del Taipei 101 da protección contra tifones y terremotos al reducir los efectos del viento y las vibraciones sobre el edificio. Los sistemas mecánicos pueden experimentar *vibraciones libres* o pueden estar sometidos a *vibraciones forzadas*. Las vibraciones son *amortiguadas* cuando se presentan fuerzas de fricción y *no amortiguadas* en cualquier otro caso. Este capítulo es una introducción a muchos conceptos fundamentales en el análisis de vibraciones.



CAPÍTULO 19

Vibraciones mecánicas

19.1. INTRODUCCIÓN

Una *vibración mecánica* es el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio. La mayoría de las vibraciones en máquinas y estructuras son indeseables debido al aumento de los esfuerzos y a las pérdidas de energía que las acompañan. Por lo tanto, es necesario eliminarlas o reducirlas en el mayor grado posible mediante un diseño apropiado. El análisis de vibraciones se ha vuelto cada vez más importante en los últimos años debido a la tendencia actual para producir máquinas de más alta velocidad y estructuras más ligeras. Hay razones para esperar que esta tendencia continuará y que una incluso mayor necesidad de análisis de vibraciones se generará en el futuro.

El análisis de vibraciones es un tema muy amplio al cual se han dedicado textos completos. En consecuencia, este estudio se limitará a los tipos más simples de vibraciones, a saber, las vibraciones de un cuerpo o un sistema de cuerpos con un grado de libertad.

Una vibración mecánica se produce por lo general cuando un sistema se desplaza de una posición de equilibrio estable. El sistema tiende a retornar a su posición bajo la acción de fuerzas restauradoras (ya sea fuerzas elásticas, como en el caso de una masa unida a un resorte, o fuerzas gravitacionales, como en el caso de un péndulo). Pero el sistema por lo general alcanza su posición original con cierta velocidad adquirida que lo lleva más allá de esa posición. Puesto que el proceso puede repetirse de manera indefinida, el sistema se mantiene moviéndose de un lado a otro de su posición de equilibrio. El intervalo de tiempo requerido para que el sistema realice un ciclo de movimiento completo recibe el nombre de *periodo* de la vibración. El número de ciclos por unidad de tiempo define la *frecuencia* y el desplazamiento máximo del sistema a partir de su posición de equilibrio se conoce como *amplitud* de la vibración.

Cuando el movimiento se mantiene únicamente por medio de fuerzas restauradoras, se dice que la fricción es una *vibración libre* (secciones 19.2 a 19.6). Cuando se aplica una fuerza periódica al sistema, el movimiento resultante se describe como una *vibración forzada* (sección 19.7). Cuando es posible ignorar los efectos de la fricción se afirma que las vibraciones son *no amortiguadas.* Sin embargo, todas las vibraciones son en realidad *amortiguadas* hasta cierto grado. Si una vibración libre sólo se amortigua de manera ligera, su amplitud decrece de manera lenta hasta que, después de cierto tiempo, el movimiento se interrumpe. Pero si el amortiguamiento es suficientemente largo para evitar cualquier vibración verdadera, en ese caso el sistema recupera lentamente su posición original (sección 19.8). Una vibración forzada amortiguada se mantiene siempre y cuando se aplique la fuerza periódica que la produce. Sin embargo, la amplitud de la vibración se ve afectada por la magnitud de las fuerzas de amortiguamiento (sección 19.9).

VIBRACIONES SIN AMORTIGUAMIENTO

19.2. VIBRACIONES LIBRES DE PARTÍCULAS. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Considere un cuerpo de masa m unido a un resorte de constante k (figura 19.1*a*). Puesto que en el tiempo presente se considera sólo el movimiento de su centro de masa, a este cuerpo se le considerará como una partícula. Cuando la partícula está en equilibrio estático, las fuer-

zas que actúan sobre ella son su peso **W** y la fuerza **T** ejercida por el resorte, de magnitud $T = k\delta_{\text{estática}}$, donde $\delta_{\text{estática}}$ denota la elongación del resorte. Por lo tanto, se tiene,

$$W = k\delta_{\text{estática}}$$

Supóngase ahora que la partícula se desplaza a una distancia x_m desde su posición de equilibrio y se suelta sin velocidad inicial. Si x_m se ha elegido más pequeña que $\delta_{\text{estática}}$, la partícula se moverá hacia un lado y otro de su posición de equilibrio; se ha generado una vibración de amplitud x_m. Advierta que la vibración también puede producirse impartiendo cierta velocidad inicial a la partícula cuando ésta se encuentra en la posición de equilibrio $x = 0$ o, de manera más general, al iniciar el movimiento de la partícula desde una posición dada $x = x_0$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$.

Para analizar la vibración, se considerará la partícula en una posición P en algún tiempo arbitrario t (figura 19.1*b*). Denotando por x el desplazamiento OP medido desde la posición de equilibrio O (positivo hacia abajo), se nota que las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso **W** y la fuerza **T** ejercida por el resorte que, en esta posición, tiene una magnitud $T = k(\delta_{\text{estática}} + x)$. Como $W = k\delta_{\text{estática}}$ se encuentra que la magnitud de la resultante **F** de las dos fuerzas (positiva hacia abajo) es

$$F = W - k(\delta_{\text{estática}} + x) = -kx \tag{19.1}$$

De tal modo la *resultante* de las fuerzas ejercidas sobre la partícula es proporcional al desplazamiento OP *medido desde la posición de equilibrio.* Recordando la convención de signos, se advierte que **F** está dirigida siempre *hacia* la posición de equilibrio O. Sustituyendo F en la ecuación fundamental $F = ma$ y recordando que a es la segunda derivada $\ddot{x}$ de x con respecto a t, se escribe

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{19.2}$$

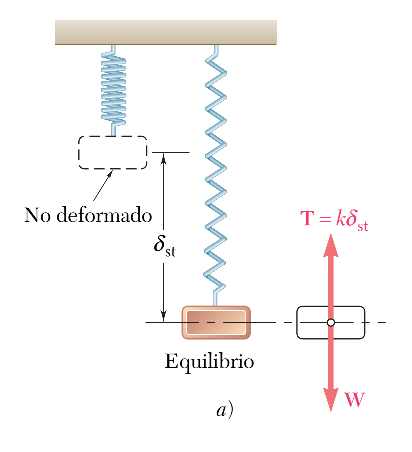
Hay que observar que debe usarse la misma convención de signos para la aceleración $\ddot{x}$ y para el desplazamiento x, a saber, positivo hacia abajo.

El movimiento definido por la ecuación (19.2) recibe el nombre de *movimiento armónico simple.* Éste se caracteriza por el hecho de que *la aceleración es proporcional al desplazamiento y de dirección opuesta.* Se puede verificar que cada una de las funciones $x_1 = \text{sen}\,(\sqrt{k/m}\,t)$ y $x_2 = \cos\,(\sqrt{k/m}\,t)$ satisface la ecuación (19.2). Por lo tanto, estas funciones constituyen dos *soluciones particulares* de la ecuación diferencial (19.2). La *solución general* de la ecuación 19.2 se obtiene al multiplicar cada una de las soluciones particulares por una constante arbitraria y sumando. De tal manera, la solución general se expresa como

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1 \,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \tag{19.3}$$

Observe que x es una *función periódica* del tiempo t y que, por lo tanto, representa una vibración de la partícula P. El coeficiente de t en la expresión obtenida se conoce como la *frecuencia circular natural* de la vibración y se denota por ω_n. Se tiene

$$\text{Frecuencia circular natural} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{19.4}$$



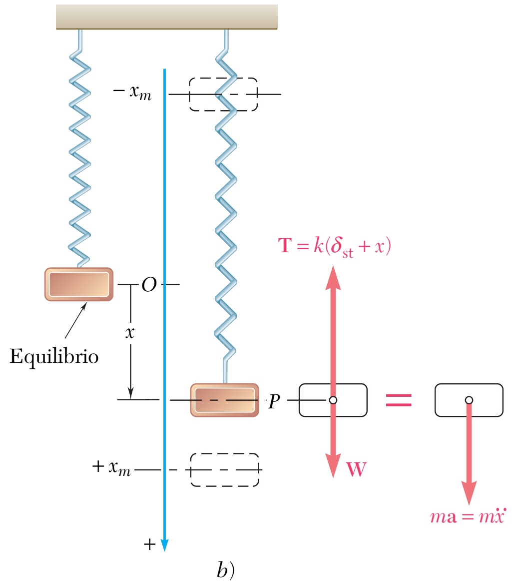


Figura 19.1

Al sustituir $\sqrt{k/m}$ en la ecuación (19.3), se escribe

$$x = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \tag{19.5}$$

Ésta es la solución general de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{19.6}$$

que puede obtenerse de la ecuación (19.2) al dividir ambos términos entre m y al observar que $k/m = \omega_n^2$. Al diferenciar dos veces ambos miembros de la ecuación (19.5) con respecto a t, se obtienen las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración en el tiempo t:

$$v = \dot{x} = C_1\omega_n \cos \omega_n t - C_2\omega_n \text{ sen } \omega_n t \tag{19.7}$$

$$a = \ddot{x} = -C_1\omega_n^2 \text{ sen } \omega_n t - C_2\omega_n^2 \cos \omega_n t \tag{19.8}$$

Los valores de las constantes C_1 y C_2 dependen de las *condiciones iniciales* del movimiento. Por ejemplo, se tiene $C_1 = 0$ si la partícula se desplaza desde su posición de equilibrio y se suelta en $t = 0$ sin ninguna velocidad inicial, y $C_2 = 0$ si la partícula empieza desde O en $t = 0$ con cierta velocidad inicial. En general, al sustituir $t = 0$ y los valores iniciales x_0 y v_0 del desplazamiento y la velocidad en las ecuaciones (19.5) y (19.7), se halla que $C_1 = v_0/\omega_n$ y $C_2 = x_0$.

Las expresiones obtenidas para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de una partícula pueden escribirse en una forma más compacta si se observa que la ecuación (19.5) expresa que el desplazamiento $x = OP$ es la suma de las componentes de dos vectores $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$, respectivamente, de magnitud C_1 y C_2, dirigidos como se muestra en la figura 19.2*a*. Cuando t varía, ambos vectores giran en el sentido de las manecillas del reloj; también se nota que la magnitud de su resultante $\overrightarrow{OQ}$ es igual al desplazamiento máximo x_m. El movimiento armónico simple de P a lo largo del eje x puede obtenerse de esta manera proyectando sobre este eje el movimiento de un punto Q que describe un *círculo auxiliar* de radio x_m *con una velocidad angular constante* ω_n (lo cual explica el nombre de frecuencia *circular* natural dado a ω_n). Al denotar por ϕ el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{OQ}$ y $\mathbf{C}_1$, se escribe

$$OP = OQ \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \tag{19.9}$$

que conduce a nuevas expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de P:

$$x = x_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \tag{19.10}$$

$$v = \dot{x} = x_m\omega_n \cos (\omega_n t + \phi) \tag{19.11}$$

$$a = \ddot{x} = -x_m\omega_n^2 \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \tag{19.12}$$

La curva desplazamiento-tiempo se representa por medio de una curva senoidal (figura 19.2*b*); el valor máximo x_m del desplazamiento se denomina la *amplitud* de la vibración, y el ángulo ϕ que define la posición inicial de Q en el círculo se llama *ángulo de fase.* En la figura 19.2 se advirtió que un *círculo* completo se describe cuando el ángulo $\omega_n t$ aumenta en 2π rad. El valor correspondiente de t, denotado por τ_n, se llama el *periodo* de la vibración libre y se mide en segundos. Se tiene

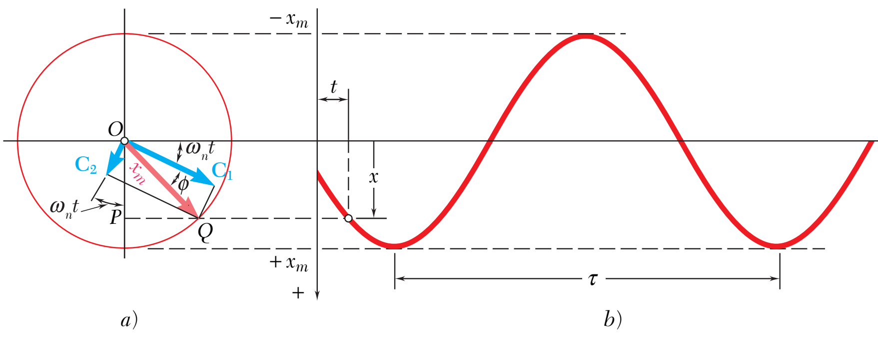


Figura 19.2

$$\text{Periodo} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{19.13}$$

El número de ciclos descritos por unidad de tiempo se denota mediante f_n y se conoce como *frecuencia natural* de la vibración. Se escribe

$$\text{Frecuencia natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{19.14}$$

La unidad de frecuencia es una frecuencia de 1 ciclo por segundo, correspondiendo a un periodo de 1 s. En términos de unidades fundamentales la unidad de frecuencia es consecuentemente 1/s o s^{-1}. Se denomina *hertz* (Hz) en el SI de unidades. También se concluye de la ecuación (19.14) que una frecuencia de 1 s^{-1} o 1 Hz corresponde a una frecuencia circular de 2π rad/s. En problemas que implican velocidades angulares expresadas en revoluciones por minuto (rpm), se tiene que 1 rpm $= \frac{1}{60}$ $s^{-1} = \frac{1}{60}$ Hz, o 1 rpm $= (2\pi/60)$ rad/s.

Al recordar que ω_n se definió en (19.4) en términos de la constante k del resorte y de la masa m de la partícula, se observa que el periodo y la frecuencia son independientes de las condiciones iniciales y de la amplitud de la vibración. Hay que observar que τ_n y f_n dependen de la *masa* y no del *peso* de la partícula y, por ello, son independientes del valor de g.

Las curvas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo pueden representarse mediante curvas senoidales del mismo periodo que la curva desplazamiento-tiempo, pero con ángulos de fase diferentes. De las ecuaciones (19.11) y (19.12), se nota que los valores máximos de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

$$v_m = x_m\omega_n \qquad a_m = x_m\omega_n^2 \tag{19.15}$$

Puesto que el punto Q describe al círculo auxiliar, de radio x_m a la velocidad angular constante ω_n, su velocidad y aceleración son iguales, respectivamente, a las expresiones (19.15). Si se recuerdan las ecuaciones (19.11) y (19.12), se halla, por tanto, que la velocidad y la aceleración de P pueden obtenerse en cualquier instante proyectando sobre el eje x vectores de magnitudes $v_m = x_m\omega_n$ y $a_m = x_m\omega_n^2$ que representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de Q en el mismo instante (figura 19.3).

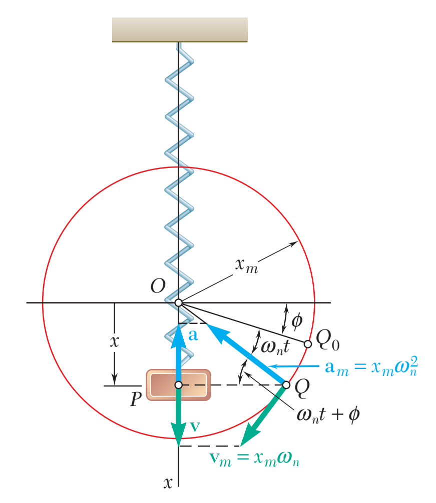


Figura 19.3

Los resultados que se obtienen no se limitan a la solución del problema de una masa o unidad para un resorte. Es posible utilizarlos para analizar el movimiento rectilíneo de una partícula *cada vez que la resultante* **F** *de las fuerzas que actúan sobre una partícula es proporcional al desplazamiento x y está dirigida hacia O.* La ecuación fundamental de movimiento $F = ma$ puede escribirse entonces en la forma de la ecuación (19.6), que es característica de un movimiento armónico simple. Al observar que el coeficiente de x debe ser igual a ω_n^2, es posible determinar con facilidad la frecuencia circular natural ω_n del movimiento. Sustituyendo el valor que se obtuvo para ω_n en las ecuaciones (19.13) y (19.14), se obtiene entonces el periodo τ_n y la frecuencia natural f_n del movimiento.

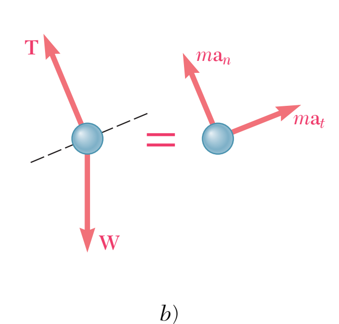
19.3. PÉNDULO SIMPLE (SOLUCIÓN APROXIMADA)

La mayor parte de las vibraciones encontradas en aplicaciones de ingeniería se representan mediante un movimiento armónico simple. Muchas otras, aunque de un tipo diferente, se *aproximan* por medio de un movimiento armónico simple, siempre que su amplitud permanezca pequeña. Considere, por ejemplo, un *péndulo simple,* consistente en una plomada de masa m unida a una cuerda de longitud l, que tiene la posibilidad de oscilar en un plano vertical (figura 19.4*a*). En un tiempo dado t, la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre la plomada son su peso **W** y la fuerza **T** ejercida por la cuerda (figura 19.4*b*). Al descompensar el vector $m\mathbf{a}$ de las componentes tangencial y normal, con $m\mathbf{a}_t$ dirigida hacia la derecha, esto es, en la dirección que corresponde a valores crecientes de θ, y observar que $a_t = l\alpha = l\ddot{\theta}$, se escribe

$$\Sigma F_t = ma_t: \qquad -W \text{ sen } \theta = ml\ddot{\theta}$$

Si se observa que $W = mg$ y se divide entre ml, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{ sen } \theta = 0 \qquad (19.16)$$



b)

Figura 19.4

Para oscilaciones de amplitud pequeña, puede sustituirse sen θ por θ, expresado en radianes, y escribirse

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\, \theta = 0 \qquad (19.17)$$

La comparación con la ecuación (19.6) muestra que la ecuación diferencial (19.17) es la de un movimiento armónico simple con una frecuencia circular natural ω_n igual a $(g/l)^{1/2}$. La solución general de la ecuación (19.17) puede, por consiguiente, expresarse como

$$\theta = \theta_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi)$$

donde θ_m es la amplitud de las oscilaciones y ϕ es el ángulo de paso. Al sustituir en la ecuación (19.13) el valor obtenido por ω_n, se obtiene la siguiente expresión por el periodo de las oscilaciones pequeñas de un péndulo de longitud l:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (19.18)$$

*19.4. PÉNDULO SIMPLE (SOLUCIÓN EXACTA)

La fórmula (19.18) es sólo aproximada. Para obtener una expresión exacta relativa al periodo de las oscilaciones de un péndulo simple, se debe volver a la ecuación (19.16). Multiplicando ambos términos por $2\dot{\theta}$ e integrando desde una posición inicial correspondiente a la máxima desviación, esto es, $\theta = \theta_m$ y $\dot{\theta} = 0$, se escribe

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

Si se sustituye $\cos\theta$ por $1 - 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$ y $\cos\theta_m$ por una expresión similar, resolviendo para dt, y se integra sobre un cuarto de periodo desde $t = 0$, $\theta = 0$ hasta $t = \tau_n/4$, $\theta = \theta_m$, se tiene

$$\tau_n = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_m}\frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2(\theta_m/2) - \text{sen}^2(\theta/2}}$$

La integral en el miembro del lado derecho se conoce como una *integral elíptica*; ésta no puede expresarse en términos de las funciones algebraicas o trigonométricas usuales. Sin embargo, al establecer

$$\text{sen}(\theta/2) = \text{sen}(\theta_m/2)\,\text{sen}\,\phi$$

se puede escribir

$$\tau_n = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_m/2)\,\text{sen}^2\phi}} \tag{19.19}$$

donde la integral que se obtiene, denotada comúnmente por K, puede calcularse utilizando métodos de integración numérica. También puede encontrarse en *tablas de integrales elípticas* para diversos valores de $\theta_m/2$.[†] Para comparar el resultado que acaba de obtenerse con el de la sección anterior, se escribe la ecuación (19.19) en la forma

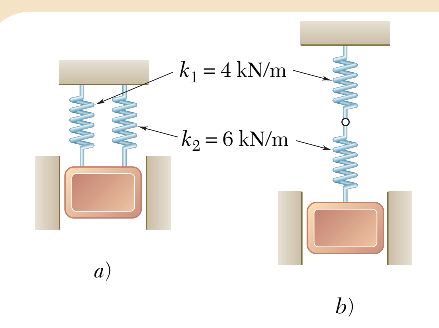
$$\tau_n = \frac{2K}{\pi}\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \tag{19.20}$$

La fórmula (19.20) muestra que el valor real del periodo de un péndulo simple se puede obtener al multiplicar el valor aproximado dado en la ecuación (19.18) por el factor de corrección $2K/\pi$. Los valores del factor de corrección se dan en la tabla 19.1 para diversos valores de la amplitud θ_m. Advierta que para cálculos de ingeniería ordinarios el factor de corrección puede omitirse siempre y cuando la amplitud no supere 10°.

Tabla 19.1. Factor de corrección para el periodo de un péndulo simple

θ_m	0°	10°	20°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	1.571	1.574	1.583	1.598	1.686	1.854	2.157	2.768	∞
$2K/\pi$	1.000	1.002	1.008	1.017	1.073	1.180	1.373	1.762	∞

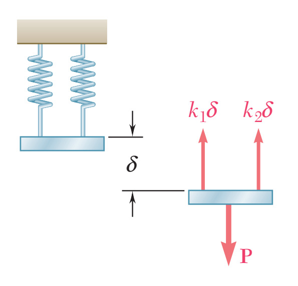
[†] Véase, por ejemplo, *Standard Mathematical Tables,* Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio.



PROBLEMA RESUELTO 19.1

Un bloque de 50 kg se mueve entre guías verticales como se muestra. El bloque es empujado 40 mm hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta. Para cada arreglo de resorte, determine el periodo de la vibración, la máxima velocidad del bloque y su máxima aceleración.

SOLUCIÓN



a) Resortes conectados en paralelo. Se determina primero la constante k de un solo resorte equivalente a los dos resortes *determinando la magnitud de la fuerza* **P** que se requiere para causar una deformación δ. Puesto que para una deformación δ las magnitudes de las fuerzas ejercidas por el resorte son, respectivamente, $k_1\delta$ y $k_2\delta$, se tiene

$$P = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

La constante k del resorte equivalente es

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 4 \text{ kN/m} + 6 \text{ kN/m} = 10 \text{ kN/m} = 10^4 \text{ N/m}$$

Periodo de vibración: Puesto que $m = 50$ kg, la ecuación (19.4) produce

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^4 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \qquad \omega_n = 14.14 \text{ rad/s}$$

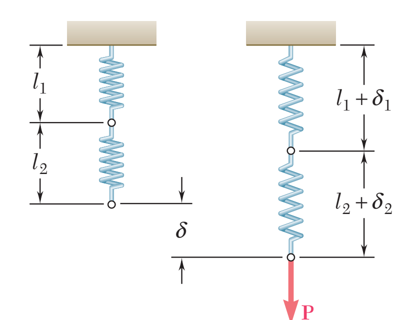
$$\tau_n = 2\pi/\omega_n \qquad \tau_n = 0.444 \text{ s} \blacktriangleleft$$

Velocidad máxima: $v_m = x_m\omega_n = (0.040 \text{ m})(14.14 \text{ rad/s})$

$$v_m = 0.566 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_m = 0.566 \text{ m/s} \updownarrow \blacktriangleleft$$

Aceleración máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0.040 \text{ m})(14.14 \text{ rad/s})^2$

$$a_m = 8.00 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_m = 8.00 \text{ m/s}^2 \updownarrow \blacktriangleleft$$



b) Resortes conectados en serie. Se determina primero la constante k de un solo resorte equivalente para los dos resortes *determinando la elongación total* δ de los resortes bajo una carga estática determinada **P**. Para facilitar el cálculo, se usa una carga estática de magnitud $P = 12$ kN.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{12 \text{ kN}}{4 \text{ kN/m}} + \frac{12 \text{ kN}}{6 \text{ kN/m}} = 5 \text{ m}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{12 \text{ kN}}{5 \text{ m}} = 2.4 \text{ kN/m} = 2\,400 \text{ N/m}$$

Periodo de vibración: $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{2\,400 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \qquad \omega_n = 6.93 \text{ rad/s}$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 0.907 \text{ s} \blacktriangleleft$$

Velocidad máxima: $v_m = x_m\omega_n = (0.040 \text{ m})(6.93 \text{ rad/s})$

$$v_m = 0.277 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_m = 0.277 \text{ m/s} \updownarrow \blacktriangleleft$$

Aceleración máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0.040 \text{ m})(6.93 \text{ rad/s})^2$

$$a_m = 1.920 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_m = 1.920 \text{ m/s}^2 \updownarrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Este capítulo aborda las *vibraciones mecánicas,* esto es, el movimiento de una partícula o un cuerpo oscilante en torno a una posición de equilibrio.

En esta primera lección se dijo que una *vibración libre* de una partícula ocurre cuando ésta está sujeta a una fuerza proporcional a su desplazamiento y de dirección opuesta, como la fuerza que ejerce un resorte (figura 19.1). El movimiento resultante, llamado *movimiento armónico simple,* está caracterizado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (19.2)$$

donde x es el desplazamiento de la partícula, $\ddot{x}$ su aceleración, m es su masa y k es la constante del resorte. Se encontró que la solución de esta ecuación diferencial es

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \qquad (19.10)$$

donde x_m = amplitud de la vibración
$\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frecuencia circular natural (rad/s)
ϕ = ángulo de fase (rad)

También se definió el *periodo* de la vibración como el tiempo $\tau_n = 2\pi/\omega_n$ necesario para que la partícula realizara un círculo completo, y la *frecuencia natural* como el número de ciclos por segundo, $f_n = 1/\tau_n = \omega_n/2\pi$, expresada en Hz o s^{-1}. Al diferenciar la ecuación (19.10) dos veces se obtiene la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo. Se encontró que los valores máximos de la velocidad y la aceleración fueron

$$v_m = x_m\omega_n \qquad a_m = x_m\omega_n^2 \qquad (19.15)$$

Para determinar los parámetros en la ecuación (19.10) pueden seguirse estos pasos:

1. *Dibujar un diagrama de cuerpo libre como se muestra en las fuerzas ejercidas sobre la partícula* cuando ésta se encuentra a una distancia x de su posición de equilibrio. La resultante de estas fuerzas será proporcional a x y su dirección será opuesta a la dirección positiva de x [ecuación (19.1)].

2. *Escribir la ecuación diferencial de movimiento* igualando a $m\ddot{x}$ la resultante de las fuerzas que se encontraron en el paso 1. Advierta que una vez que se ha elegido la dirección para x, debe usarse la misma convención de signos para la aceleración $\ddot{x}$. Después de la transposición, se obtendrá una ecuación de la forma de la ecuación (19.2).

3. *Determinar la frecuencia circular natural ω_n* dividiendo el coeficiente de x por el coeficiente de $\ddot{x}$ en esta ecuación y tomando la raíz cuadrada del resultado que se obtenga. Asegurarse de que ω_n se exprese en rad/s.

(*continúa*)

4. Determinar la amplitud de x_m y el ángulo de fase ϕ sustituyendo el valor que se obtuvo para ω_n y los valores iniciales de x y $\dot{x}$ en la ecuación (19.10) y la ecuación obtenida al diferenciar la ecuación 19.10 con respecto a t.

La ecuación (19.10) y las dos ecuaciones que se obtuvieron al diferenciar la ecuación (19.10) dos veces con respecto a t se pueden utilizar ahora para encontrar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo. Las ecuaciones (19.15) producen la velocidad máxima v_m y la aceleración máxima a_m.

5. También para pequeñas oscilaciones del péndulo simple, el ángulo θ que la cuerda del péndulo forma con la vertical satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0 \qquad (19.17)$$

donde l es la longitud de la cuerda y θ se expresa en radianes [sección 19.3]. Esta ecuación define de nuevo un *movimiento armónico simple*, y su solución es de la misma forma que la ecuación (19.10),

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi)$$

donde la frecuencia circular natural $\omega_n = \sqrt{g/l}$ se expresa en rad/s. La determinación de las diversas constantes en esta expresión se realiza de manera similar a la que se describió antes. Recuerde que la velocidad de la plomada es tangente a la trayectoria y que su magnitud corresponde a $v = l\dot{\theta}$, mientras que la aceleración de la plomada tiene una componente tangencial $\mathbf{a}_t$, de magnitud $a_t = l\ddot{\theta}$, y una componente $\mathbf{a}_n$, dirigida hacia el centro de la trayectoria y de magnitud $a_n = l\dot{\theta}^2$.

Problemas

19.1 Determine la velocidad máxima y la aceleración máxima de una partícula en movimiento armónico simple con una amplitud de 0.2 in. y un periodo de 0.1 s.

19.2 Determine la amplitud y la velocidad máxima de una partícula en movimiento armónico simple con una aceleración máxima de 60 m/s^2 y una frecuencia de 40 Hz.

19.3 Una partícula en movimiento armónico simple. Si la amplitud es de 300 mm y la aceleración máxima corresponde a 5 m/s^2, determine la velocidad máxima de la partícula y la frecuencia de su movimiento.

19.4 Un bloque de 30 lb se sostiene mediante el resorte mostrado. Si el bloque se mueve verticalmente hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante, *b*) la velocidad y la aceleración máximas del bloque si la amplitud de su movimiento es de 2.1 in.

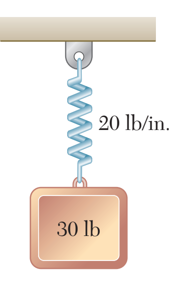


Figura P19.4

19.5 Un bloque de 32 kg está unido a un resorte y puede moverse sin fricción en una ranura como se muestra en la figura. El bloque se encuentra en su posición de equilibrio cuando es golpeado con un martillo que le imprime una velocidad inicial de 250 mm/s. Determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante y *b*) la amplitud del movimiento y la aceleración máxima del bloque.

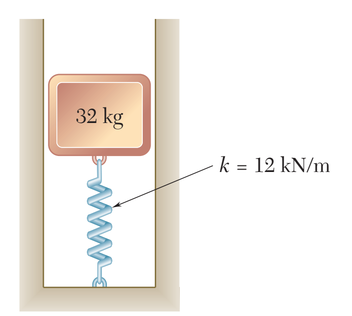


Figura P19.5

19.6 Un péndulo simple consiste en una plomada conectada a una cuerda que oscila en un plano vertical con un periodo de 1.3 s. Si se supone un movimiento armónico simple y se sabe que la velocidad máxima de la plomada es de 15 in./s, determine *a*) la amplitud del movimiento en grados y *b*) la aceleración tangencial máxima de la plomada.

19.7 Un péndulo simple que consiste en una plomada conectada a una cuerda de longitud l = 800 mm oscila en un plano vertical. Si se supone movimiento armónico simple y se sabe que la plomada se suelta desde el reposo cuando θ = 6°, determine *a*) la frecuencia de oscilación, *b*) la velocidad máxima de la plomada.

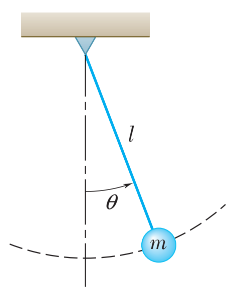


Figura P19.6 y P19.7

19.8 Un instrumento de laboratorio *A* está atornillado en una mesa agitadora en la forma que se muestra. La mesa se mueve verticalmente en un movimiento armónico simple a la misma frecuencia que la del motor de velocidad variable que la impulsa. El instrumento se va a probar a una aceleración pico de 150 ft/s^2. Si se sabe que la amplitud de la mesa agitadora es de 2.3 in., determine *a*) la velocidad requerida del motor en rpm, *b*) la velocidad máxima de la mesa.

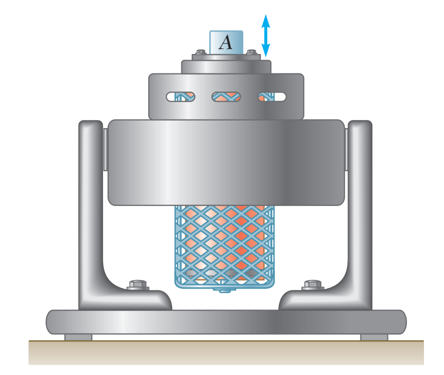


Figura *P19.8*

19.9 El movimiento de una partícula se describe mediante la ecuación $x = 5 \text{ sen } 2t + 4 \cos 2t$, donde x se expresa en milímetros y t en segundos. Determine *a*) el periodo del movimiento resultante, *b*) su amplitud y *c*) su ángulo de fase.

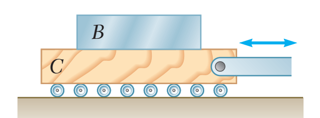


Figura P19.10

19.10 Un paquete B de instrumentos se coloca sobre la mesa agitadora C como se muestra en la figura. La mesa se mueve de manera horizontal en movimiento armónico simple con una frecuencia de 3 Hz. Si el coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.40$ entre el paquete y la mesa, determine la máxima amplitud permisible del movimiento si el paquete no debe deslizarse sobre la mesa. Dé su respuesta en unidades del SI así como en unidades de uso común en Estados Unidos.

19.11 Un bloque de 32 kg se conecta a un resorte de constante k = 12 kN/m y puede moverse sin fricción en una ranura como se muestra en la figura. El bloque se encuentra en su posición de equilibrio cuando se le desplaza 300 mm hacia abajo y se le suelta. Determine 1.5 s después de haber soltado el bloque *a*) la distancia total que viajó y *b*) su aceleración.

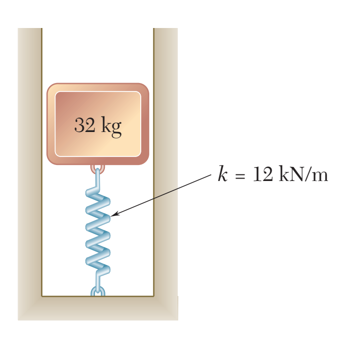


Figura P19.11

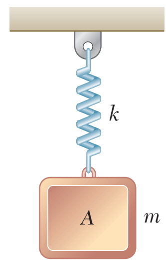


Figura P19.12

19.12 Un bloque de 3 lb se sostiene en la forma mostrada mediante un resorte de constante k = 2 lb/in. que puede actuar bajo tensión o compresión. El bloque se encuentra en la posición de equilibrio cuando se golpea desde abajo con un martillo que le imprime una velocidad hacia arriba de 90 in./s. Determine *a*) el tiempo que se requiere para que el bloque se mueva 3 in. hacia arriba y *b*) la velocidad y aceleración correspondientes del bloque.

19.13 En el problema 19.12, determine la posición, velocidad y aceleración del bloque 0.90 s después de que se golpea con el martillo.

19.14 La plomada de un péndulo simple de longitud l = 800 mm se suelta desde el reposo cuando $\theta = +5°$. Si se supone movimiento armónico simple, determine 1.6 s después de la liberación *a*) el ángulo θ, *b*) las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la plomada.

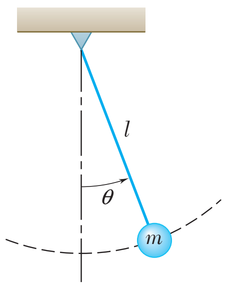


Figura P19.14

19.15 Un collarín de 5 kg descansa sobre el resorte que se muestra en la figura, al cual no está conectado. Se observa que cuando el collarín se empuja hacia abajo 180 mm o más y se suelta, pierde contacto con el resorte. Determine *a*) la constante del resorte y *b*) la posición, velocidad y aceleración del collarín 0.16 s después de que se empujó hacia abajo 180 mm y se soltó.

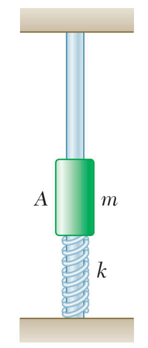


Figura *P19.15*

19.16 Un collarín *C* de 8 kg puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal entre dos resortes idénticos *A* y *B* a los cuales no está conectado. Cada resorte tiene una constante de 600 N/m. El collarín se empuja a la izquierda contra el resorte *A*, comprimiéndolo 20 mm, y se suelta en la posición mostrada. Después se desliza a lo largo de la varilla a la derecha y golpea el resorte *B*. Después de comprimir ese resorte 20 mm, el collarín se desliza hacia la izquierda y golpea el resorte *A*, al cual comprime 20 mm. El ciclo se repite después. Determine *a*) el periodo del movimiento del collarín, *b*) la posición del collarín 1.5 s después de que fue empujado contra el resorte *A* y se soltó. (*Nota:* Éste es un movimiento periódico pero no un movimiento armónico simple.)

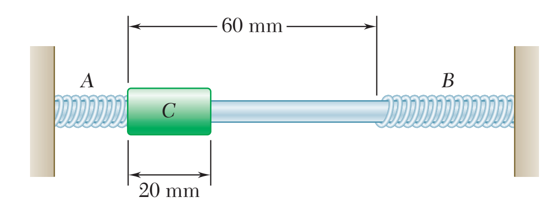


Figura *P19.16*

19.17 y 19.18 Un bloque de 50 kg se sostiene mediante el arreglo de resortes que se muestra. El bloque se desplaza verticalmente hacia abajo a partir de su posición de equilibrio y se suelta. Si la amplitud del movimiento resultante es igual a 45 mm, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento y *b*) la velocidad y la aceleración máximas del bloque.

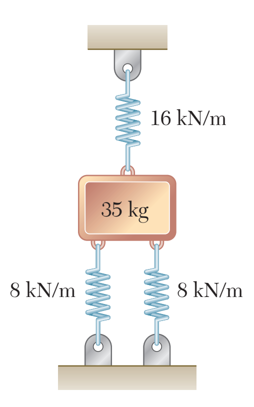


Figura P19.17

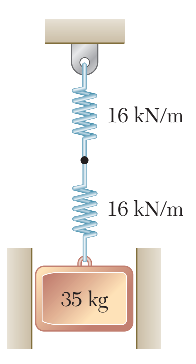


Figura P19.18

19.19 Un bloque de 30 lb se sostiene mediante el arreglo de resortes que se muestra. Si el bloque se mueve desde su posición de equilibrio 1.75 in. verticalmente hacia abajo y se suelta, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento que resulta y *b*) la velocidad y la aceleración máximas del bloque.

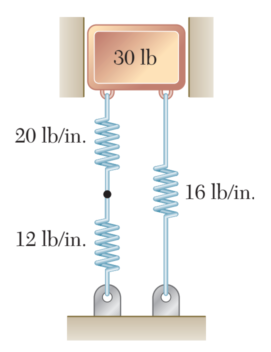


Figura P19.19

19.20 Un bloque de 5 kg, conectado al extremo inferior de un resorte cuyo extremo superior está fijo, vibra en un periodo de 6.8 s. Si la constante k del resorte es inversamente proporcional a su longitud, determine el periodo de un bloque de 3 kg que está conectado al centro del mismo resorte si los extremos superior e inferior del resorte están fijos.

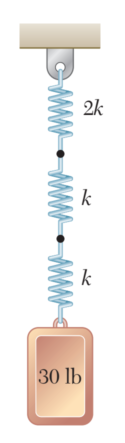


Figura *P19.21*

19.21 Un bloque de 30 lb se sostiene por medio del arreglo de resortes que se muestra. El bloque se mueve a partir de su posición de equilibrio 0.8 in. verticalmente hacia abajo y después se suelta. Si el periodo del movimiento resultante es de 1.5 s, determine *a*) la constante k y *b*) la velocidad máxima y la aceleración máxima del bloque.

19.22 Dos resortes de constantes k_1 y k_2 se conectan en serie a un bloque A que vibra en un movimiento armónico simple con un periodo de 5 s. Cuando los dos resortes se conectan en paralelo al mismo bloque, éste vibra con un periodo de 2 s. Determine el cociente k_1/k_2 de las dos constantes de resorte.

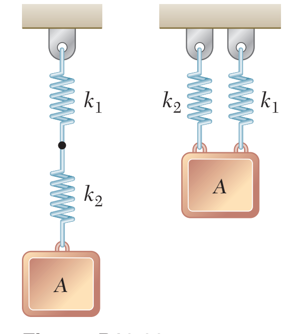


Figura *P19.22*

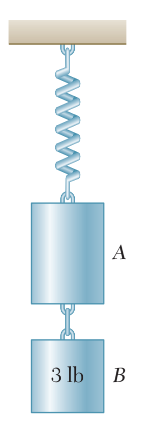


Figura P19.23

19.23 Se observa que el periodo de vibración del sistema mostrado es de 0.6 s. Después de que el cilindro B se retira, el periodo observado corresponde a 0.5 s. Determine *a*) el peso del cilindro A y *b*) la constante del resorte.

19.24 Se observa que el periodo de vibración del sistema mostrado es de 0.8 s. Si se retira el bloque A, el periodo resulta ser de 0.7 s. Determine *a*) la masa del bloque C, *b*) el periodo de vibración cuando se retiran los dos bloques A y B.

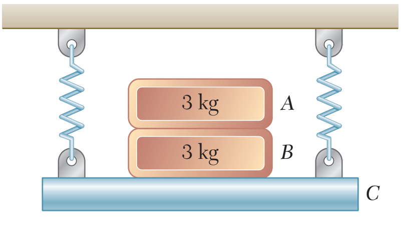


Figura P19.24

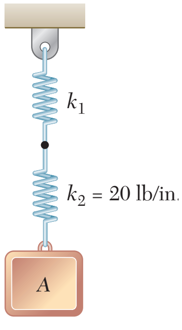


Figura P19.25

19.25 Se observa que el periodo de vibración del sistema mostrado es de 0.2 s. Después de que el resorte de constante k_2 = 20 lb/in. se retira del bloque A, se conecta a un resorte de constante k_1, el periodo observado corresponde a 0.12 s. Determine *a*) la constante k_1 del resorte que queda y *b*) el peso del bloque A.

19.26 La plataforma A de 100 lb está unida a los resortes B y D, cada uno de los cuales tiene una constante $k = 120$ lb/ft. Si la frecuencia de vibración de la plataforma debe permanecer sin cambio cuando se coloca sobre ella un bloque de 80 lb y se agrega un tercer resorte C entre los resortes B y D, determine la constante requerida del resorte C.

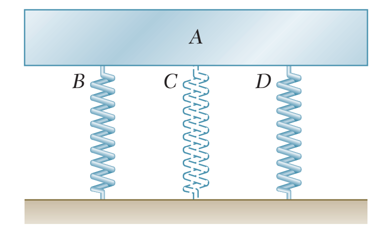


Figura P19.26

19.27 De acuerdo con la mecánica de materiales se sabe que cuando una carga estática **P** se aplica en el extremo B de una barra metálica uniforme fija en el extremo A, la longitud de la barra aumentará en una cantidad $\delta = PL/AE$, donde L es la longitud de la barra no deformada, A es el área de la sección transversal y E es el módulo de elasticidad del material. Si $L = 450$ mm y $E = 200$ GPa y el diámetro de la barra corresponde a 8 mm y se desprecia el peso de esta misma, determine *a*) la constante de resorte equivalente de la barra y *b*) la frecuencia de las vibraciones verticales del bloque con masa $m = 8$ kg conectado al extremo B de la misma barra.

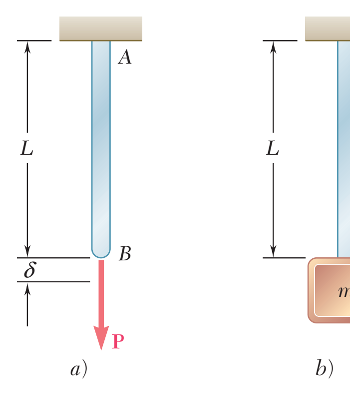


Figura P19.27

19.28 De acuerdo con la mecánica de materiales se sabe que para una viga en voladizo de sección transversal constante, una carga estática **P** aplicada en el extremo B ocasionará una deflexión de $\delta_B = PL^3/3EI$, donde L es la longitud de la viga, E es el módulo de elasticidad e I es el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga. Si $L = 10$ ft, $E = 29 \times 10^6$ lb/in.^{2} e $I = 12.4$ in.^{4}, determine *a*) la constante de resorte equivalente de la viga y *b*) la frecuencia de vibración de un bloque de 520 lb conectado al extremo B de la misma viga.

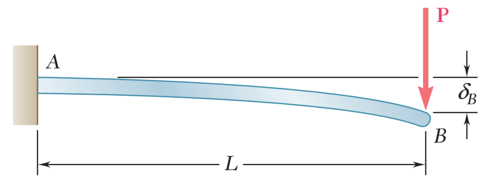
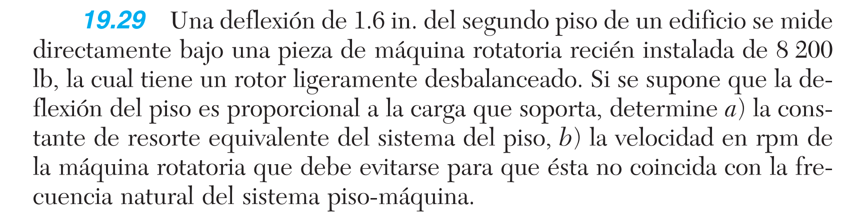


Figura *P19.28*



19.29 Una deflexión de 1.6 in. del segundo piso de un edificio se mide directamente bajo una pieza de máquina rotatoria recién instalada de 8 200 lb, la cual tiene un rotor ligeramente desbalanceado. Si se supone que la deflexión del piso es proporcional a la carga que soporta, determine *a*) la constante de resorte equivalente del sistema del piso, *b*) la velocidad en rpm de la máquina rotatoria que debe evitarse para que ésta no coincida con la frecuencia natural del sistema piso-máquina.

19.30 La ecuación de fuerza-deflexión de un resorte no lineal fijo en un extremo es $F = 5x^{1/2}$ donde F es la fuerza, expresada en newtons, que se aplica en el otro extremo y x es la deflexión expresada en metros. *a*) Determine la deflexión x_0 si se suspende un bloque de 120 g del resorte y se encuentra en reposo. *b*) Si se supone que la pendiente de la curva fuerza-deflexión en el punto correspondiente a esta carga pueda utilizarse como una constante de resorte equivalente, determine la frecuencia de vibración del bloque si éste se somete a un pequeño desplazamiento hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta.

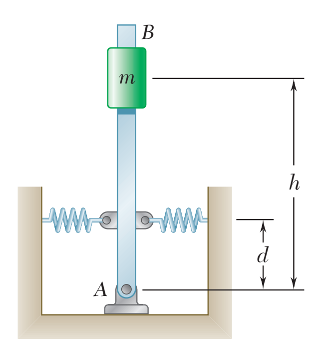


Figura *P19.31*

19.31 Si $h = 700$ mm, $d = 500$ mm y cada resorte tiene una constante $k = 600$ N/m, determine la masa m para la cual el periodo de pequeñas oscilaciones es *a*) de 0.50 s, *b*) infinito. No tome en cuenta la masa de la barra y suponga que cada resorte puede actuar a tensión o a compresión.

19.32 Si se denota por $\delta_{\text{estática}}$ la deflexión estática de una viga bajo una carga determinada, demuestre que la frecuencia de vibración de la carga es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{estática}}}}$$

Desprecie la masa de la viga y suponga que la carga permanece en contacto con esta misma.

***19.33** Si el integrando de la ecuación (19.19) de la sección 19.4 se expande en una serie de potencias pares de sen φ y se integra, demuestre que el periodo de un péndulo simple de longitud l puede aproximarse mediante la fórmula

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}\ \text{sen}^2\ \frac{\theta_m}{2}\right)$$

donde θ_m es la amplitud de las oscilaciones.

***19.34** Con la fórmula dada en el problema 19.33 determine la amplitud θ_m para la cual el periodo de un péndulo simple es $\frac{1}{2}$ por ciento más largo que el periodo del mismo péndulo en el caso de pequeñas oscilaciones.

***19.35** Con los datos de la tabla 19.1, determine el periodo de un péndulo simple de longitud $l = 750$ mm *a*) para pequeñas oscilaciones, *b*) para oscilaciones de amplitud $\theta_m = 60°$ y *c*) para oscilaciones de amplitud $\theta_m = 90°$.

***19.36** Con los datos de la tabla 19.1, determine la longitud en pulgadas de un péndulo simple que oscila en un periodo de 2 s y una amplitud de 90°.

19.5. VIBRACIONES LIBRES DE CUERPOS RÍGIDOS

El análisis de las vibraciones de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos que posee un solo grado de libertad es similar al análisis de las vibraciones de una partícula. Una variable apropiada, como una distancia x o un ángulo θ, se elige para definir la posición del cuerpo o del sistema de cuerpos, y se escribe una ecuación que relacione esta variable y su segunda derivada respecto a t. Si la ecuación obtenida es de la misma forma que la ecuación (19.6), esto es, si se tiene

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \text{o} \qquad \ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \tag{19.21}$$

la vibración considerada es un movimiento armónico simple. El periodo y la frecuencia natural de la vibración pueden obtenerse entonces identificando ω_n y sustituyendo su valor en las ecuaciones (19.13) y (19.14).

En general, una forma simple de obtener una de las ecuaciones (19.21) consiste en expresar que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas si se dibuja un diagrama de cuerpo libre para un valor arbitrario de la variable, y se escribe la ecuación de movimiento apropiada. Recuérdese que el objetivo debe

ser *la determinación del coeficiente* de la variable x o θ, *no* la determinación de la variable misma o de la derivada $\ddot{x}$ o $\ddot{\theta}$. Al igualar este coeficiente a ω_n^2, se obtiene la frecuencia circular natural ω_n de la cual es posible determinar τ_n y f_n.

El método descrito puede utilizarse para analizar vibraciones que son en verdad representadas mediante un movimiento armónico simple, o vibraciones de pequeña amplitud que es posible *aproximar* mediante un movimiento armónico simple. Como ejemplo, se determinará el periodo de pequeñas oscilaciones de una placa cuadrada de lado $2b$ que está suspendida del punto medio O de uno de sus lados (figura 19.5*a*). Se considera la placa en una posición arbitraria definida por el ángulo θ que forma la línea OG con la vertical y dibujamos una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar que el peso $\mathbf{W}$ de la placa y que las componentes $\mathbf{R}_x$ y $\mathbf{R}_y$ de la reacción en O son equivalentes a los vectores $m\mathbf{a}_t$ y $m\mathbf{a}_n$ y al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ (figura 19.5*b*). Puesto que la velocidad y la aceleración angulares de la placa son iguales, respectivamente, a $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, las magnitudes respectivas de los dos vectores son $mb\ddot{\theta}$ y $mb\dot{\theta}^2$, en tanto que el momento del par es $\bar{I}\ddot{\theta}$. En las aplicaciones previas de este método (capítulo 16) se trató siempre que fue posible de suponer el sentido correcto de la aceleración. Sin embargo, en este caso se debe suponer el mismo sentido positivo para θ y $\ddot{\theta}$ para obtener una ecuación de la forma (19.21). Consecuentemente, la aceleración angular $\ddot{\theta}$ se supondrá positiva en sentido contrario al de las manecillas del reloj, aun cuando esta suposición es evidentemente irreal. Al igualar los momentos con respecto a O, se escribe

$$-W(b \operatorname{sen} \theta) = (mb\ddot{\theta})b + \bar{I}\ddot{\theta}$$

Si se observa que $\bar{I} = \frac{1}{12}m[(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3}mb^2$ y $W = mg$, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b} \operatorname{sen} \theta = 0 \tag{19.22}$$

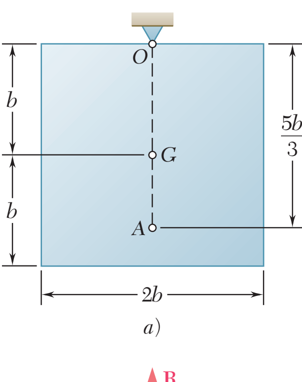
Para oscilaciones de pequeña amplitud, se puede sustituir sen θ por θ, expresado en radianes, y escribir

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b}\theta = 0 \tag{19.23}$$

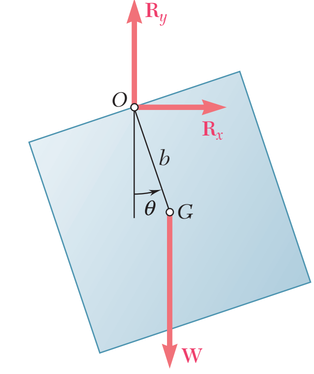
La comparación con (19.21) muestra que la ecuación obtenida es la de un movimiento armónico simple y que la frecuencia circular natural ω_n de las oscilaciones es igual a $(3g/5b)^{1/2}$. Al sustituir (19.13), se encuentra que el periodo de las oscilaciones es

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \tag{19.24}$$

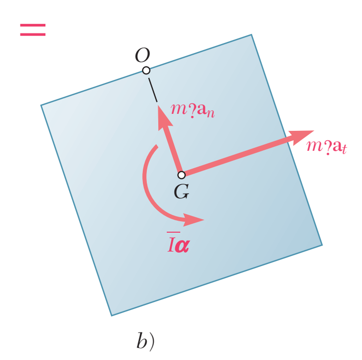
El resultado que se obtiene es válido sólo para oscilaciones de pequeña amplitud. Una descripción más exacta del movimiento de la placa se obtiene al comparar las ecuaciones (19.16) y (19.22). Hay que observar que las dos ecuaciones son idénticas si se elige l igual a $5b/3$. Esto significa que la placa oscilará como un péndulo simple de longitud $l = 5b/3$, y es posible utilizar los resultados de la sección 19.4 para corregir el valor del periodo dado en (19.24). El punto A de la placa localizado en la línea OG a una distancia $l = 5b/3$ desde O se define como el *centro de oscilación* correspondiente a O (figura 19.5*a*).



a)

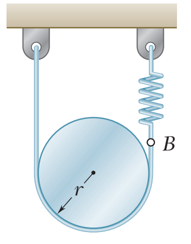


=



b)

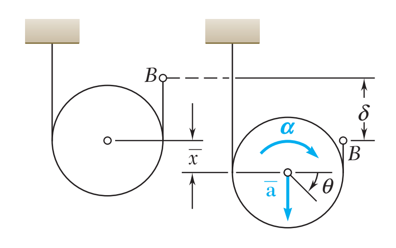
Figura 19.5



PROBLEMA RESUELTO 19.2

Un cilindro de peso W y radio r se suspende de una cuerda que le da vuelta como se indica. Un extremo de la cuerda se conecta directamente a un soporte rígido, en tanto que el otro extremo se une a un resorte de constante k. Determine el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones del cilindro.

SOLUCIÓN

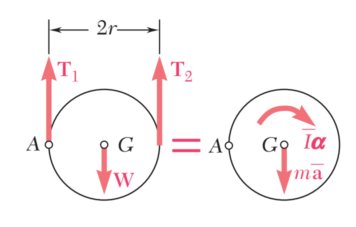


Cinemática del movimiento. Se expresa el desplazamiento lineal y la aceleración del cilindro en términos del desplazamiento angular θ. Al elegir el sentido positivo en el sentido de las manecillas del reloj y al medir los desplazamientos desde la posición de equilibrio, se escribe

$$\bar{x} = r\theta \qquad \delta = 2\bar{x} = 2r\theta$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\theta} \curvearrowright \qquad \bar{a} = r\alpha = r\ddot{\theta} \qquad \bar{\mathbf{a}} = r\ddot{\theta} \downarrow \tag{1}$$

Ecuaciones de movimiento. El sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cilindro consiste en el peso $\mathbf{W}$ y las fuerzas $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ que ejerce la cuerda. Se expresa que este sistema es equivalente al de las fuerzas efectivas representado por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado a G y al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.



$$+\curvearrowright \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{ef}}: \qquad Wr - T_2(2r) = m\bar{a}r + \bar{I}\alpha \tag{2}$$

Cuando el cilindro está en su posición de equilibrio, la tensión en la cuerda es $T_0 = \frac{1}{2}W$. Note que para un desplazamiento angular θ, la magnitud de $\mathbf{T}_2$ es

$$T_2 = T_0 + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k(2r\theta) \tag{3}$$

La sustitución de (1) y (3) en (2), y el hecho de que $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$, permiten escribir

$$Wr - (\tfrac{1}{2}W + 2kr\theta)(2r) = m(r\ddot{\theta})r + \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

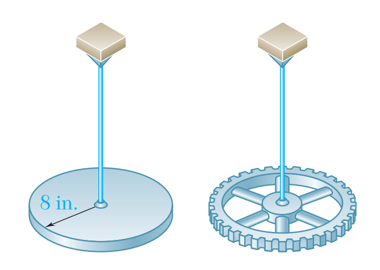
$$\ddot{\theta} + \frac{8}{3}\frac{k}{m}\theta = 0$$

El movimiento se observa como armónico simple, y se tiene

$$\omega_n^2 = \frac{8}{3}\frac{k}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}} \quad ◀$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 19.3

Un disco circular, que pesa 20 lb y tiene un radio de 8 in., se suspende de un alambre como se muestra. El disco se hace girar (de modo que se tuerce el alambre) y luego se suelta; se observa que el periodo de vibración torsional es de 1.13 s. Un engrane se suspende luego del mismo alambre, y el periodo de vibración torsional en este caso vale 1.93 s. Si se supone que el momento del par ejercido por el alambre es proporcional al ángulo de torsión, determine *a*) la constante de resorte torsional del alambre, *b*) el momento de inercia centroidal del engrane, *c*) la velocidad angular máxima que alcanza el engrane si se hace girar 90° y se suelta.

SOLUCIÓN

***a*) Vibración del disco.** Denotando por θ el desplazamiento angular del disco, se expresa que la magnitud del par ejercido por el alambre es $M = K\theta$, donde K es la constante de resorte torsional del alambre. Puesto que este par debe ser equivalente al par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ que representa las fuerzas efectivas del disco, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{ef}: \qquad +K\theta = -\bar{I}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{\bar{I}}\theta = 0$$



Se puede observar que el movimiento es armónico simple y, por consiguiente,

$$\omega_n^2 = \frac{K}{\bar{I}} \qquad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{K}} \qquad (1)$$

Para el disco, se tiene

$$\tau_n = 1.13 \text{ s} \qquad \bar{I} = \tfrac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)\left(\frac{8}{12}\text{ft}\right)^2 = 0.138 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Al sustituir (1), se obtiene

$$1.13 = 2\pi\sqrt{\frac{0.138}{K}} \qquad K = 4.27 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad} \quad ◀$$

***b*) Vibración del engrane.** Puesto que el periodo de vibración del engrane es 1.93 y $K = 4.27$ lb · ft/rad, la ecuación (1) produce

$$1.93 = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{4.27}} \qquad \bar{I}_{\text{engrane}} = 0.403 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \quad ◀$$

***c*) Velocidad angular máxima del engrane.** Puesto que el movimiento es armónico simple, se tiene

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen} \omega_n t \qquad \omega = \theta_m\omega_n \cos \omega_n t \qquad \omega_m = \theta_m\omega_n$$

Si se recuerda que $\theta_m = 90° = 1.571$ rad y $\tau = 1.93$ s, se escribe

$$\omega_m = \theta_m\omega_n = \theta_m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right) = (1.571 \text{ rad})\left(\frac{2\pi}{1.93 \text{ s}}\right)$$

$$\omega_m = 5.11 \text{ rad/s} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se vio que un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, cuya posición puede definirse mediante una sola coordenada x o θ, producirá un movimiento armónico simple si la ecuación diferencial que se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton es de la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \text{o} \qquad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \qquad (19.21)$$

La meta es determinar ω_n, a partir de la cual se obtiene el periodo τ_n y la frecuencia natural f_n. Al tomar en cuenta las condiciones iniciales, es posible escribir una ecuación de la forma

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \qquad (19.10)$$

donde x debe sustituirse por θ si se incluye una rotación. Para resolver los problemas de esta lección, es necesario seguir estos pasos:

1. Elegir una coordenada que medirá el desplazamiento del cuerpo a partir de su posición de equilibrio. Se descubrirá que muchos de los problemas en esta lección implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo y que el ángulo que mide la rotación del cuerpo desde su posición de equilibrio es la coordenada más conveniente. En problemas que implican el movimiento plano general de un cuerpo, donde se utiliza una coordenada x (y posiblemente una coordenada y) para definir la posición del centro de masa G del cuerpo, y se recurre a una coordenada θ para medir su rotación respecto a G, determine las relaciones cinemáticas que le permitirán expresar x (y y) en términos de θ [problema resuelto 19.2].

2. Dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas, el cual consiste en el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$, donde $\bar{a} = \ddot{x}$ y $\alpha = \ddot{\theta}$. Asegúrese de que cada fuerza o par aplicado se dibuje en una dirección consistente con el desplazamiento supuesto y que los sentidos de $\bar{\mathbf{a}}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ sean, respectivamente, aquellos en los cuales las coordenadas x y θ están aumentando.

3. Escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento igualando las sumas de las componentes de las fuerzas externas efectivas en las direcciones x y y y las sumas de sus momentos con respecto a un punto dado. Si es necesario, utilice las relaciones cinemáticas que se formularon en el paso *1* para obtener ecuaciones que implican sólo a la coordenada θ. Si θ es un ángulo pequeño reemplace sen θ por θ y cos θ por 1, si estas funciones aparecen en sus ecuaciones. Eliminando todas las reacciones desconocidas, se obtendrá una ecuación del tipo de las ecuaciones (19.21). Advierta que en problemas que implican un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, es posible obtener de inmediato una ecuación de este tipo al igualar los momentos de las fuerzas externas efectivas con respecto al eje fijo.

4. Al comparar las ecuaciones que se han obtenido con una de las ecuaciones (19.21) se pueden identificar ω_n^2 y, por ello, determinar la frecuencia circular natural ω_n. Recuerde que el objeto del análisis *no es resolver* la ecuación diferencial que se obtiene, *sino identificar* ω_n^2.

5. Determine la amplitud y el ángulo de fase ϕ sustituyendo el valor que se obtuvo para ω_n y los valores iniciales de las coordenadas y su primera derivada en la ecuación (19.10) y en la ecuación obtenida al diferenciar (19.10) con respecto a *t.* De la ecuación (19.10) y las dos ecuaciones que se obtuvieron al diferenciar (19.10) dos veces con respecto a *t,* y al usar la relación cinemática que se desarrolló en el paso *1*, se podrá determinar la posición, velocidad y aceleración de cualquier tiempo dado.

6. En problemas que implican vibraciones torsionales la constante de resorte torsional K se expresa en N · m/rad o lb · ft/rad. El producto de K y el ángulo de torsión θ expresado en radianes produce el momento del par restaurador, el cual debe igualarse a la suma de los momentos de las fuerzas o pares efectivos con respecto al eje de rotación [problema resuelto 19.3].

Problemas

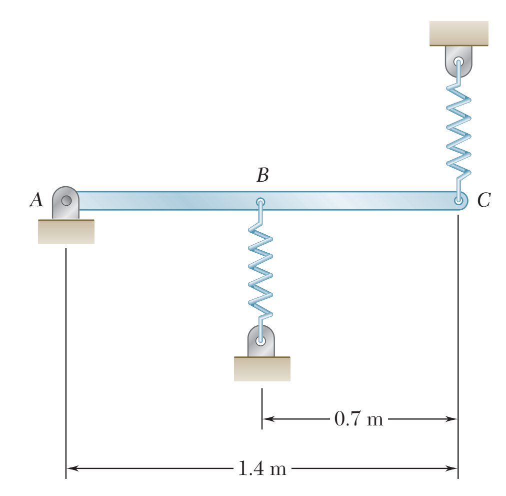


Figura P19.37

19.37 La barra uniforme AC de 5 kg está conectada a resortes de constante $k = 500$ N/m en B y $k = 620$ N/m en C, los cuales pueden actuar en tensión o en compresión. Si el extremo C se deforma ligeramente y se suelta, determine *a*) la frecuencia de vibración, *b*) la amplitud del movimiento del punto C, si la velocidad máxima de ese punto es de 0.9 m/s.

19.38 La barra uniforme que se muestra en la figura pesa 15 lb y está unida a un resorte de constante $k = 4$ lb/in. Si el extremo B de la barra se deforma 0.4 in y se suelta, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la velocidad máxima del extremo B.

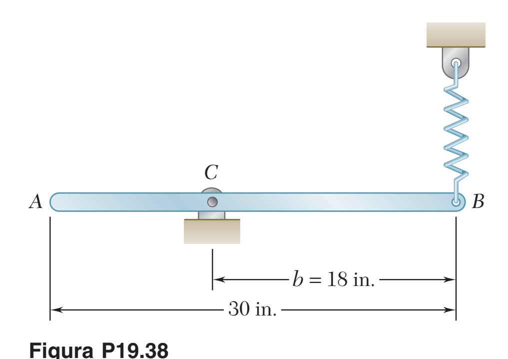


Figura P19.38

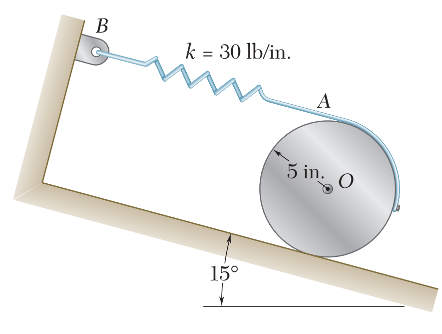


Figura P19.39

19.39 Un cilindro uniforme de 30 lb puede rodar sin deslizarse sobre una pendiente de 15°. Una banda está unida al borde del cilindro, y un resorte mantiene al cilindro en reposo en la posición mostrada. Si el centro del cilindro se mueve 2 in. hacia abajo por la pendiente y se suelta, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la aceleración máxima del centro del cilindro.

19.40 Una barra delgada AB de 15 lb está remachada a un disco uniforme de 12 lb como se muestra en la figura. Una banda se conecta al aro del disco y a un resorte que mantiene a la barra en reposo en la posición que se muestra en la figura. Si el extremo A de la barra se mueve 0.75 in. hacia abajo y se suelta, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la velocidad máxima del extremo A.

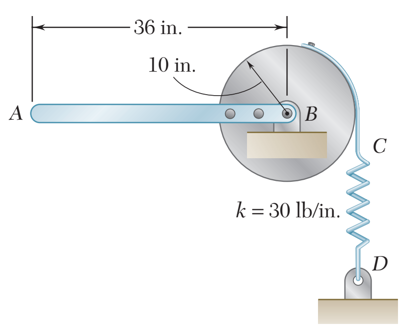


Figura P19.40

19.41 Una barra uniforme de 8 kg se articula a un soporte fijo en A y se conecta por medio de los pasadores B y C a un disco de 12 kg y 400 mm de radio. Un resorte unido en D mantiene a la barra en reposo en la posición mostrada. Si el punto B se mueve hacia abajo 25 mm y se suelta, determine *a*) el periodo de vibración, *b*) la velocidad máxima del punto B.

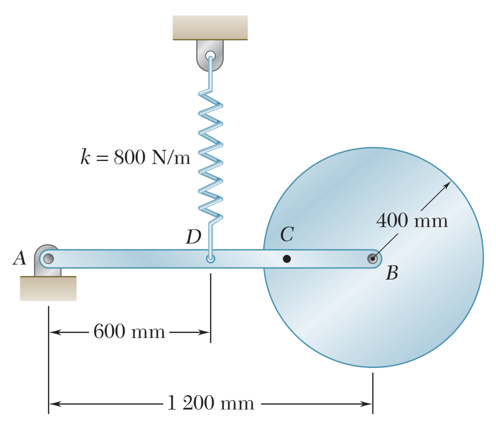


Figura *P19.41*

19.42 Retome el problema 19.41, y ahora suponga que el pasador C se retira y que el disco puede girar libremente alrededor del pasador B.

19.43 Una banda se coloca alrededor del aro de un volante de 240 kg y se une en la forma mostrada a dos resortes, cada uno de constante k = 15 kN/m. Si el extremo C de la banda se jala 40 mm hacia abajo y se suelta, puede observarse que el periodo de vibración del volante es de 0.5 s. Si la tensión inicial en la banda es suficiente para evitar el deslizamiento, determine *a*) la velocidad angular máxima del volante, *b*) el radio de giro centroidal del volante.

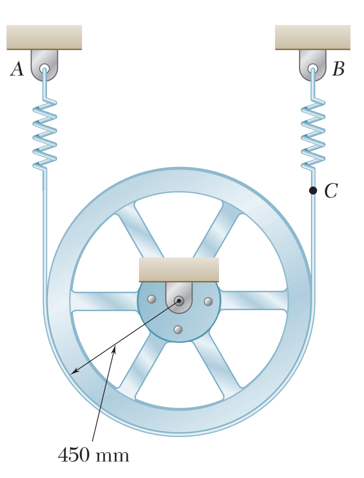


Figura P19.43

19.44 Un orificio de 75 mm de radio se corta en un disco uniforme de 200 mm de radio, el cual está unido a un pasador sin fricción en su centro geométrico O. Determine *a*) el periodo de pequeñas oscilaciones del disco, *b*) la longitud de un péndulo simple que tenga el mismo periodo.

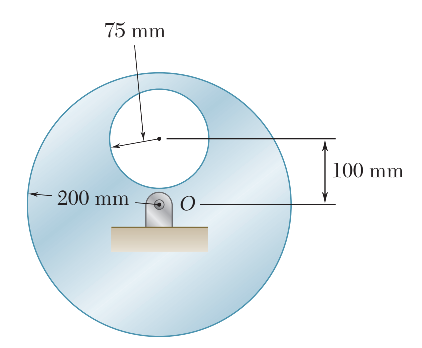


Figura P19.44

19.45 Dos pesos pequeños w se colocan en A y B en el borde de un disco uniforme de radio r y peso W. Si se denota con τ_0 el periodo de pequeñas oscilaciones cuando β = 0, determine el ángulo β para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es $2\tau_0$.

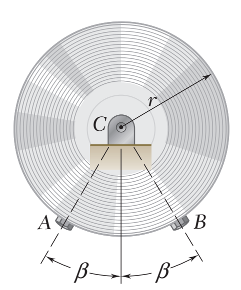
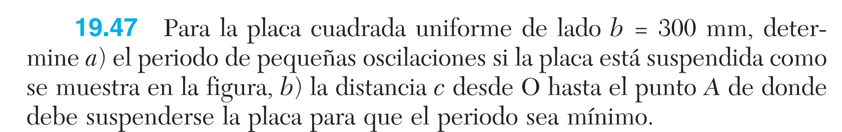


Figura P19.45 y P19.46

19.46 Dos pesos de 0.1 lb se colocan en A y B sobre el borde de un disco uniforme de 3 lb y radio r = 4 in. Determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones cuando β = 60°.



19.47 Para la placa cuadrada uniforme de lado b = 300 mm, determine *a*) el periodo de pequeñas oscilaciones si la placa está suspendida como se muestra en la figura, *b*) la distancia c desde O hasta el punto A de donde debe suspenderse la placa para que el periodo sea mínimo.

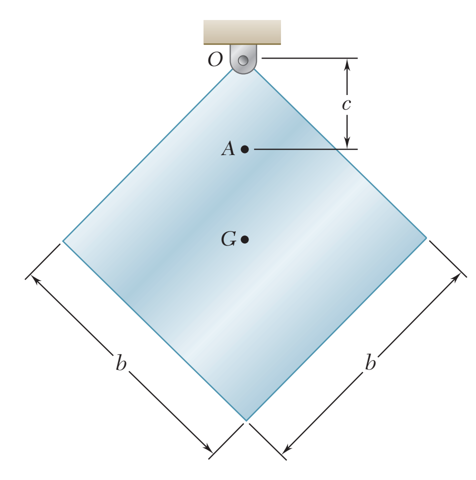


Figura P19.47

19.48 Una biela está soportada por el filo de un cuchillo en el punto A; se observa que el periodo de sus oscilaciones pequeñas es de 0.87 s. Luego se invierte la biela y se soporta mediante el filo del cuchillo en el punto B y el periodo de sus oscilaciones pequeñas en este caso es de 0.78 s. Si $r_a + r_b$ = 10 in., determine *a*) la ubicación del centro de masa G, *b*) el radio de giro centroidal $\overline{k}$.

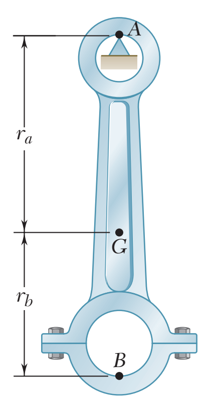
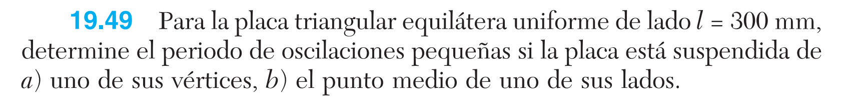


Figura *P19.48*



19.49 Para la placa triangular equilátera uniforme de lado l = 300 mm, determine el periodo de oscilaciones pequeñas si la placa está suspendida de *a*) uno de sus vértices, *b*) el punto medio de uno de sus lados.

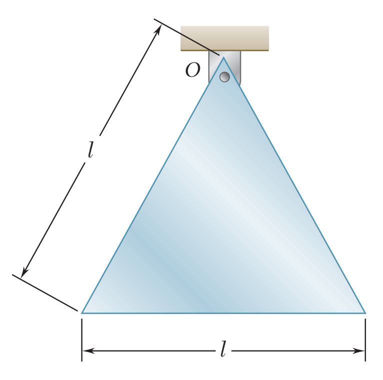


Figura P19.49

19.50 Un disco uniforme de radio r = 250 mm se conecta en A a una barra AB de 650 mm y masa despreciable que puede girar con libertad en un plano vertical alrededor de B. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones *a*) si el disco tiene la libertad de girar en un cojinete en A y *b*) si la barra se remacha al disco en A.

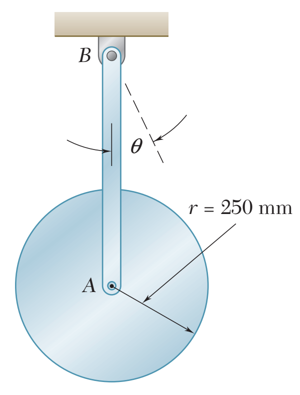


Figura P19.50

19.51 Un pequeño collarín que pesa 2 lb se conecta rígidamente a una barra uniforme de 6 lb y longitud L = 3 ft. Determine *a*) la distancia d para maximizar la frecuencia de oscilación cuando a la barra se le da un pequeño desplazamiento inicial, *b*) el periodo de oscilación correspondiente.

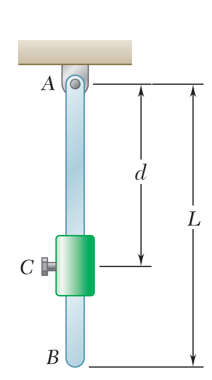


Figura *P19.51*

19.52 Un *péndulo compuesto* se define como una placa rígida que oscila alrededor de un punto fijo O, denominado centro de suspensión. Demuestre que el periodo de oscilación de un péndulo compuesto es igual al periodo de un péndulo simple de longitud OA, donde la distancia desde A hasta el centro de masa G es $GA = \bar{k}^2\sqrt{\bar{r}}$. El punto A se define como el centro de oscilación y coincide con el centro de percusión definido en el problema 17.66.

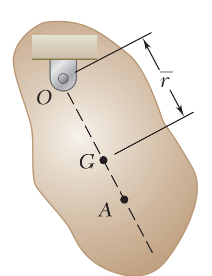


Figura P19.52 y P.19.53

19.53 Una placa rígida oscila alrededor del punto fijo O. Demuestre que el periodo de oscilación más pequeño ocurre cuando la distancia $\bar{r}$ del punto O hasta el centro de masa G es igual a $\bar{k}$.

19.54 Demuestre que si el péndulo compuesto del problema 19.52 se suspende de A en vez de O, el periodo de oscilación es el mismo que antes y el nuevo centro de oscilación se ubica en O.

19.55 La barra uniforme AB de 8 kg se articula en C y está unida en A a un resorte de constante $k = 500$ N/m. Si el extremo A tiene un pequeño desplazamiento y se suelta, determine *a*) la frecuencia de las oscilaciones pequeñas y *b*) el valor mínimo de la constante del resorte k para la cual ocurrirán las oscilaciones.

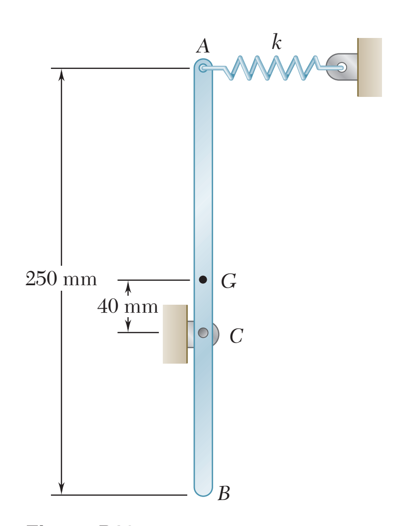


Figura P19.55

19.56 Una placa cuadrada uniforme está suspendida de un pasador localizado en el punto medio A de uno de sus bordes de 1.2 ft y se encuentra unida a resortes, cada uno de constante $k = 8$ lb/in. Si a la esquina B se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia de la vibración resultante. Suponga que cada resorte puede actuar en tensión o en compresión.

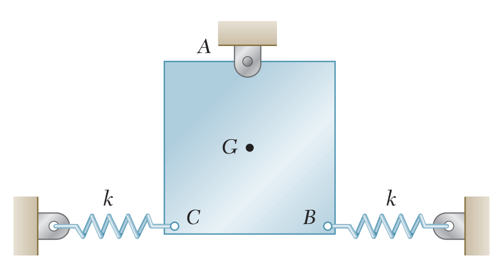


Figura P19.56

19.57 Dos barras uniformes, cada una de peso $m = 12$ kg y longitud $L = 800$ mm, se sueldan entre sí para formar el ensamble mostrado. Si la constante de cada resorte es $k = 500$ N/m y al extremo A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante.

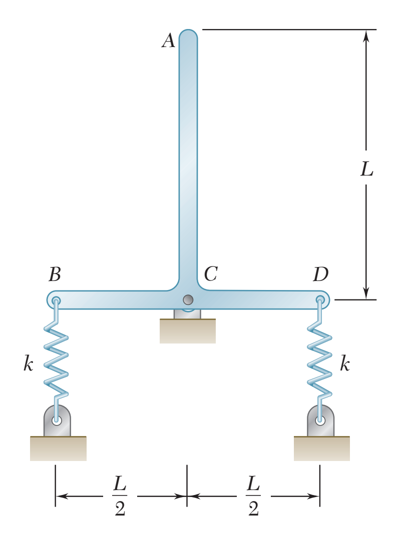


Figura P19.57

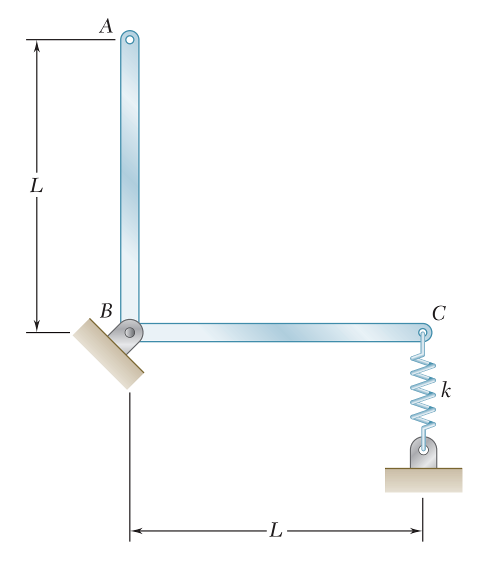


Figura P19.58

19.58 La barra ABC de masa total m se dobla en la forma mostrada y se sostiene en un plano vertical mediante un pasador en B y por medio de un resorte de constante k en C. Si al extremo C se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante en términos de m, L y k.

19.59 Un disco uniforme de radio r = 250 mm se conecta en A a una barra AB de 650 mm con masa insignificante, la cual puede girar libremente en un plano vertical alrededor de B. Si la barra se desplaza 2° a partir de la posición que se muestra y se suelta, determine la magnitud de la velocidad máxima del punto A, si se supone que el disco *a*) tiene la libertad de girar en un cojinete en A y *b*) se remacha a la barra en A.

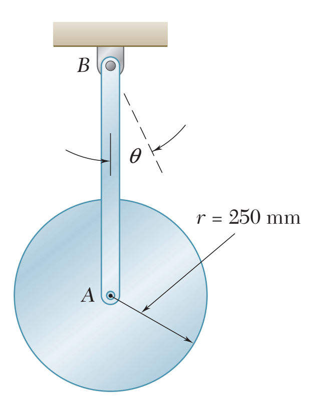


Figura P19.59

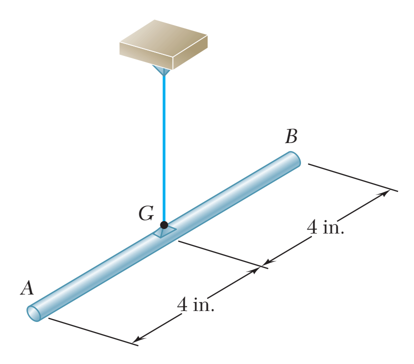


Figura *P19.60*

19.60 Una barra delgada de 6 lb se suspende de un alambre de acero, del cual se sabe que tiene una constante de resorte torsional K = 1.5 ft · lb/rad. Si la barra se gira a través de 180° alrededor de la vertical y luego se suelta, determine *a*) el periodo de oscilación, *b*) la velocidad máxima del extremo A de la barra.

19.61 Un alambre homogéneo se dobla para formar la figura mostrada y se conecta a un soporte de pasador en A. Si se sabe que r = 220 mm y que el punto B se empuja hacia abajo 20 mm y se suelta, determine la magnitud de la aceleración de B, 8 s después.

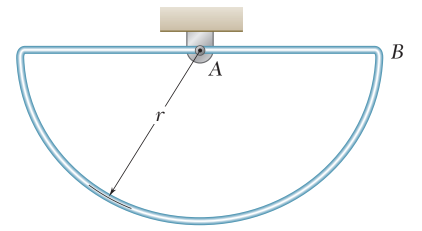


Figura P19.61 y *P19.62*

19.62 Un alambre homogéneo se dobla para formar la figura mostrada y se conecta a un soporte de pasador en A. Si se sabe que r = 16 in. y que el punto B se empuja hacia abajo 1.5 in. y se suelta, determine la magnitud de la aceleración de B, 10 s después.

19.63 Un disco uniforme de radio $r = 120$ mm se suelda en su centro a dos barras elásticas de igual longitud con extremos fijos en A y B. Si el disco gira un ángulo de 8° cuando se le aplica un par de 500 mN · m y oscila por un periodo de 1.3 s cuando se suprime el par, determine *a*) la masa del disco, *b*) el periodo de vibración si se elimina una de las barras.

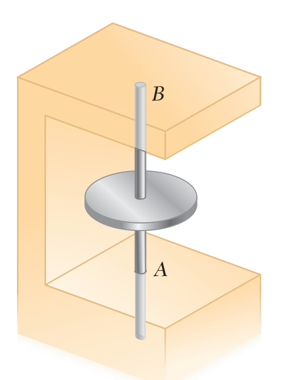


Figura P19.63

19.64 Una barra uniforme CD de 10 lb y longitud $l = 2.2$ ft se suelda en C a dos barras elásticas, que tienen extremos fijos en A y B y se sabe que tienen una constante de resorte de torsión combinada $K = 18$ lb · ft/rad. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones, si la posición de equilibrio de CD es *a*) vertical como se muestra, *b*) horizontal.

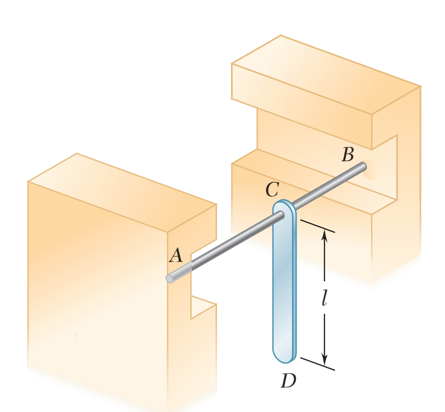


Figura P19.64

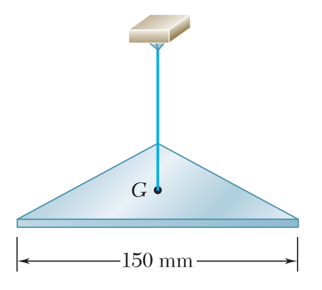


Figura P19.65

19.65 Una placa de 1.8 kg con la forma de un triángulo equilátero se suspende en su centro de gravedad de un alambre de acero, el cual tiene una constante de torsión $K = 35$ mN · m/rad. Si la placa se gira 360° alrededor de la vertical y luego se suelta, determine *a*) el periodo de oscilación, *b*) la velocidad máxima de uno de los vértices del triángulo.

19.66 Una plataforma horizontal P se sostiene mediante varias barras rígidas que se conectan a un alambre vertical. Se encuentra que el periodo de oscilación de la plataforma corresponde a 2.2 s cuando la plataforma está vacía y 3.8 s cuando un objeto A de momento de inercia desconocido se coloca sobre la plataforma con su centro de masa directamente abajo del centro de la placa. Si el alambre tiene una constante de torsión $K = 20$ lb · ft/rad, determine el momento de inercia centroidal del objeto A.

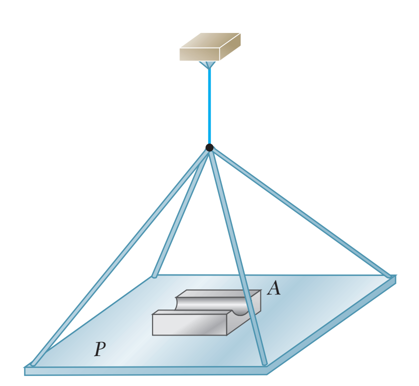


Figura P19.66

19.67 Una placa rectangular delgada de lados a y b está suspendida de cuatro alambres verticales con la misma longitud l. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa cuando *a*) se gira a un pequeño ángulo alrededor del eje vertical que pasa por su centro de masa G, *b*) se le da un pequeño desplazamiento horizontal en una dirección perpendicular a AB, *c*) se le da un pequeño desplazamiento horizontal en una dirección perpendicular a BC.

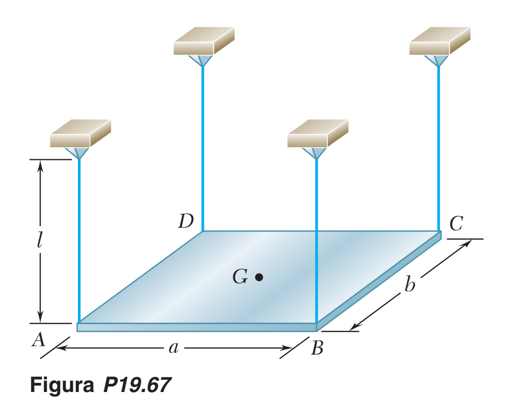


Figura *P19.67*

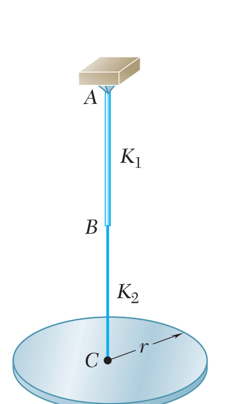


Figura *P19.68*

19.68 Un disco circular de radio $r = 0.8$ m se suspende en su centro C de los alambres AB y BC soldados entre sí en B. Las constantes de resorte torsionales de los alambres son $K_1 = 100$ N ·m/rad para AB y $K_2 = 50$ N· m/rad para BC. Si el periodo de oscilación del disco alrededor del eje AC es de 0.5 s, determine la masa del disco.

19.6. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En la sección 19.2 se vio que cuando una partícula de masa m está en movimiento armónico simple, la resultante $\mathbf{F}$ de las fuerzas ejercidas sobre la partícula tiene una magnitud que es proporcional al desplazamiento x, medido desde la posición de equilibrio O, y está dirigida hacia O; se escribió $F = -kx$. Con referencia a la sección 13.6, se advirtió que $\mathbf{F}$ es una *fuerza conservativa* y que la energía potencial es $V = \frac{1}{2}kx^2$, donde V se supone igual a cero en la posición de equilibrio $x = 0$. Puesto que la velocidad de la partícula es igual a $\dot{x}$, su energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y es posible expresar que la energía total de la partícula se conserva al escribir

$$T + V = \text{constante} \qquad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

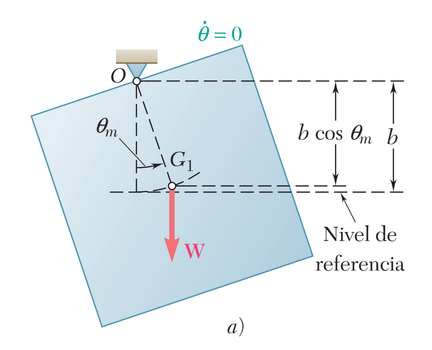
Al dividir entre $m/2$ y recordar, de la sección 19.2 que $k/m = \omega_n^2$, donde ω_n es la frecuencia circular natural de la vibración, se tiene

$$\dot{x}^2 + \omega_n^2 x^2 = \text{constante} \qquad (19.25)$$

La ecuación (19.25) es característica de un movimiento armónico simple, puesto que puede obtenerse a partir de la ecuación (19.6) al multiplicar ambos términos por $2\dot{x}$ e integrar.

El principio de conservación de la energía proporciona una forma conveniente de determinar el periodo de vibración de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos que poseen un solo grado de libertad, una vez que se ha establecido que el movimiento del sistema es un movimiento armónico simple o que puede aproximarse mediante un movimiento armónico simple. Al elegir una variable apropiada, como la distancia x o el ángulo θ, se consideran dos posiciones particulares del sistema:

1. *El desplazamiento del sistema es máximo*; se tiene $T_1 = 0$, y V_1 puede expresarse en términos de la amplitud x_m o θ_m (al elegir $V = 0$ en la posición de equilibrio).
2. *El sistema pasa por su posición de equilibrio*; se tiene $V_2 = 0$, y T_2 puede expresarse en términos de la velocidad máxima o la velocidad angular máxima $\dot{\theta}_m$.



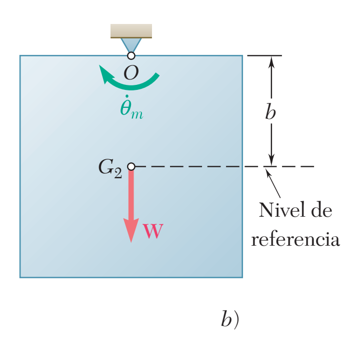


Figura 19.6

Se expresa entonces que la energía total del sistema se conserva y se escribe $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$. Al recordar de (19.15) que para un movimiento armónico simple la velocidad máxima es igual al producto de la amplitud y de la frecuencia circular natural ω_n, se encuentra que la ecuación que se obtiene puede resolverse para ω_n.

Como ejemplo, se considera de nuevo la placa cuadrada de la sección 19.5. En la posición de desplazamiento máximo (figura 19.6*a*), se tiene

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = W(b - b \cos \theta_m) = Wb(1 - \cos \theta_m)$$

o puesto que $1 - \cos \theta_m = 2 \operatorname{sen}^2 (\theta_m/2) \approx 2(\theta_m/2)^2 = \theta_m^2/2$ para oscilaciones de pequeña amplitud,

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = \tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2 \tag{19.26}$$

Cuando la placa pasa a través de su posición de equilibrio (figura 19.6*b*), su velocidad es máxima y se tiene

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2 = \tfrac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}_m^2 \qquad V_2 = 0$$

o al recordar de la sección 19.5 que $\bar{I} = \frac{2}{3}mb^2$,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{3}mb^2)\dot{\theta}_m^2 \qquad V_2 = 0 \tag{19.27}$$

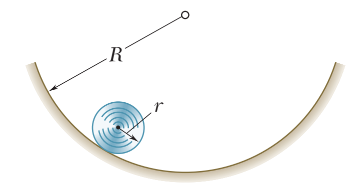
Al sustituir de (19.26) y (19.27) en $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, y al observar que la velocidad máxima $\dot{\theta}_m$ es igual al producto $\theta_m\omega_n$, se escribe

$$\tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{3}mb^2)\theta_m^2\omega_n^2 \tag{19.28}$$

la cual produce $\omega_n^2 = 3g/5b$ y

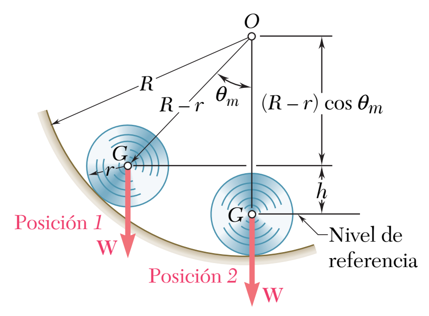
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \tag{19.29}$$

como se obtuvo antes.



PROBLEMA RESUELTO 19.4

Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de un cilindro de radio r que rueda sin deslizarse dentro de una superficie curva de radio R.



SOLUCIÓN

Se denota por θ el ángulo que forma la línea OG con la vertical. Puesto que el cilindro rueda sin deslizarse, se puede aplicar el principio de la conservación de la energía entre la posición *1*, donde $\theta = \theta_m$, y la posición *2*, donde $\theta = 0$.

Posición *1*

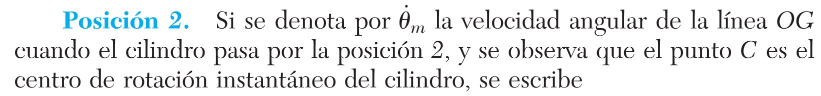
Energía cinética. Puesto que la velocidad del cilindro es cero, $T_1 = 0$.

Energía potencial. Al elegir el nivel de referencia como se muestra y denotar por W el peso del cilindro, se tiene

$$V_1 = Wh = W(R - r)(1 - \cos\theta)$$

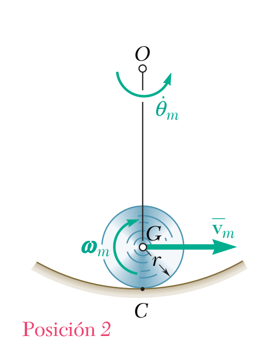
Al observar que para pequeñas oscilaciones $(1 - \cos\theta) = 2\ \text{sen}^2\ (\theta/2) \approx \theta^2/2$, se tiene

$$V_1 = W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2}$$



Posición *2*. Si se denota por $\dot{\theta}_m$ la velocidad angular de la línea OG cuando el cilindro pasa por la posición *2*, y se observa que el punto C es el centro de rotación instantáneo del cilindro, se escribe

$$\bar{v}_m = (R - r)\,\dot{\theta}_m \qquad \omega_m = \frac{\bar{v}_m}{r} = \frac{R - r}{r}\dot{\theta}_m$$





Energía cinética

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2)\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot{\theta}_m^2$$
$$= \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2$$

Energía potencial

$$V_2 = 0$$

Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + 0$$

Puesto que $\dot{\theta}_m = \omega_n\theta_m$ y $W = mg$, se escribe

$$mg(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2(\omega_n\theta_m)^2 \qquad \omega_n^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R - r}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R - r}{g}} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas siguientes se pedirá que utilice el *principio de la conservación de la energía* para determinar el periodo o frecuencia natural del movimiento armónico simple de una partícula o cuerpo rígido. Suponiendo que elige un ángulo θ para definir la posición del sistema (con $\theta = 0$ en la posición de equilibrio), lo cual se hará en la mayoría de los problemas de esta lección, se expresará que la energía total del sistema se conserva, $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, entre la posición *1* de desplazamiento máximo ($\theta_1 = \theta_m$, $\dot{\theta}_1 = 0$) y la posición *2* de velocidad máxima ($\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_m$, $\theta_2 = 0$). Se tiene que T_1 y V_2 serán ambas cero, y que la ecuación de la energía se reducirá a $V_1 = T_2$, donde V_1 y T_2 son las expresiones cuadráticas homogéneas en θ_m y $\dot{\theta}_m$, respectivamente. Como, para un movimiento armónico simple, $\dot{\theta}_m = \theta_m \omega_n$ y al sustituir este producto en la ecuación de la energía se obtendrá, después de simplificar, una ecuación que es posible resolver para ω_n^2. Una vez que se haya determinado la frecuencia circular natural ω_n, puede obtenerse el periodo τ_n y la frecuencia natural f_n de la vibración.

Los pasos que se deben seguir son éstos:

1. Calcular la energía potencial V_1 del sistema en su posición de desplazamiento máximo. Dibuje un bosquejo del sistema en su posición de desplazamiento máximo y exprese la energía potencial de todas las fuerzas implicadas (internas, así como externas) en términos del desplazamiento máximo x_m o θ_m.

a) La energía potencial asociada con el peso W de un cuerpo es $V_g = Wy$, donde y es la elevación del centro de gravedad G del cuerpo sobre su posición de equilibrio. Si el problema que se resuelve implica la oscilación de un cuerpo rígido alrededor de un eje horizontal que pasa por el punto O localizado a una distancia b de G (figura 19.6), exprese y en términos del ángulo θ que la línea del ángulo OG forma con la vertical: $y = b(1 - \cos\theta)$. Pero, para pequeños valores de θ, es posible sustituir esta expresión con $y = \frac{1}{2}b\theta^2$ [problema resuelto 19.4]. Por lo tanto, cuando θ alcanza su valor máximo θ_m, y para oscilaciones de pequeña amplitud, es posible expresar V_g como

$$V_g = \tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2$$

Observe que *si G se localiza sobre O* en su posición de equilibrio (y no debajo de O, como se ha supuesto), el desplazamiento vertical y será negativo y deberá aproximarse como $y = -\frac{1}{2}b\theta^2$, el cual resultará en un valor negativo de V_g. En ausencia de otras fuerzas, la posición de equilibrio será inestable, y el sistema no oscilará. (Véase, por ejemplo, el problema 19.91.)

b) La energía potencial asociada con la fuerza elástica ejercida por un resorte es $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte y x es su deformación. En problemas que implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, por lo general se tendrá $x = a\theta$, donde a es la distancia desde el eje de rotación hasta el punto del cuerpo donde el resorte está conectado, y donde θ es el ángulo de rotación. Por

(*continúa*)

lo tanto, cuando x alcanza su valor máximo x_m y θ llega a su valor máximo θ_m, es posible expresar V_e como

$$V_e = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}ka^2\theta_m^2$$

c) La energía potencial V_1 del sistema en su posición de desplazamiento máximo se obtiene sumando las diversas energías potenciales que se han calculado. Será igual al producto de una constante y θ_m^2.

2. Calcular la energía cinética T_2 del sistema en su posición de velocidad máxima. Observe que esta posición es también la posición de equilibrio del sistema.

a) Si el sistema está compuesto por un solo cuerpo rígido, la energía cinética T_2 del sistema será la suma de la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo y la energía cinética asociada con la rotación del cuerpo alrededor de G. Por lo tanto, se escribirá

$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2$$

Suponiendo que la posición del cuerpo se ha definido mediante un ángulo θ, exprese $\bar{v}_m$ y ω_m en términos de la razón de cambio $\dot{\theta}_m$ de θ cuando el cuerpo pase por su posición de equilibrio. La energía cinética del cuerpo se expresará entonces como el producto de una constante y $\dot{\theta}_m^2$. Advierta que si θ mide la rotación del cuerpo alrededor de su centro de masa, como fue el caso para la placa de la figura 19.6, entonces $\omega_m = \dot{\theta}_m$. En otros casos, sin embargo, la cinemática del movimiento debe utilizarse para derivar una relación entre ω_m y $\dot{\theta}_m$ [problema resuelto 19.4].

b) Si el sistema está compuesto de varios cuerpos rígidos, repita el cálculo anterior para cada uno de los cuerpos, utilizando la misma coordenada θ, y sume los resultados que se obtienen.

3. Iguale la energía potencial V_1 del sistema a su energía cinética T_2,

$$V_1 = T_2$$

y, recordando la primera de las ecuaciones (19.15), sustituya $\dot{\theta}_m$ en el término del lado derecho por el producto de la amplitud θ_m y la frecuencia circular ω_n. Puesto que ambos términos contienen ahora al factor θ_m^2, es posible cancelar este último y la ecuación resultante puede resolverse para la frecuencia circular ω_n.

Problemas

Todos los problemas deben resolverse usando el método de la sección 19.6.

19.69 Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de una partícula pequeña que se mueve sin fricción dentro de una superficie cilíndrica de radio R.

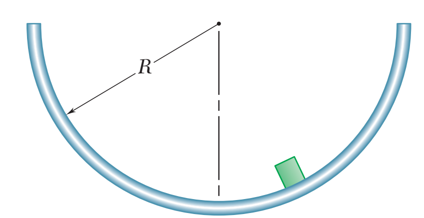


Figura P19.69

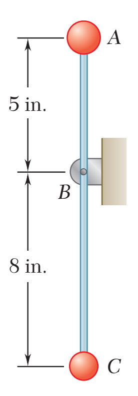


Figura P19.70

19.70 Una esfera A de 14 oz. y una esfera C de 10 oz. se conectan a los extremos de una barra AC de masa insignificante que puede girar en un plano vertical alrededor de un eje en B. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la barra.

19.71 Un collarín A de 1.8 kg está unido a un resorte con constante de 800 N/m y puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal. Si el collarín se mueve 70 mm hacia la izquierda desde su posición de equilibrio y se suelta, determine la velocidad máxima y la aceleración máxima del collarín durante el movimiento resultante.

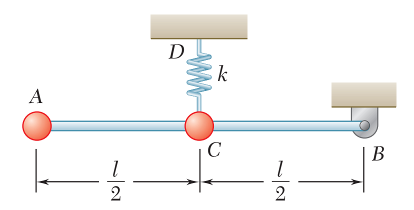


Figura P19.71 y P19.72

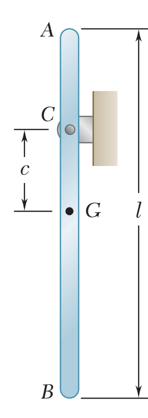


Figura P19.73

19.72 Un collarín A de 3 lb está unido a un resorte con constante de 5 lb/in. y puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal. El collarín está en reposo cuando es golpeado con un mazo y se le da una velocidad inicial de 35 in./s. Determine la amplitud del movimiento resultante y la aceleración máxima del collarín.

19.73 Una barra uniforme AB puede girar en un plano vertical alrededor de un eje horizontal en C localizado a una distancia c sobre el centro de masa G de la barra. Para oscilaciones pequeñas determine el valor de c para el cual la frecuencia del movimiento será máxima.

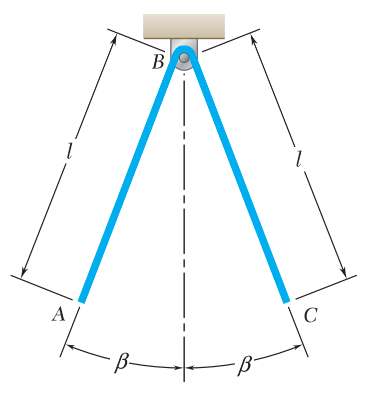


Figura P19.74

19.74 Un alambre homogéneo de longitud $2l$ se dobla en la forma mostrada y es capaz de girar alrededor de un pasador sin fricción en B. Si se denota con τ_0 el periodo de pequeñas oscilaciones cuando $\beta = 0$, determine el ángulo β para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es $2\tau_0$.

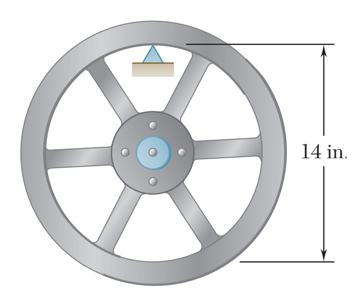


Figura *P19.75*

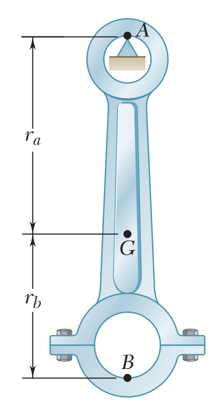


Figura P19.76

19.75 El borde interno de un volante de 85 lb se coloca sobre un filo de cuchillo, y se encuentra que el periodo de pequeñas oscilaciones es de 1.26 s. Determine el momento de inercia centroidal del volante.

19.76 Una biela está soportada por el filo de un cuchillo en el punto A; se observa que el periodo de sus oscilaciones pequeñas es de 1.03 s. Si la distancia r_a es igual a 150 mm, determine el radio de giro centroidal de la biela.

19.77 La barra ABC de masa total m está doblada en la forma que se muestra y se sostiene en un plano vertical mediante un pasador en B y un resorte de constante k en C. Si al extremo C se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante en términos de m, L y k.

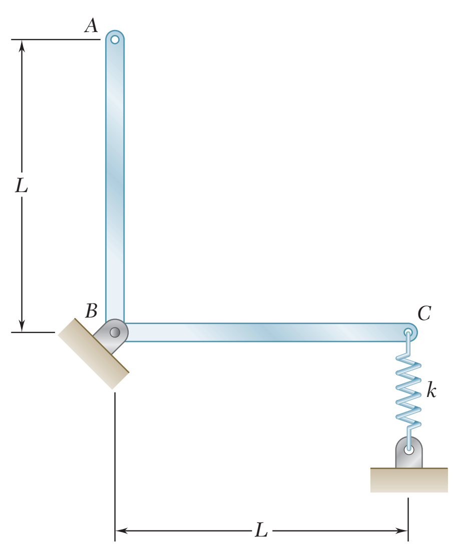


Figura P19.77

19.78 Un cilindro uniforme de 15 lb puede rodar sin deslizarse sobre una rampa y está conectado a un resorte AB como se muestra en la figura. Si el centro del cilindro se mueve 0.4 in. hacia abajo de la rampa y se suelta, determine *a*) el periodo de vibración y *b*) la velocidad máxima del centro del cilindro.

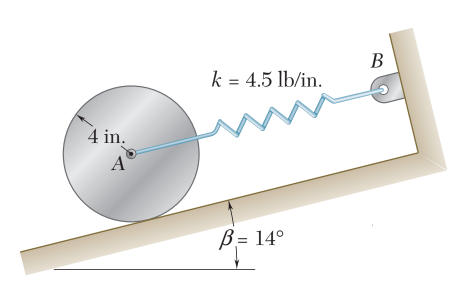


Figura P19.78

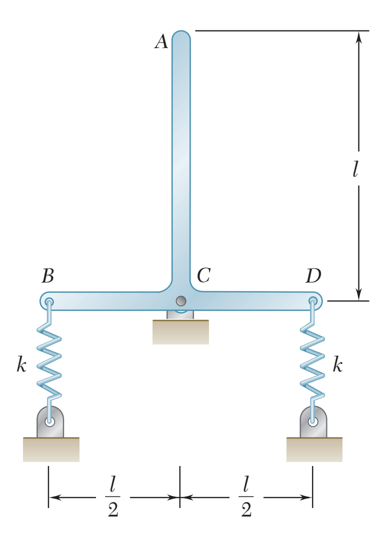


Figura P19.79

19.79 Dos barras uniformes, cada una de peso $W = 1.2$ lb y longitud $l = 8$ in., se sueldan entre sí para formar el ensamble mostrado. Si la constante de cada resorte es $k = 0.6$ lb/in. y a ese extremo A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante.

19.80 Una barra ligera AB de 8 kg y longitud $l = 600$ mm se conecta a dos collarines de masa insignificante. El collarín A se une a un resorte de constante $k = 1.2$ kN/m y puede deslizarse sobre una barra vertical, en tanto que el collarín B puede deslizarse libremente sobre una barra horizontal. Se sabe que el sistema está en equilibrio y que $\theta = 40°$, si al collarín B se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine el periodo de vibración.

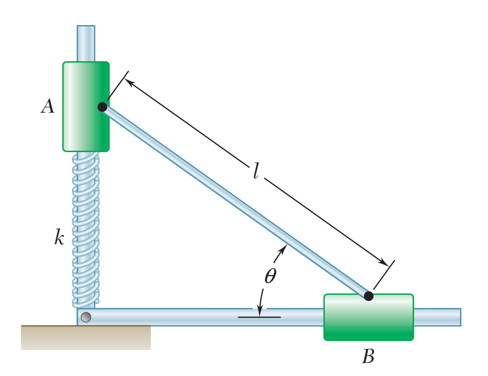


Figura P19.80 y *P19.81*

19.81 Una barra ligera AB de longitud $l = 600$ mm y masa insignificante se conecta a dos collarines cada uno con masa de 8 kg. El collarín A se une a un resorte de constante $k = 1.2$ kN/m y puede deslizarse sobre una barra vertical, en tanto que el collarín B puede deslizarse libremente sobre una barra horizontal. Se sabe que el sistema está en equilibrio y que $\theta = 40°$, si al collarín A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine el periodo de vibración.

19.82 Una barra ligera AB de 3 kg se atornilla a un disco uniforme de 5 kg. Un resorte de constante igual a 280 N/m se conecta al disco y no está deformado en la posición que se muestra en la figura. Si al extremo B de la barra se le da un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine el periodo de vibración del sistema.

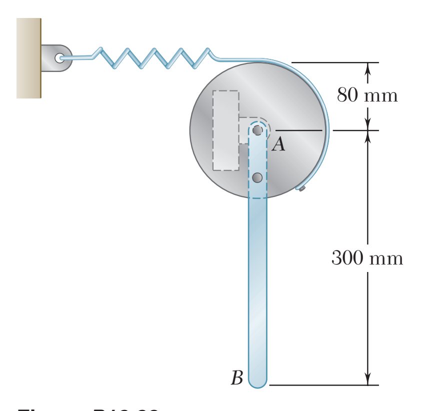


Figura *P19.82*

19.83 Una esfera A de 14 oz. y una esfera C de 10 oz. están conectadas a los extremos de una barra AC de 20 oz., la cual puede girar en un plano vertical alrededor de un eje en B. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la barra.

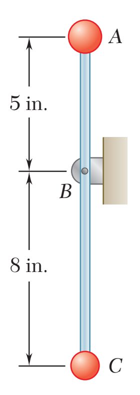


Figura P19.83

19.84 Tres barras idénticas están conectadas de la manera que se muestra en la figura. Si $b = \frac{3}{4}l$, determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del sistema.

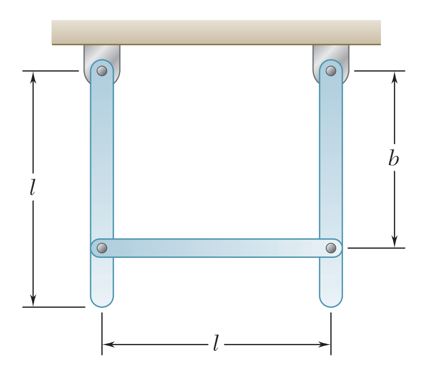


Figura P19.84

19.85 Una barra AB de 800 g está atornillada a un disco de 1.2 kg. Un resorte de constante $k = 12$ N/m está unido al centro del disco en A y a la pared en C. Si el disco rueda sin deslizarse, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

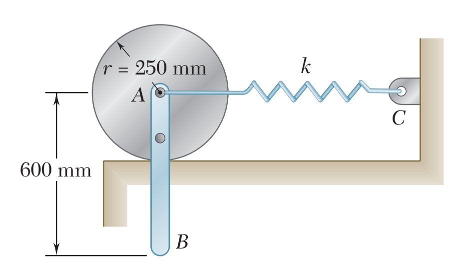


Figura P19.85

19.86 y 19.87 Dos barras uniformes AB y CD, cada una de longitud l y masa m, están conectadas a engranes en la forma que se indica. Si la masa del engrane C es m y la del engrane A es $4m$, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

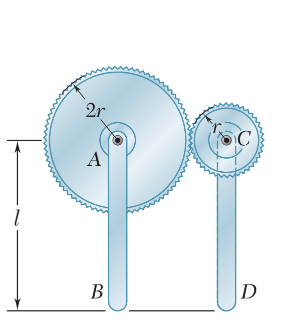


Figura *P19.86*

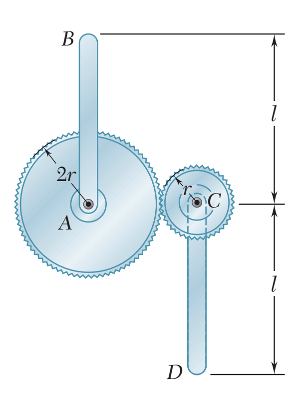


Figura *P19.87*

19.88 Una barra uniforme CD de 10 lb se suelda en C a una flecha de masa despreciable que se suelda a los centros de dos discos uniformes A y B de 20 lb. Si los dos discos ruedan sin deslizarse, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

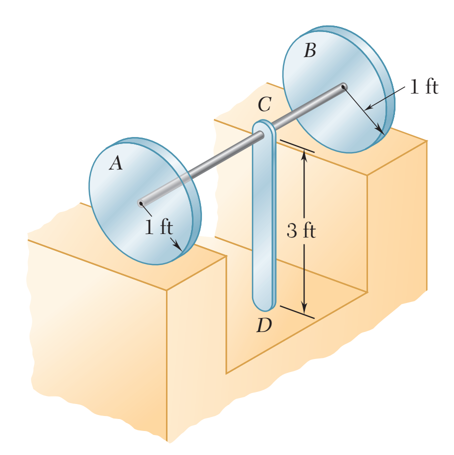


Figura P19.88

19.89 Cuatro barras de la misma masa m e igual longitud l están conectadas mediante los pasadores A, B, C y D y pueden moverse en un plano horizontal. Las barras están unidas a cuatro resortes con la misma constante k y se encuentran en equilibrio en la posición mostrada ($\theta = 45°$). Determine el periodo de vibración si a las esquinas A y C se les dan desplazamientos pequeños e iguales dirigidos desde una hacia la otra y se sueltan.

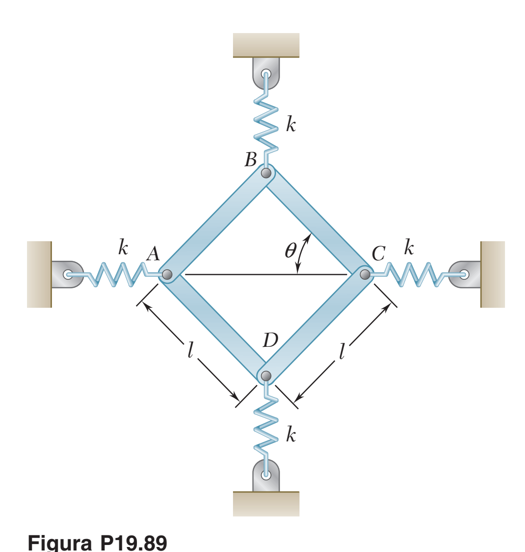


Figura P19.89

19.90 La barra AB de 20 lb está unida a los dos discos de 8 lb como se muestra en la figura. Si los discos ruedan sin deslizarse, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

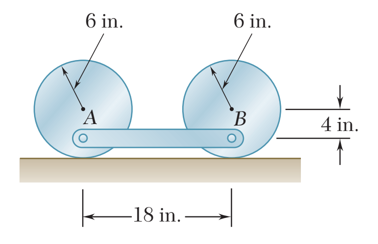


Figura P19.90

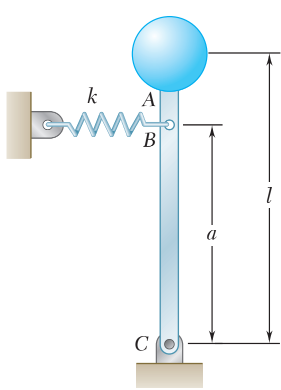


Figura P19.91 y P19.92

19.91 Un péndulo invertido que consiste en una esfera de peso W y una barra rígida ABC de longitud l y peso insignificante se sostiene mediante un pasador y una ménsula en C. Un resorte de constante k se conecta a la barra en B y no está deformado cuando la barra se encuentra en la posición vertical mostrada. Determine *a*) la frecuencia de pequeñas oscilaciones, *b*) el valor mínimo de a para el cual ocurrirán las oscilaciones.

19.92 Para el péndulo invertido del problema 19.91 y los valores dados de k, a y l, se observa que $f = 1.5$ Hz cuando $W = 2$ lb y que $f = 0.8$ Hz cuando $W = 4$ lb. Determine el valor máximo de W para el cual ocurrirán pequeñas oscilaciones.

19.93 Una barra uniforme de longitud L se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de un alambre vertical CD. Obtenga una expresión para el periodo de oscilación de la barra si al extremo B se le da un pequeño desplazamiento horizontal y luego se suelta.

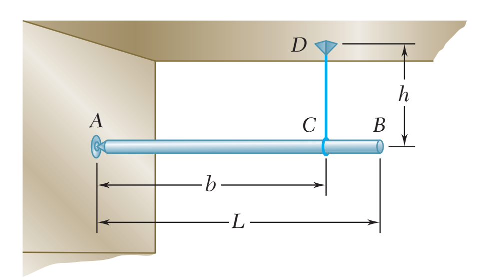


Figura *P19.93*

19.94 Una barra uniforme ABC de 2 kg se sostiene mediante un pasador en B y se conecta a un resorte en C. En A está conectada al bloque DE de 2 kg que está unido a un resorte y puede rodar sin fricción. Si se sabe que cada resorte puede actuar bajo tensión o compresión, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema cuando la barra se gira un pequeño ángulo y luego se suelta.

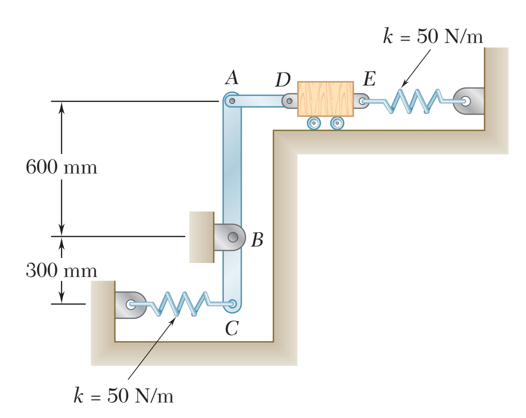


Figura P19.94

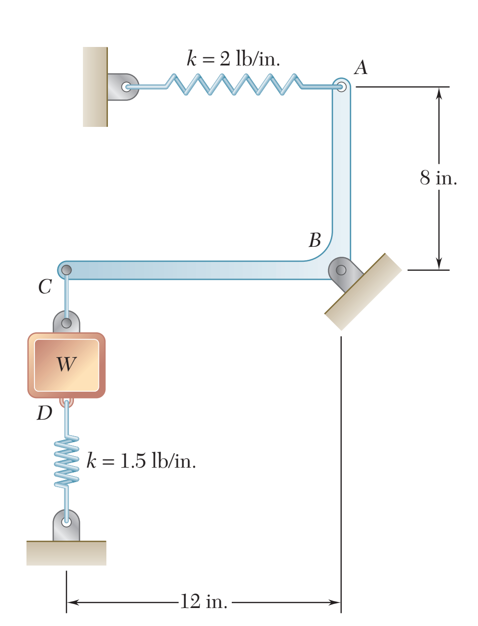


Figura *P19.95*

19.95 Una barra uniforme ABC de 1.4 lb se sostiene mediante un pasador en B y se conecta a un resorte en A. En C está conectada a un peso W de 3 lb que está unido a un resorte. Si se sabe que cada resorte puede actuar en tensión o compresión, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema cuando al peso se le da un pequeño desplazamiento y luego se suelta.

***19.96** Dos barras uniformes AB y BC, cada una con masa m y longitud l, se articulan entre sí en A y están conectadas mediante pasadores a rodillos pequeños en B y C. Un resorte de constante k se encuentra unido a los pasadores en B y C, y se observa que el sistema está en equilibrio cuando cada barra forma un ángulo β con la vertical. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones cuando al punto A se le da una pequeña deflexión hacia abajo y se suelta.

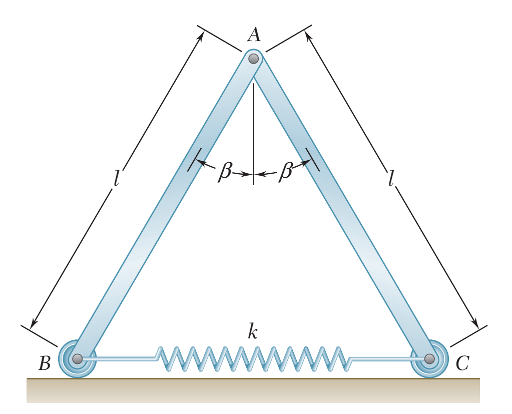


Figura P19.96

***19.97** Cuando un cuerpo sumergido se mueve a través de un fluido, las partículas del fluido fluyen alrededor del cuerpo y de ese modo adquieren energía cinética. En el caso de una esfera que se mueve en un fluido ideal, la energía cinética total adquirida por el fluido es $\frac{1}{4}\rho V v^2$, donde ρ es la densidad de masa del fluido, V es el volumen de la esfera y v es la velocidad de esta misma. Considere un cascarón esférico hueco de 500 g y 80 mm de radio que se mantiene sumergido en un tanque de agua por medio de un resorte de constante igual a 500 N/m. *a*) Sin tomar en cuenta la fricción del fluido, determine el periodo de vibración del cascarón cuando éste se desplaza verticalmente y luego se suelta. *b*) Resuelva el inciso *a*), suponiendo que el tanque se acelera hacia arriba a la razón constante de 8 m/s^2.

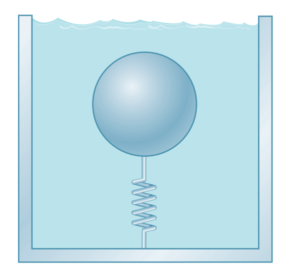


Figura P19.97

***19.98** Una placa delgada de longitud l descansa sobre medio cilindro de radio r. Obtenga una expresión para el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa.

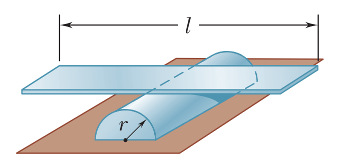


Figura P19.98

19.7. VIBRACIONES FORZADAS

Las vibraciones más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones de ingeniería son las *vibraciones forzadas* de un sistema. Éstas ocurren cuando un sistema se sujeta a una fuerza periódica o cuando se le conecta elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternante.

Considere primero el caso de un cuerpo de masa m suspendido de un resorte y sujeto a una fuerza periódica **P** de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$, donde ω_f es la frecuencia circular de **P** y se conoce como *frecuencia circular forzada* del movimiento (figura 19.7). Esta fuerza puede ser una fuerza externa real aplicada al cuerpo o una fuerza centrífuga producida por la rotación de alguna parte desbalanceada del cuerpo (vea el problema resuelto 19.5). Denotando mediante x el desplazamiento del cuerpo medido desde su posición de equilibrio, se escribe la ecuación de movimiento,

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \qquad P_m \text{ sen } \omega_f t + W - k(\delta_{\text{estática}} + x) = m\ddot{x}$$

Si se recuerda que $W = k\delta_{\text{estática}}$ se tiene

$$m\ddot{x} + kx = P_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.30)$$

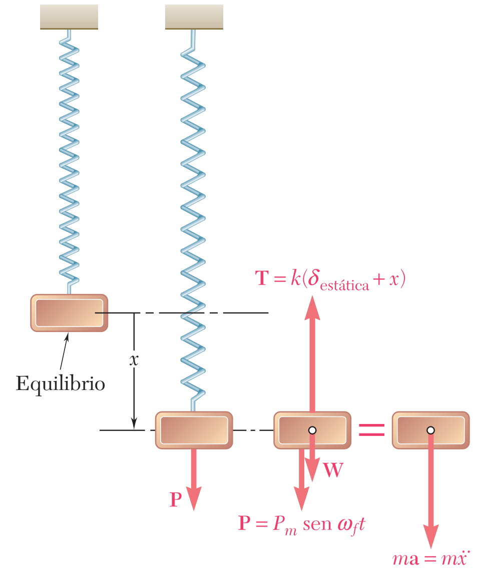


Figura 19.7

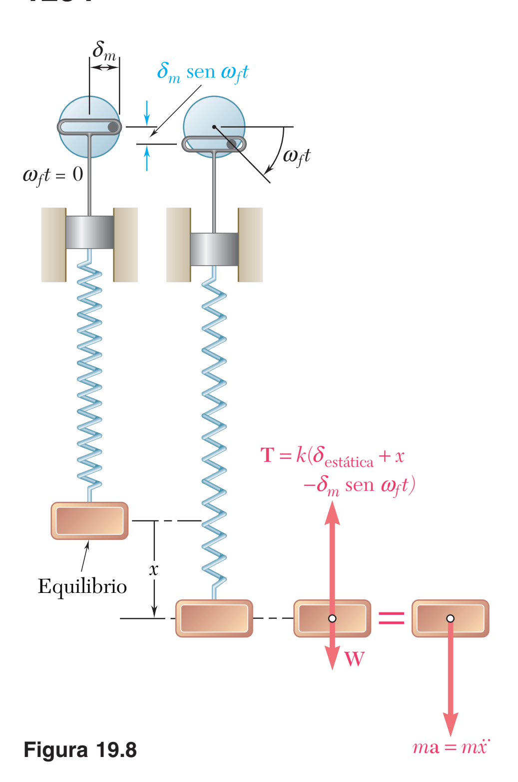
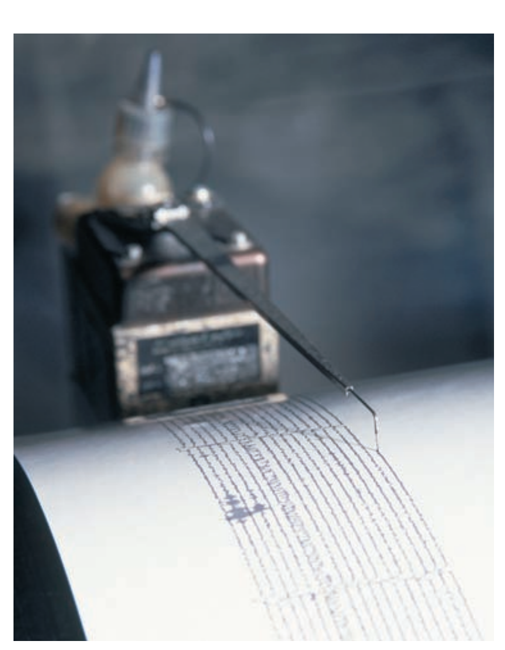


Figura 19.8



Fotografía 19.1 Un sismómetro opera al medir la cantidad de energía necesaria para mantener una masa centrada en la caja en la presencia de una fuerte sacudida del suelo.

A continuación se considera el caso de un cuerpo de masa m suspendido de un resorte unido a un soporte móvil cuyo desplazamiento δ es igual a δ_m sen $\omega_f t$ (figura 19.8). Al medir el desplazamiento x del cuerpo desde la posición de equilibrio estático correspondiente a $\omega_f t = 0$, se encuentra que la elongación total del resorte en el tiempo t es $\delta_{\text{estática}} + x - \delta_m$ sen $\omega_f t$. La ecuación de movimiento es entonces

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \qquad W - k(\delta_{\text{estática}} + x - \delta_m \text{ sen } \omega_f t) = m\ddot{x}$$

Como $W = k\delta_{\text{estática}}$ se tiene

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.31}$$

Nótese que las ecuaciones (19.30) y (19.31) son de la misma forma y que una solución de la primera ecuación satisfará a la segunda si se deja que $P_m = k\delta_m$.

Una ecuación diferencial tal como (19.30) o (19.31), que posee un miembro del lado derecho diferente de cero, se dice que es *no homogénea*. Su solución general se obtiene al sumar una solución particular de la ecuación dada a la solución general de la ecuación *homogénea* correspondiente (con el miembro del lado derecho igual a cero). Una *solución particular* de (19.30) o (19.31) puede obtenerse al tratar una solución de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.32}$$

Al sustituir x_{part} por x en la ecuación (19.30), se obtiene

$$-m\omega_f^2 x_m \text{ sen } \omega_f t + kx_m \text{ sen } \omega_f t = P_m \text{ sen } \omega_f t$$

que puede resolverse para la amplitud,

$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2}$$

Puesto que, de acuerdo con la ecuación (19.4), $k/m = \omega_n^2$, donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema, se escribe

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.33}$$

Al sustituir de (19.32) en (19.31), se obtiene de manera similar

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.33$'$}$$

La ecuación homogénea correspondiente a (19.30) o (19.31) es la ecuación (19.2), que define la vibración libre del cuerpo. Su solución general, denominada *función complementaria*, se encontró en la sección 19.2:

$$x_{\text{comp}} = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \tag{19.34}$$

Al sumar la solución particular (19.32) a la función complementaria (19.34), se obtiene la *solución general* de las ecuaciones (19.30) y (19.31):

$$x = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + x_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.35)$$

Hay que observar que las vibraciones obtenidas consisten en dos vibraciones superpuestas. Los primeros dos términos en la ecuación (19.35) representan una vibración libre del sistema. La frecuencia de esta vibración es la *frecuencia natural* del sistema, la cual depende únicamente de la constante k del resorte y la masa m del cuerpo, y las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. Esta vibración libre también se denomina como vibración *transitoria,* ya que en la práctica real se ve amortiguada de inmediato por las fuerzas de fricción (sección 19.9).

El último término en (19.35) representa la vibración de *estado estable* producida y mantenida por la fuerza aplicada o por el movimiento aplicado del apoyo o soporte. Su frecuencia es la *frecuencia forzada* impuesta por esta fuerza o movimiento, y su amplitud x_m, definida por (19.33) o (19.33′), depende de la *razón de frecuencias* ω_f/ω_n. La razón de la amplitud x_m de la vibración de estado estable a la deflexión estática P_m/k causada por una fuerza P_m, o a la amplitud δ_m de movimiento del apoyo, se llama *factor de amplificación.* A partir de las ecuaciones (19.33) y (19.33′), se obtiene

$$\text{Factor de amplificación} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \qquad (19.36)$$

En la figura 19.9 se ha graficado el factor de amplificación en función de la razón de frecuencia ω_f/ω_n. Se advierte que cuando $\omega_f = \omega_n$, la amplitud de la vibración forzada se vuelve infinita. Se dice que la fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el apoyo está en *resonancia* con el sistema dado. En realidad, la amplitud de la vibración permanece finita debido a fuerzas de amortiguamiento (sección 19.9); sin embargo, una situación de este tipo debe evitarse, y la frecuencia forzada no debe elegirse demasiado cercana a la frecuencia natural del sistema. También se pudo observar que para $\omega_f < \omega_n$ el coeficiente de sen $\omega_f t$ en (19.35) es positivo, en tanto que para $\omega_f > \omega_n$ este coeficiente es negativo. En el primer caso la vibración forzada está *en fase* con la fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el apoyo, mientras que en el segundo caso está a 180° *fuera de fase*.

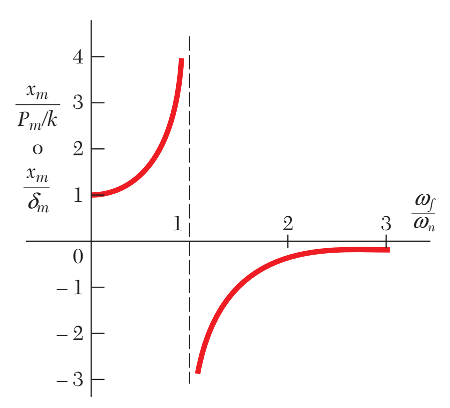
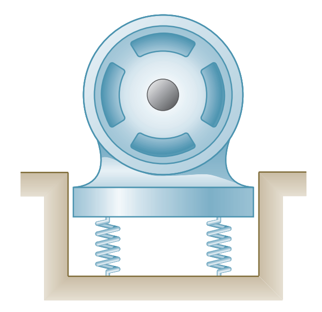


Figura 19.9

Por último, se advirtió que la velocidad y la aceleración en la vibración de estado estable pueden obtenerse al diferenciar dos veces con respecto a t el último término de la ecuación (19.35). Sus valores máximos se dan mediante expresiones similares a las de las ecuaciones (19.15) de la sección 19.2, salvo que estas expresiones incluyen la hora, la amplitud y la frecuencia circular de la vibración forzada:

$$v_m = x_m \omega_f \qquad a_m = x_m \omega_f^2 \qquad (19.37)$$



PROBLEMA RESUELTO 19.5

Un motor de 350 lb se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno con una constante de 750 lb/in. El desbalanceo del rotor es equivalente a un peso de 1 oz ubicado a 6 in. del eje de rotación. Si el motor está restringido a moverse verticalmente, determine *a*) la velocidad en rpm a la cual ocurrirá la resonancia, *b*) la amplitud de la vibración del motor a la velocidad de 1 200 rpm.

SOLUCIÓN

***a*) Velocidad de resonancia.** La velocidad de resonancia es igual a la frecuencia circular natural ω_n (en rpm) de la vibración libre del motor. La masa del motor y la constante equivalente de los resortes de soporte son

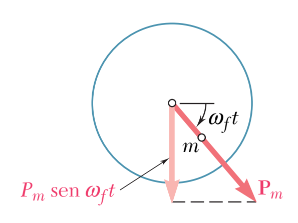
$$m = \frac{350 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 10.87 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

$$k = 4(750 \text{ lb/in.}) = 3\,000 \text{ lb/in.} = 36\,000 \text{ lb/ft}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36\,000}{10.87}} = 57.5 \text{ rad/s} = 549 \text{ rpm}$$

Velocidad de resonancia = 549 rpm ◀

***b*) Amplitud de la vibración a 1 200 rpm.** La velocidad angular del motor y la masa del peso equivalente de 1 oz son



$$\omega = 1\,200 \text{ rpm} = 125.7 \text{ rad/s}$$

$$m = (1 \text{ oz})\,\frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}}\,\frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.001941 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

La magnitud de la fuerza centrífuga debida al desbalanceo del rotor es

$$P_m = ma_n = mr\omega^2 = (0.001941 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{6}{12} \text{ ft})(125.7 \text{ rad/s})^2 = 15.33 \text{ lb}$$

La deflexión estática que provocaría una carga constante P_m es

$$\frac{P_m}{k} = \frac{15.33 \text{ lb}}{3\,000 \text{ lb/in.}} = 0.00511 \text{ in.}$$

La frecuencia circular forzada ω_f del movimiento es la velocidad angular del motor,

$$\omega_f = \omega = 125.7 \text{ rad/s}$$

Al sustituir los valores de P_m/k, ω_f y ω_n en la ecuación (19.33), se obtiene

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} = \frac{0.00511 \text{ in.}}{1 - (125.7/57.5)^2} = -0.001352 \text{ in.}$$

$x_m = 0.001352$ in. (fuera de fase) ◀

Nota. Como $\omega_f > \omega_n$, la vibración está 180° fuera de fase con la fuerza centrífuga debida al desbalanceo del rotor. Por ejemplo, cuando la masa desbalanceada está directamente abajo del eje de rotación, la posición del motor es $x_m = 0.001352$ in. sobre la posición de equilibrio.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó al análisis de las *vibraciones forzadas* de un sistema mecánico. Estas vibraciones ocurren cuando el sistema se somete a una fuerza periódica **P** (figura 19.7), o cuando está conectado elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternante (figura 19.8). En el primer caso, el movimiento del sistema se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \qquad (19.30)$$

donde el miembro del lado derecho representa la magnitud de la fuerza **P** en un instante determinado. En el segundo caso, el movimiento se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen} \omega_f t \qquad (19.31)$$

donde el miembro del lado derecho es el producto de la constante de resorte k y el desplazamiento del soporte en un instante dado. El interés se concentrará sólo en el movimiento de *estado estable* del sistema, el cual se define mediante una *solución particular* de estas ecuaciones, de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} \omega_f t \qquad (19.32)$$

1. *Si la vibración forzada resulta de una fuerza periódica* P, de amplitud P_m y frecuencia circular ω_f, la amplitud de la vibración es

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \qquad (19.33)$$

donde ω_n es la *frecuencia circular natural* del sistema $\omega_n = \sqrt{k/m}$, y k es la constante de resorte. Advierta que la frecuencia circular de la vibración es ω_f y que la amplitud x_m no depende de las condiciones iniciales. Para $\omega_f = \omega_n$, el denominador en la ecuación (19.33) es cero y x_m es infinita (figura 19.9); se dice que la fuerza aplicada **P** está en *resonancia* con el sistema. Además, para $\omega_f < \omega_n$, x_m es positiva y las vibraciones están *en fase* con **P**, mientras que, para $\omega_f > \omega_n$, x_m es negativa y la vibración está *fuera de fase*.

a) En los problemas que siguen se pedirá determinar uno de los parámetros de la ecuación (19.33) cuando se conocen los demás. Sugerimos que al resolver este problema se tenga siempre enfrente la figura 19.9. Por ejemplo, si se pide determinar la frecuencia a la cual la amplitud de una vibración forzada tiene un valor determinado, pero no se sabe si la vibración está en o fuera de fase con respecto a la fuerza aplicada, en la figura 19.9 se observa que es posible que existan dos frecuencias que satisfagan este requerimiento, una que corresponde al valor positivo de x_m y a una vibración en fase con la fuerza aplicada, y la otra correspondiente a un valor negativo de x_m y a una vibración fuera de fase con la fuerza aplicada.

(*continúa*)

b) Una vez que se ha obtenido la amplitud x_m del movimiento de una componente del sistema con la ecuación (19.33), puede recurrirse a las ecuaciones (19.33) para determinar los valores máximos de la velocidad y la aceleración de esa componente:

$$v_m = x_m\omega_f \qquad a_m = x_m\omega_f^2 \tag{19.37}$$

c) Cuando la fuerza aplicada P se debe al desbalance del rotor de un motor, su valor máximo es $P_m = mr\omega_f^2$, donde m es la masa del rotor, r es la distancia entre su centro de masa y el eje de rotación, y ω_f es igual a la velocidad ω angular del rotor expresada en rad/s [problema resuelto 19.5].

2. Si la vibración forzada la provoca un movimiento armónico simple de un soporte, de amplitud δ_m y frecuencia circular ω_f, la amplitud de la vibración es

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.33$'$}$$

donde ω_n es la *frecuencia circular natural* del sistema, $\omega_n = \sqrt{k/m}$. También en este caso advierta que la frecuencia circular de la vibración es ω_f y que la amplitud x_m no depende de las condiciones iniciales.

a) Asegúrese de leer nuestros comentarios en los párrafos 1, 1a y 1b, ya que éstos se aplican igualmente bien a una vibración provocada por el movimiento de un soporte.

b) Si se especifica la aceleración máxima a_m del soporte, más que su desplazamiento máximo δ_m, recuerde que, ya que el movimiento del soporte es armónico simple, es posible utilizar la relación $a_m = \delta_m\omega_f^2$ para determinar δ_m; el valor obtenido se sustituye entonces en la ecuación (19.33′).

Problemas

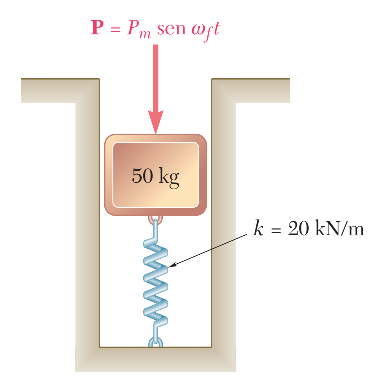


Figura P19.99

19.99 Un bloque de 50 kg se conecta a un resorte de constante k = 20 kN/m y puede moverse sin fricción en una ranura vertical de la manera mostrada. Sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$, donde ω_f = 18 rad/s. Si la amplitud del movimiento es de 3 mm, determine el valor de P_m.

19.100 Un collarín de 9 lb puede deslizarse sobre una barra horizontal sin fricción y se conecta a un resorte de constante igual a 2.5 lb/in. Sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$, donde P_m = 3 lb. Determine la amplitud del movimiento del collarín si *a*) ω_f = 5 rad/s y *b*) ω_f = 10 rad/s.

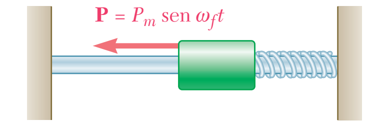


Figura P19.100, P19.101 y P19.102

19.101 Un collarín de 9 lb puede deslizarse sobre una barra horizontal sin fricción y se conecta a un resorte de constante k. Sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$, donde P_m = 2 lb y ω_f = 5 rad/s. Determine el valor de la constante de resorte k si se sabe que el movimiento del collarín tiene una amplitud de 6 in. y está *a*) en fase con la fuerza aplicada, *b*) fuera de fase con la fuerza aplicada.

19.102 Un collarín de masa m que se desliza sobre una barra horizontal sin fricción se conecta a un resorte de constante k y sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$. Determine el intervalo de valores de ω_f para el cual la amplitud de la vibración excede tres veces la deflexión estática causada por una fuerza constante de magnitud P_m.

19.103 Un disco uniforme de 8 kg con radio de 200 mm está soldado a una flecha vertical con un extremo fijo en B. El disco gira un ángulo de 3° cuando se le aplica un par estático con magnitud de 50 N · m. Si el disco se somete a un par de torsión con magnitud $T = T_m$ sen $\omega_f t$, donde T_m = 60 N · m, determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud de la vibración es menor que el ángulo de rotación causado por un par estático de magnitud T_m.

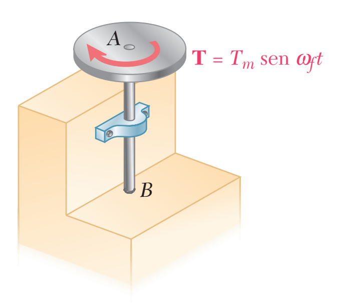


Figura *P19.103* y *P19.104*

19.104 Para el disco del problema 19.103, determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud de la vibración será menor que 3.5°.

19.105 Un bloque A de 8 kg se desliza en una ranura vertical sin fricción y se conecta a un soporte móvil B mediante un resorte AB de constante k = 1.6 kN/m. Si el desplazamiento del soporte es $\delta = \delta_m$ sen $\omega_f t$, donde δ_m = 150 mm, determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud de la fuerza fluctuante que ejerce el resorte sobre el bloque es menor a 120 N.

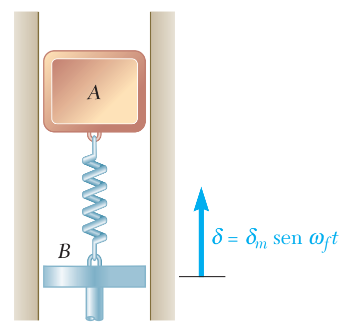


Figura P19.105

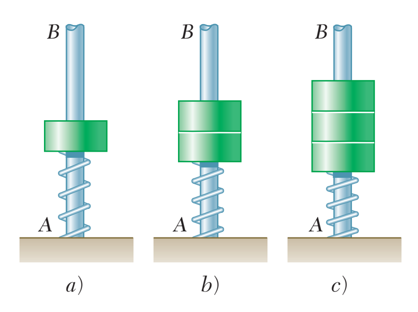


Figura P19.106

19.106 La barra AB está unida rígidamente al bastidor de un motor que funciona a velocidad constante. Cuando un collarín de masa m se coloca sobre el resorte, se observa que éste vibra con una amplitud de 15 mm. Cuando dos collarines, cada uno de masa m, se colocan sobre el resorte, se observa que la amplitud es de 18 mm. ¿Qué amplitud de vibración debería esperarse cuando se colocan tres collarines, cada uno de masa m, sobre el resorte? (Obtenga dos respuestas.)

19.107 Una viga en voladizo AB soporta un bloque que provoca una deflexión estática de 2 in. en B. Si se supone que el soporte en A experimenta un desplazamiento periódico vertical $\delta = \delta_m \text{ sen } \omega_f t$ donde $\delta_m = 0.5$ in., determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud del movimiento del bloque será menor que 1 in. Desprecie la masa de la viga y suponga que el bloque no sale de la misma.



Figura P19.107

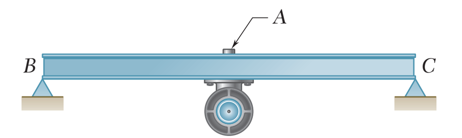


Figura P19.108

19.108 Un motor de velocidad variable está unido rígidamente a una viga BC. Cuando la velocidad del motor es menor que 600 rpm o mayor que 1 200 rpm, se observa que un pequeño objeto colocado en A permanece en contacto con la viga. Para velocidades entre 600 y 1 200 rpm se observa que el objeto "baila" e incluso pierde contacto con la viga. Determine la velocidad a la que ocurrirá la resonancia.

19.109 Un bloque A de 8 kg se desliza en una ranura vertical sin fricción y se conecta a un soporte móvil B mediante un resorte AB de constante $k = 120$ N/m. Si se sabe que el desplazamiento del soporte es $a = a_m \text{ sen } \omega_f t$, donde $a_m = 1.5 \text{ m/s}^2$ y $\omega_f = 5$ rad/s, determine *a*) el desplazamiento máximo del bloque A y *b*) la amplitud de la fuerza fluctuante que ejerce el resorte sobre el bloque.

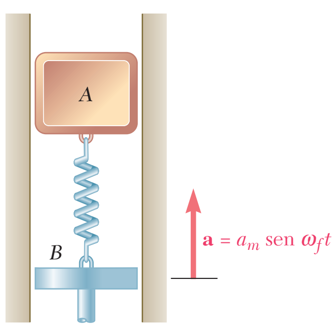


Figura P19.109

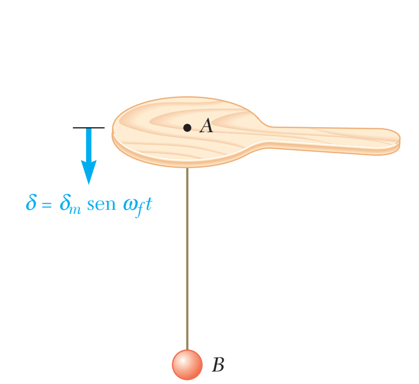


Figura *P19.110*

19.110 Una pelota de 0.8 lb se conecta a una paleta por medio de una cuerda elástica AB de constante $k = 5$ lb/ft. Si la paleta se mueve verticalmente de acuerdo con la relación $\delta = \delta_m \text{ sen } \omega_f t$, donde $\delta_m = 8$ in., determine la frecuencia circular ω_f máxima permisible si la cuerda debe mantenerse tensa.

19.111 Un péndulo simple de longitud l se suspende de un collarín C, que es forzado a moverse de manera horizontal de acuerdo con la relación $x_C = \delta_m$ sen $\omega_f t$. Determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud del movimiento de la plomada es menor que δ_m. (Suponga que δ_m es pequeño comparado con la longitud l del péndulo.)

19.112 La plomada de 1.2 kg de un péndulo simple de longitud l = 600 mm se suspende de un collarín C de 1.4 kg. El collarín es obligado a moverse de acuerdo con la relación $x_C = \delta_m$ sen $\omega_f t$, con una amplitud δ_m = 10 mm y una frecuencia f_f = 0.5 Hz. Determine *a*) la amplitud del movimiento de la plomada, *b*) la fuerza que debe aplicarse al collarín C para mantener el movimiento.

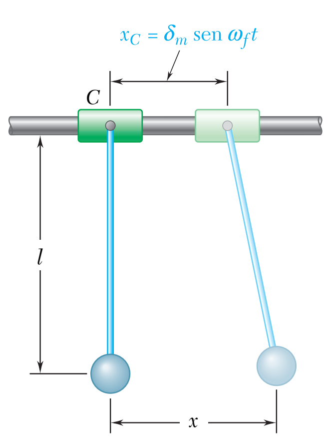


Figura *P19.111* y P.19.112

19.113 Un motor de masa M se sostiene mediante resortes con una constante de resorte equivalente k. El desbalance de su rotor es equivalente a una masa m ubicada a una distancia r del eje de rotación. Demuestre que cuando la velocidad angular del rotor es ω_f, la amplitud x_m del movimiento del motor es

$$x_m = \frac{r(m/M)(\omega_f/\omega_n)^2}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/M}$.

19.114 Cuando la velocidad rotacional de un motor de 100 kg soportado por resortes se incrementa, la amplitud de la vibración debida al desbalance de su rotor de 15 kg aumenta primero y luego disminuye. Se observa que cuando se alcanzan velocidades muy altas, la amplitud de la vibración se aproxima a 3.3 mm. Determine la distancia entre el centro de masa del rotor y su eje de rotación. (*Sugerencia:* Utilice la fórmula que se obtuvo en el problema 19.113.)

19.115 Un motor que pesa 400 lb se sostiene mediante resortes que tienen una constante total de 1 200 lb/in. El desbalance del rotor es equivalente a un peso de 1 oz. ubicada a 8 in. del eje de rotación. Determine el intervalo de valores permisibles de la velocidad del motor si la amplitud de la vibración no debe superar 0.06 in.

19.116 Conforme la velocidad rotacional de un motor soportado por resortes aumenta de manera gradual desde 300 hasta 500 rpm, se observa que la amplitud de la vibración debida al desbalance de su rotor aumenta de manera continua desde 1.5 hasta 6 mm. Determine la velocidad a la cual ocurrirá la resonancia.

19.117 Un motor de 220 lb está atornillado a una viga horizontal ligera. El desbalance de su rotor es equivalente a un peso de 2 oz. ubicado a 4 in. del eje de rotación. Si la resonancia ocurre cuando el motor tiene una velocidad de 400 rpm, determine la amplitud de la vibración de estado estable a *a*) 800 rpm, *b*) 200 rpm, *c*) 425 rpm.

19.118 Un motor de 180 kg está atornillado a una viga horizontal ligera. El desbalance de su rotor es equivalente a una masa de 28 g ubicada a 150 mm del eje de rotación, y la deformación estática de la viga debida al peso del motor es de 12 mm. La amplitud de la vibración debida al desbalance puede disminuirse agregando una placa a la base del motor. Si la amplitud de la vibración debe ser menor a 60 μm, para velocidades del motor mayores que 300 rpm, determine el peso requerido de la placa.

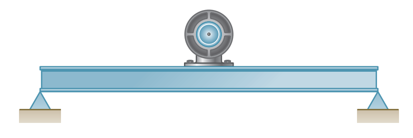


Figura *P19.117* y P.19.118

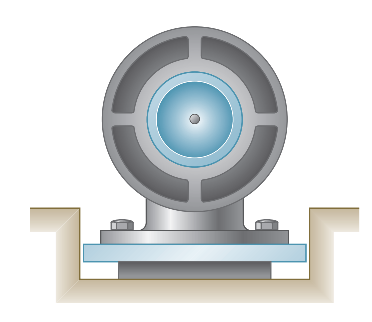


Figura *P19.119*

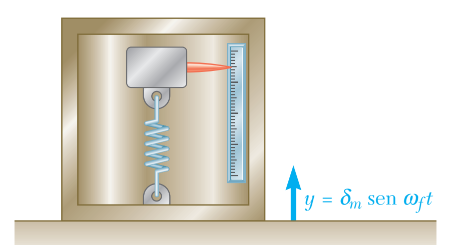


Figura P19.121 y P19.122

19.119 El desbalance del rotor de un motor de 400 lb es equivalente a un peso de 3 oz. localizado a 6 in. del eje de rotación. A fin de limitar en 0.2 lb la amplitud de la fuerza fluctuante ejercida sobre el cimiento cuando el motor opera a velocidades de 100 rpm o mayores, se debe colocar una almohadilla entre el motor y el cimiento. Determine *a*) la constante de resorte *k* máxima permisible para la almohadilla, *b*) la amplitud correspondiente de la fuerza fluctuante ejercida sobre el cimiento cuando el motor se opera a 200 rpm.

19.120 Un motor de 180 kg se sostiene mediante resortes de constante total igual a 150 kN/m. El desbalance del rotor es equivalente a una masa de 28 g ubicada a 150 mm del eje de rotación. Determine el intervalo de velocidades del motor para el cual la amplitud de la fuerza fluctuante ejercida sobre el cimiento es menor a 20 N.

19.121 Un vibrómetro que se utiliza para medir la amplitud de vibraciones consiste en una caja que contiene un sistema masa-resorte con una frecuencia natural conocida de 120 Hz. La caja está rígidamente unida a la superficie que se mueve de acuerdo con la ecuación $y = \delta_m$ sen $\omega_f t$. Si la amplitud z_m del movimiento de la masa relativo a la caja se utiliza como una medida de la amplitud δ_m de la vibración de la superficie, determine *a*) el error porcentual cuando la frecuencia de la vibración es de 600 Hz y *b*) la frecuencia a la cual el error es cero.

19.122 Cierto acelerómetro está compuesto esencialmente por una caja que contiene un sistema masa-resorte con una frecuencia natural conocida de 2 200 Hz. La caja está rígidamente unida a una superficie que se mueve de acuerdo con la ecuación $y = \delta_m$ sen $\omega_f t$. Si la amplitud z_m del movimiento de la masa relativa a la caja por un factor de escala ω_n^2 se utiliza como una medida de la aceleración máxima $\alpha_m = \delta_m \omega_f^2$ de la superficie vibrante, determine el error porcentual cuando la frecuencia de la vibración es de 600 Hz.

19.123 Las figuras (1) y (2) muestran cómo es posible utilizar resortes para soportar un bloque en dos situaciones diferentes. En la figura (1) los resortes ayudan a disminuir la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida por el bloque al cimiento. En la figura (2) ayudan a disminuir la amplitud del desplazamiento fluctuante que transmite el cimiento al bloque. El cociente de la fuerza transmitida y la fuerza aplicada o el cociente entre el desplazamiento transmitido y el desplazamiento que se genera recibe el nombre de *transmisibilidad*. Obtenga una ecuación para la transmisibilidad en cada situación. Indique su respuesta en términos de la razón ω_f/ω_n de la frecuencia ω_f de la fuerza aplicada o el desplazamiento que se genera respecto a la frecuencia natural ω_n del sistema resorte-masa. Demuestre que para provocar cualquier reducción en la transmisibilidad, el cociente ω_f/ω_n debe ser mayor que $\sqrt{2}$.

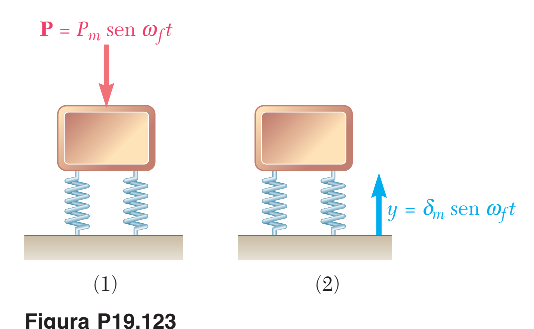


Figura P19.123

19.124 Un disco de 60 lb se conecta con una excentricidad $e = 0.006$ in. al punto medio de una flecha vertical AB que gira a una velocidad angular constante ω_f. Si se sabe que la constante de resorte k para el movimiento horizontal de un disco es de 40 000 lb/ft, determine *a*) la velocidad angular ω_f en la cual ocurrirá resonancia y *b*) la deflexión r de la flecha cuando $\omega_f = 1\,200$ rpm.

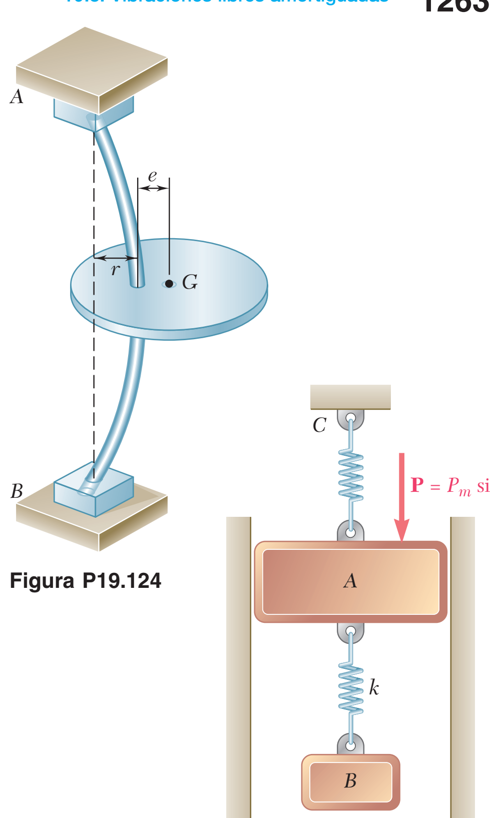


Figura P19.124

Figura *P19.126*

19.125 Un pequeño remolque y su carga tienen una masa total de 250 kg. El remolque se sostiene por medio de dos resortes, cada uno de constante igual a 10 kN/m, y se jala sobre un camino, cuya superficie puede aproximarse por medio de una curva senoidal con una amplitud de 40 mm y una longitud de onda de 5 m (esto es, la distancia entre crestas sucesivas es de 5 m y la distancia vertical de cresta a seno es de 80 mm). Determine *a*) la velocidad a la cual ocurrirá la resonancia y *b*) la amplitud de la vibración del remolque a una velocidad de 50 km/h.

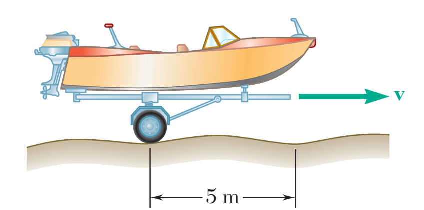


Figura *P19.125*

19.126 El bloque A puede moverse sin fricción en la ranura como se muestra en la figura y sobre él actúa una fuerza periódica vertical de magnitud $P = P_m \text{ sen } \omega_f t$, donde $\omega_f = 2$ rad/s y $P_m = 20$ N. Un resorte de constante k se conecta a la parte inferior del bloque A y a un bloque B de 22 kg. Determine *a*) el valor de la constante k que evitará una vibración de estado estable del bloque A y *b*) la amplitud correspondiente de la vibración del bloque B.

VIBRACIONES AMORTIGUADAS

*19.8. VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

Los sistemas vibratorios considerados en la primera parte de este capítulo se supusieron libres de amortiguamiento. En realidad, todas las vibraciones se amortiguan en cierto grado gracias a las fuerzas de fricción. Estas fuerzas pueden deberse a *fricción seca* o a *fricción de Coulomb*, entre cuerpos rígidos, a *fricción fluida*, cuando un cuerpo rígido se mueve en un fluido, o a *fricción interna* entre las moléculas de un cuerpo aparentemente elástico.

Un tipo de amortiguamiento de interés especial es el *amortiguamiento viscoso* ocasionado por fricción o rozamiento de un fluido a velocidades bajas y moderadas. El amortiguamiento viscoso se caracteriza por el hecho de que la fuerza de fricción es *directamente proporcional y opuesta a la velocidad* del cuerpo en movimiento. Como ejemplo, considérese de nuevo un cuerpo de masa m suspendido de un resorte de constante k, donde se supondrá que el cuerpo está conectado al émbolo de un amortiguador (figura 19.10). La magnitud de la fuerza de fricción que ejerce el fluido de los alrededores sobre el émbolo es igual a $c\dot{x}$, donde la constante c, expresada en N · s/m o lb · s/ft y que se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso*, depende de las propiedades físicas del fluido y de la construcción del amortiguador. La ecuación de movimiento es

$$+\downarrow \Sigma F = ma: \qquad W - k(\delta_{\text{estática}} + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

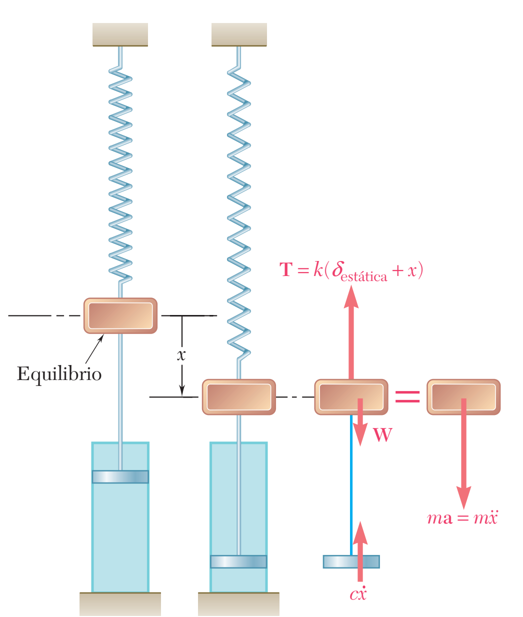


Figura 19.10

Cuando $W = k\delta_{\text{estática}}$ se escribe

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (19.38)$$

Al sustituir $x = e^{\lambda t}$ en (19.38) y dividir entre $e^{\lambda t}$ se escribe la *ecuación característica*

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \qquad (19.39)$$

y se obtienen las raíces

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad (19.40)$$

Al definir el *coeficiente de amortiguamiento crítico* c_c, como el valor de c que hace que el radical en la ecuación (19.40) se iguale a cero, se escribe

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \qquad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \qquad (19.41)$$

donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema en ausencia de amortiguamiento. Se pueden distinguir tres casos diferentes de amortiguamiento, dependiendo del valor del coeficiente c.

1. *Sobreamortiguamiento o amortiguamiento fuerte:* $c > c_c$. Las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (19.39) son reales y distintas, y la solución general de la ecuación diferencial (19.38) es

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (19.42)$$

Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio. Puesto que λ_1 y λ_2 son ambas negativas, x tiende a cero cuando t aumenta de manera indefinida. Sin embargo, el sistema en realidad vuelve a su posición de equilibrio después de un tiempo finito.

2. *Amortiguamiento crítico:* $c = c_c$. La ecuación característica tiene una doble raíz $\lambda = -c_c/2m = -\omega_n$, y la solución general de (19.38) es

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \qquad (19.43)$$

El movimiento que se obtiene es otra vez no vibratorio. Los sistemas críticamente amortiguados son de especial interés en aplicaciones de ingeniería, pues vuelven a su posición de equilibrio en el tiempo más corto posible sin oscilación.

3. *Subamortiguamiento o amortiguamiento débil:* $c < c_c$. Las raíces de la ecuación (19.39) son complejas y conjugadas, y la solución general de (19.38) es de la forma

$$x = e^{-(c/2m)t}(C_1 \operatorname{sen} \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) \qquad (19.44)$$

donde ω_d se define por la relación

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2$$

Al sustituir $k/m = \omega_n^2$ y recordar (19.41), se escribe

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \qquad (19.45)$$

donde la constante c/c_c se conoce como el *factor de amortiguamiento.* Aun cuando el movimiento en realidad no se repite a sí mismo, la constante ω_d se conoce comúnmente como la *frecuencia circular* de la vibración amortiguada. Una sustitución similar a la que se utilizó en la sección 19.2 permite escribir la solución general de la ecuación (19.38) en la forma

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \text{ sen } (\omega_d t + \phi) \qquad (19.46)$$

El movimiento definido por la ecuación (19.46) es vibratorio con amplitud decreciente (figura 19.11), y el intervalo de tiempo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ que separa dos puntos sucesivos donde la curva definida por la ecuación (19.46) toca una de las curvas límite que se muestran en la figura 19.11 se conoce comúnmente como el *periodo de vibración amortiguada*. De acuerdo con la ecuación (19.45), se observa que $\omega_d < \omega_n$ y, por ello, que τ_d es más grande que el periodo de vibración τ_n del sistema no amortiguado correspondiente.

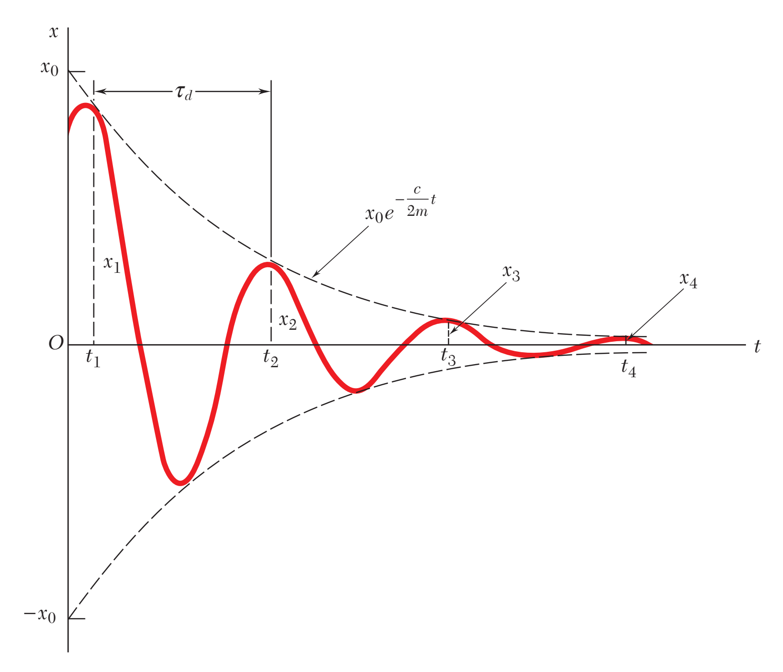


Figura 19.11



*19.9. VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

Si el sistema considerado en la sección anterior está sujeto a una fuerza periódica **P** de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$, la ecuación de movimiento se convierte en

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.47}$$



Fotografía 19.2 La suspensión de automóvil está compuesta, en esencia, por un resorte y un amortiguador, el cual provocará que la carrocería se someta a *vibraciones forzadas amortiguadas* cuando el vehículo sea conducido sobre un camino disparejo.

La solución general de (19.47) se obtiene al sumar una solución particular de (19.47) a la función complementaria o solución general de la ecuación homogénea (19.38). La función complementaria está dada por (19.42), (19.43) o (19.44), según el tipo de amortiguamiento considerado. Esto representa un movimiento *transitorio* que finalmente se amortigua.

El interés en esta sección se centra en la vibración de estado estable representada por una solución particular de (19.47) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \text{ sen } (\omega_f t - \varphi) \tag{19.48}$$

Al sustituir x_{part} en vez de x en (19.47), se obtiene

$$-m\omega_f^2 x_m \text{ sen } (\omega_f t - \varphi) + c\omega_f x_m \cos (\omega_f t - \varphi) + kx_m \text{ sen } (\omega_f t - \varphi) = P_m \text{ sen } \omega_f t$$

Al hacer $\omega_f t - \varphi$ sucesivamente igual a 0 y a $\pi/2$, se escribe

$$c\omega_f x_m = P_m \text{ sen } \varphi \tag{19.49}$$

$$(k - m\omega_f^2)\, x_m = P_m \cos \varphi \tag{19.50}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de (19.49) y (19.50) y sumar, resulta

$$[(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2]\, x_m^2 = P_m^2 \tag{19.51}$$

Al resolver (19.51) para x_m y dividir (19.49) y (19.50) miembro a miembro, se obtiene, respectivamente,

$$x_m = \frac{P_m}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}} \qquad \tan \varphi = \frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2} \tag{19.52}$$

De acuerdo con la ecuación (19.4) de que $k/m = \omega_n^2$, donde ω_n es la frecuencia circular de la vibración libre no amortiguada, y conforme a (19.41), de que $2m\omega_n = c_c$, donde c_c es el coeficiente de amortiguamiento crítico del sistema, se escribe

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \tag{19.53}$$

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.54}$$



Fotografía 19.3 La camioneta experimenta vibración forzada amortiguada en la prueba dinámica para vehículos que se muestra en la fotografía.

La fórmula (19.53) expresa el factor de amplificación en función de la razón de frecuencias ω_f/ω_n y del factor de amortiguamiento c/c_c. Es posible usarla para determinar la amplitud de la vibración de estado estable producida por una fuerza aplicada de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$ o por el movimiento de apoyo aplicado $\delta = \delta_m$ sen $\omega_f t$. La fórmula (19.54) define en términos de los mismos parámetros la *diferencia de fase* φ entre la fuerza aplicada o el movimiento del apoyo aplicado y la vibración de estado estable resultante del sistema amortiguado. El factor de amplificación se ha graficado en función de la razón de frecuencias en la figura 19.12 para diferentes valores del factor de amortiguamiento. Se observa que la amplitud de una vibración forzada puede mantenerse pequeña al elegir un alto coeficiente de amortiguamiento viscoso c o al mantener alejadas las frecuencias natural y forzada.

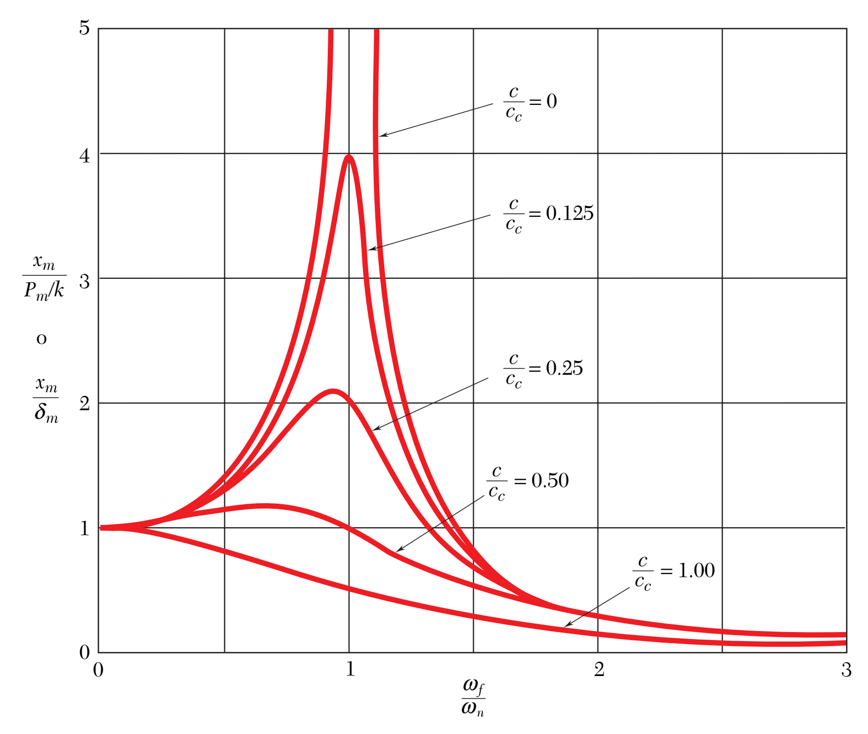


Figura 19.12

*19.10. ANALOGÍAS ELÉCTRICAS

Los circuitos eléctricos oscilantes se caracterizan por ecuaciones diferenciales del mismo tipo que las que se obtienen en las secciones precedentes. Por lo tanto, su análisis es similar al de un sistema mecánico, y los resultados que se obtienen para un sistema vibratorio dado pueden extenderse de inmediato al circuito equivalente. De manera inversa, cualquier resultado obtenido para un circuito eléctrico se aplicará también al sistema mecánico correspondiente.

Considere un circuito eléctrico compuesto por un inductor de inductancia L, un resistor de resistencia R y un capacitor de capacitancia C conectado en serie con una fuente de voltaje alterno $E = E_m$ sen $\omega_f t$ (figura 19.13). De la teoría elemental de circuitos† se sabe que si i denota la corriente en el circuito y q la carga eléctrica en el capacitor, la caída de potencial es $L(di/dt)$ a través del inductor, Ri a través del resistor y q/C a través del capacitor. Al expresar que la suma algebraica del voltaje aplicado y de las caídas de potencial alrededor del circuito cerrado es cero, se escribe

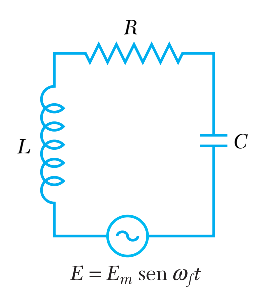


Figura 19.13

$$E_m \text{ sen } \omega_f t - L\frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \qquad (19.55)$$

Al reordenar los términos y recordar que en cualquier instante la corriente i es igual a la razón de cambio $\dot{q}$ de la carga q, se tiene

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.56)$$

Se verifica que la ecuación (19.56), que define las oscilaciones del circuito eléctrico de la figura 19.13, es del mismo tipo que la ecuación (19.47), la cual caracteriza las vibraciones forzadas amortiguadas del sistema mecánico de la figura 19.10. Al comparar las dos ecuaciones, es posible construir una tabla de las expresiones mecánicas y eléctricas análogas.

Tabla 19.2. Características de un sistema mecánico y de sus analogías eléctricas

Sistema mecánico		Circuito eléctrico	
m	Masa	L	Inductancia
c	Coeficiente de amortiguamiento viscoso	R	Resistencia
k	Constante de resorte	$1/C$	Recíproco de la capacitancia
x	Desplazamiento	q	Carga
v	Velocidad	i	Corriente
P	Fuerza aplicada	E	Voltaje aplicado

†Véase C. R. Paul, S. A. Nasar y L. E. Unnewehr, *Introduction to Electrical Engineering*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1992.

La tabla 19.2 puede utilizarse para extender los resultados que se obtuvieron en las secciones anteriores para diversos sistemas mecánicos a sus análogos eléctricos. Por ejemplo, la amplitud i_m de la corriente en el circuito de la figura 19.13 se obtiene al notar que corresponde al valor máximo v_m de la velocidad en el sistema mecánico análogo. De acuerdo con la primera de las ecuaciones (19.37), $v_m = x_m\omega_f$, si se sustituye x_m de la ecuación (19.52) y se reemplazan las constantes del sistema mecánico con expresiones eléctricas correspondientes, se tiene

$$i_m = \frac{\omega_f E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega_f^2\right)^2 + (R\omega_f)^2}}$$

$$i_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_f - \frac{1}{C\omega_f}\right)^2}} \qquad (19.57)$$

El radical en la expresión anterior se conoce como *impedancia* del circuito eléctrico.

La analogía entre sistemas y circuitos eléctricos se cumple tanto para oscilaciones transitorias como para oscilaciones de estado estable. Las oscilaciones del circuito que se muestra en la figura 19.14, por ejemplo, son análogas a las vibraciones libres amortiguadas del sistema de la figura 19.10. En cuanto a lo que se refiere a condiciones iniciales, debe advertirse que será del circuito S cuando la carga en el capacitor es $q = q_0$ es equivalente a liberar la masa del sistema mecánico sin velocidad inicial desde la posición $x = x_0$. Se debe observar también que si una batería de voltaje constante E se introduce en el circuito eléctrico de la figura 19.14, el cierre del interruptor S será equivalente a aplicar en forma repentina una fuerza de magnitud constante P a la masa del sistema mecánico de la figura 19.10.

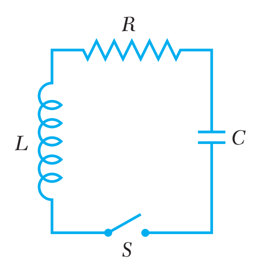


Figura 19.14

El análisis anterior sería de valor cuestionable si el único resultado fuera hacer posible que los estudiantes de mecánica analizaran circuitos eléctricos sin aprender los elementos de la teoría de circuitos. Se espera que este análisis sirva, en cambio, de motivación para que los estudiantes apliquen en la solución de problemas de vibraciones mecánicas las técnicas matemáticas que quizás aprendieron en los últimos cursos de teoría de circuitos. Sin embargo, el valor principal del concepto de la analogía eléctrica reside en su aplicación en *métodos experimentales* para la determinación de las características de un sistema mecánico determinado. De hecho, un circuito eléctrico se construye con mayor facilidad que un modelo mecánico, y el hecho de que sus características puedan modificarse al variar la inductancia, la resistencia o la capacidad de sus diferentes componentes hace que el uso de la analogía eléctrica resulte particularmente conveniente.

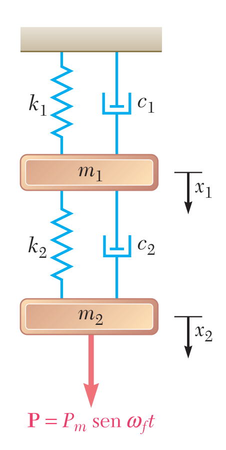


Figura 19.15

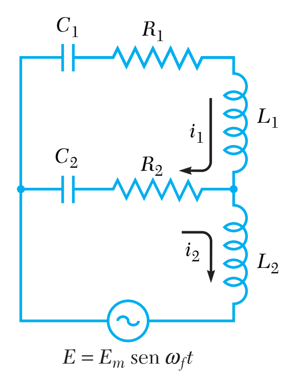


Figura 19.16

Para determinar la analogía eléctrica de un sistema mecánico determinado, hay que centrar la atención en cada masa en movimiento del sistema y observar qué resortes, amortiguadores o fuerzas externas se le aplican directamente. Después es posible construir un circuito eléctrico equivalente para duplicar cada una de las unidades mecánicas definidas de esa forma; los diferentes circuitos que se obtienen de ese modo formarán en conjunto el circuito deseado. Considérese, por ejemplo, el sistema mecánico de la figura 19.15. Se observa que sobre la masa m_1 actúan dos resortes de constantes k_1 y k_2 y dos amortiguadores caracterizados por los coeficientes de amortiguamiento viscoso c_1 y c_2. El circuito eléctrico debe incluir consecuentemente un lazo consistente en un inductor de inductancia L_1 proporcional a m_1, de dos capacitores de capacitancia C_1 y C_2 inversamente proporcionales a k_1 y k_2, respectivamente, y de dos resistores de resistencia R_1 y R_2, proporcionales de forma respectiva a c_1 y c_2. Puesto que sobre la masa m_2 actúa el resorte k_2 y el amortiguador c_2, así como la fuerza $P = P_m$ sen $\omega_f t$, el circuito debe incluir también un lazo que contenga al capacitor C_2, al resistor R_2, al nuevo inductor L_2 y a la fuente de voltaje $E = E_m$ sen $\omega_f t$ (figura 19.16).

Para confirmar que el sistema mecánico de la figura 19.15 y el circuito eléctrico de la figura 19.16 satisfacen en realidad las mismas ecuaciones diferenciales, se deducirán primero las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2. Al denotar, respectivamente, por x_1 y x_2 los desplazamientos de m_1 y m_2 de sus posiciones de equilibrio, se observa que la elongación del resorte k_1 (medida desde la posición de equilibrio) es igual a x_1, en tanto que la elongación del resorte k_2 es igual al desplazamiento relativo $x_2 - x_1$ de m_2 con respecto a m_1. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2 son

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \tag{19.58}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = P_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.59}$$

Considere ahora el circuito eléctrico de la figura 19.16; se denota, respectivamente, por i_1 e i_2 la corriente en el primero y el segundo lazos, y por q_1 y q_2 las integrales $\int i_2\, dt$ e $\int i_2\, dt$. Al notar que la carga en el capacitor C_1 es q_1, mientras que la carga en C_2 es $q_1 - q_2$, se expresa que la suma de las diferencias de potencial en cada lazo es cero y se obtienen las siguientes ecuaciones

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = 0 \tag{19.60}$$

$$L_2\ddot{q}_2 + R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = E_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.61}$$

Es fácil verificar que las ecuaciones (19.60) y (19.61) se reducen a (19.58) y (19.59), respectivamente, cuando se efectúan las sustituciones indicadas en la tabla 19.2.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se formuló un modelo más realista de un sistema vibratorio al incluir el efecto del *amortiguamiento viscoso* provocado por la fricción fluida. El amortiguamiento viscoso se representó en la figura 19.10 mediante la fuerza ejercida sobre el cuerpo en movimiento por un émbolo que se mueve en el interior de un amortiguador. Esta fuerza es igual en magnitud a $c\dot{x}$, donde la constante c, expresada en N · s/m o lb · s/ft, se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso.* Téngase presente que es necesario utilizar la misma convención de signos para x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$.

1. Vibraciones libres amortiguadas. Se encontró que la ecuación diferencial que define este movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (19.38)$$

Para obtener la solución de esta ecuación, calcule el *coeficiente de amortiguamiento* crítico c_c utilizando la fórmula

$$c_c = 2m\sqrt{k/m} = 2m\omega_n \qquad (19.41)$$

donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema *no amortiguado.*

a) Si $c > c_c$ (sobreamortiguamiento), la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \qquad (19.42)$$

donde

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad (19.40)$$

y donde las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse a partir de condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio.

b) Si $c = c_c$ (amortiguamiento crítico), la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = (C_1 + C_2t)e^{-\omega_n t} \qquad (19.43)$$

que corresponde también a un movimiento no vibratorio.

c) Si $c < c_c$ (subamortiguamiento), la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = x_0e^{-(c/2m)t} \text{ sen } (\omega_d t + \phi) \qquad (19.46)$$

donde

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \qquad (19.45)$$

y donde x_0 y ϕ pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. Esta solución corresponde a oscilaciones de amplitud decreciente y de periodo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ (figura 19.11).

(*continúa*)

2. *Vibraciones forzadas amortiguadas.* Estas vibraciones ocurren cuando un sistema con amortiguamiento viscoso se somete a una fuerza periódica **P** de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$ o cuando está elásticamente conectado a un apoyo con un movimiento alternativo $\delta = \delta_m$ sen $\omega_f t$. En el primer caso el movimiento se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.47}$$

y en el segundo caso mediante una ecuación similar que se obtiene al reemplazar P_m con $k\delta_m$. Sólo interesa el movimiento de *estado estable* del sistema, el cual se define mediante una *solución particular* de estas ecuaciones, de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \text{ sen } (\omega_f t - \varphi) \tag{19.48}$$

donde

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \tag{19.53}$$

y

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.54}$$

La expresión dada en la ecuación (19.53) se conoce como *factor de amplificación* y se ha graficado en función de la razón de frecuencias ω_f/ω_n en la figura 19.12 para valores diferentes del factor de amortiguamiento c/c_c. En los problemas que siguen es posible que se le pida determinar uno de los parámetros de las ecuaciones (19.53) y (19.54) cuando se conocen los demás.

Problemas

19.127 Demuestre que en el caso de sobreamortiguamiento ($c > c_c$) un cuerpo nunca pasa por su posición de equilibrio O *a*) si se suelta sin velocidad inicial desde una posición arbitraria, o *b*) si empieza desde O con una velocidad inicial arbitraria.

19.128 Demuestre que en el caso de sobreamortiguamiento ($c > c_c$), un cuerpo que se suelta desde una posición arbitraria con una velocidad inicial arbitraria no puede pasar más de una vez por su posición de equilibrio.

19.129 En el caso de subamortiguamiento, los desplazamientos x_1, x_2, x_3, que se muestran en la figura 19.11 pueden suponerse iguales a los desplazamientos máximos. Demuestre que la razón de dos desplazamientos máximos sucesivos x_n y x_{n+1} es constante y que el logaritmo natural de este cociente, denominado *decremento logarítmico*, es

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi(c/c_c)}{\sqrt{1-(c/c_c)^2}}$$

19.130 En la práctica muchas veces es difícil determinar el decremento logarítmico de un sistema con subamortiguamiento como el definido en el problema 19.129 mediante dos desplazamientos máximos sucesivos. Demuestre que el decremento logarítmico puede también expresarse como (1/k) $\ln(x_n/x_{n+k})$, donde k es el número de ciclos entre lecturas de desplazamiento máximo.

19.131 En un sistema con subamortiguamiento ($c < c_c$), el periodo de vibración se define comúnmente como el intervalo de tiempo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ correspondiente a dos puntos sucesivos donde la curva desplazamiento-tiempo toca una de las curvas límite que se muestran en la figura 19.11. Demuestre que el intervalo de tiempo *a*) entre un desplazamiento positivo máximo y el siguiente desplazamiento negativo es $\frac{1}{2}\tau_d$, *b*) entre dos desplazamientos cero sucesivos es $\frac{1}{2}\tau_d$, *c*) entre un desplazamiento máximo positivo y el siguiente desplazamiento cero es mayor que $\frac{1}{4}\tau_d$.

19.132 El bloque mostrado se baja 1.2 in. desde su posición de equilibrio y se suelta. Si se sabe que después de 10 ciclos el desplazamiento máximo del bloque es 0.5 in., determine *a*) el factor de amortiguamiento c/c_c, *b*) el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso. (*Sugerencia*: Vea los problemas 19.129 y 19.130.)

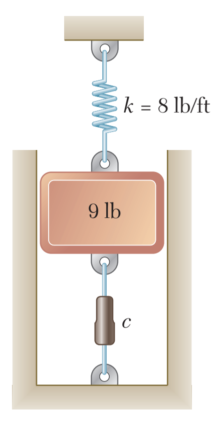


Figura P19.132

19.133 Un vagón de ferrocarril cargado que pesa 30 000 lb rueda a una velocidad constante $\mathbf{v}_0$ cuando se acopla con un sistema de resorte y amortiguador (figura 1). La curva de desplazamiento contra tiempo registrada para el vagón de ferrocarril después del acoplamiento es como se muestra en la figura 2. Determine *a*) la constante de amortiguamiento, *b*) la constante de resorte. (*Sugerencia:* Utilice la definición de decremento logarítmico dada en el problema 19.129.)

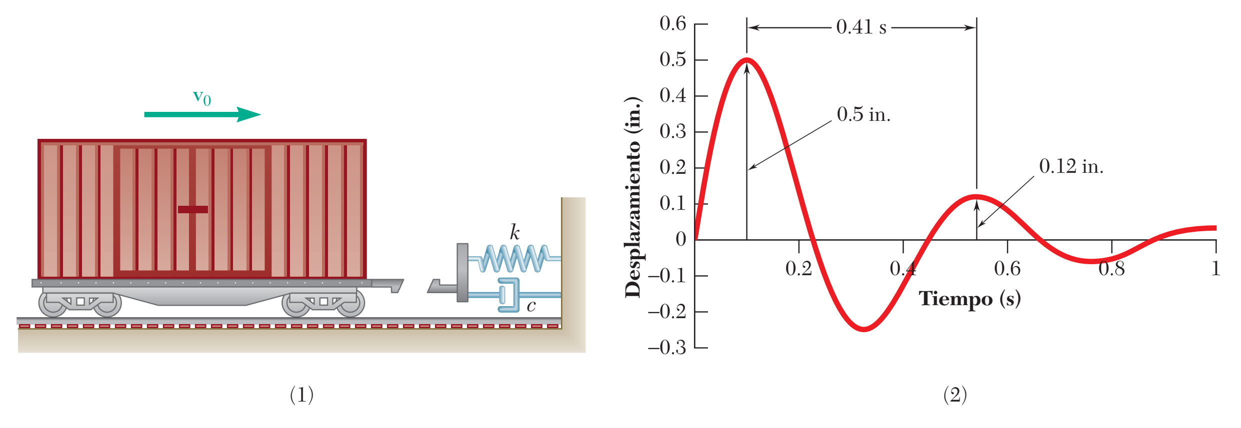


Figura P19.133

19.134 Un bloque de 4 kg se deja caer desde una altura de 800 mm sobre un bloque *B* de 9 kg que está en reposo. El bloque *B* está soportado por un resorte de constante k = 1 500 N/m y se encuentra unido a un amortiguador con coeficiente c = 230 N · s/m. Si se sabe que no hay rebote, determine la máxima distancia que se moverán los bloques después del impacto.

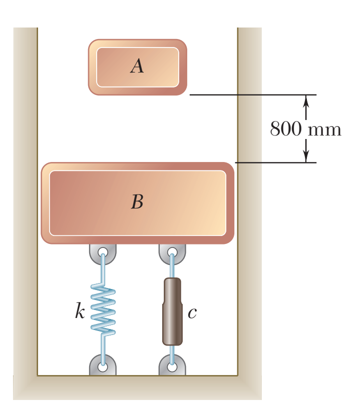


Figura P19.134

19.135 Retome el problema 19.134, y ahora suponga que el amortiguador tiene un coeficiente c = 300 N · s/m.

19.136 El barril de un cañón de campaña pesa 1 500 lb y regresa a la posición de disparo después de retroceder mediante un recuperador de constante c = 1 100 lb · s/ft. Determine *a*) la constante k que debe utilizarse para que el recuperador regrese el barril a la posición de disparo en el tiempo más corto posible sin ninguna oscilación, *b*) el tiempo necesario para que el barril retroceda dos tercios del trayecto desde su posición de retroceso máximo hasta la posición de disparo.

19.137 Una barra uniforme de masa m se sostiene por medio de un pasador en A y un resorte de constante k en B y se conecta en D a un amortiguador de coeficiente de amortiguamiento c. Determine en términos de m, k y c, para pequeñas oscilaciones, *a*) la ecuación diferencial de movimiento, *b*) el coeficiente de amortiguamiento crítico c_c.

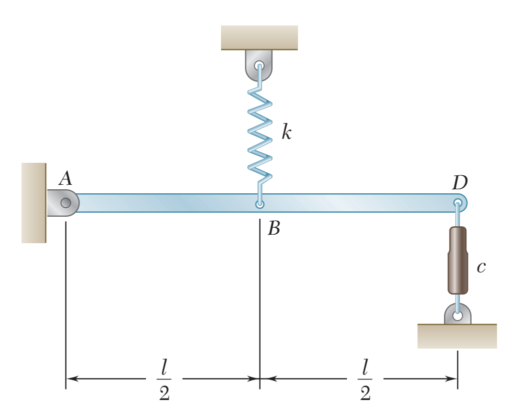


Figura P19.137

19.138 Una barra uniforme de 4 lb se sostiene mediante un pasador en O y un resorte en A y se conecta a un amortiguador en B. Determine *a*) la ecuación diferencial de movimiento para pequeñas oscilaciones, *b*) el ángulo que formará la barra con la horizontal 5 s después de que el extremo B se empuja 0.9 in. hacia abajo y se suelta.

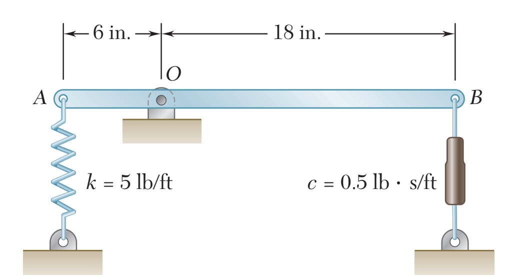


Figura *P19.138*

19.139 Un elemento de máquina de 1 100 lb se sostiene mediante dos resortes, cada uno de constante igual a 3 000 lb/ft. Una fuerza periódica de 30 lb de amplitud se aplica al elemento con una frecuencia de 2.8 Hz. Si el coeficiente de amortiguamiento es de 110 lb · s/ft, determine la amplitud de la vibración de estado estable del elemento.

19.140 En el problema 19.139, determine el valor requerido de la constante de cada resorte si la amplitud de la vibración de estado estable es 0.05 in.

19.141 En el caso de la vibración forzada de un sistema, determine el intervalo de valores del factor de amortiguamiento c/c_c para el cual el factor de amplificación decrecerá siempre y cuando aumente la razón de frecuencias ω_f/ω_n.

19.142 Demuestre que para un pequeño valor del factor de amortiguamiento c/c_c, la amplitud máxima de una vibración forzada ocurre cuando $\omega_f \approx \omega_n$ y que el valor correspondiente del factor de amplificación es $\frac{1}{2}(c/c_c)$.

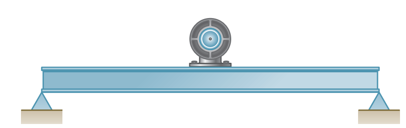


Figura P19.143

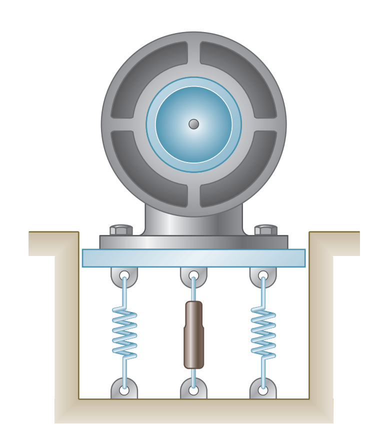


Figura P19.44 y P19.145

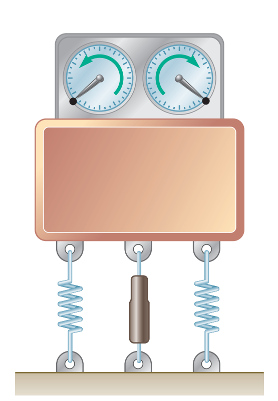


Figura P19.46

19.143 Un motor de 50 kg se atornilla directamente a una viga horizontal ligera que tiene una deflexión estática de 6 mm debido al peso del motor. El desbalance del rotor es equivalente a una masa de 100 g ubicada a 75 mm del eje de rotación. Si la amplitud de la vibración del motor es de 0.8 mm a una velocidad de 400 rpm, determine *a*) el factor de amortiguamiento c/c_c, *b*) el coeficiente de amortiguamiento c.

19.144 Un motor de 15 kg se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno de constante igual a 45 kN/m. El desbalance del motor es equivalente a una masa de 20 g ubicada a 125 mm del eje de rotación. Si el motor está restringido a un movimiento vertical, determine la amplitud de la vibración del estado estable del motor a una velocidad de 1 500 rpm, suponiendo *a*) que no se presenta amortiguamiento, *b*) que el factor de amortiguamiento c/c_c es igual a 1.3.

19.145 Un motor de 100 kg se sostiene por medio de cuatro resortes, cada uno de constante igual a 90 kN/m, y se conecta al suelo mediante un amortiguador que tiene un coeficiente de amortiguamiento $c = 6\,500$ N · s/m. El motor está restringido a moverse verticalmente, y se observa que la amplitud de su movimiento es de 2.1 mm a una velocidad de 1 200 rpm. Si la masa del rotor es de 15 kg, determine la distancia entre el centro de masa del rotor y el eje de la flecha.

19.146 Un excitador de masas excéntricas con contragiro, el cual consiste en dos masas giratorias de 400 g que describen círculos de 150 mm de radio a la misma velocidad pero en sentidos opuestos, se coloca sobre un elemento de máquina para inducir una vibración de estado estable al elemento y determinar algunas de sus características dinámicas. A una velocidad de 1 200 rpm, un estroboscopio muestra que las masas excéntricas están exactamente debajo de sus respectivos ejes de rotación y que el elemento está pasando por su posición de equilibrio estático. Si la amplitud del movimiento del elemento a esa velocidad es de 15 mm y la masa total del sistema es de 140 kg, determine *a*) la constante de resorte k combinada, *b*) el factor de amortiguamiento c/c_c.

19.147 En la figura se muestra el modelo simplificado de una lavadora. Un bulto de ropa mojada forma una masa m_b de 10 kg dentro de la máquina y ocasiona un desbalance giratorio. La masa giratoria es de 20 kg (incluyendo a m_b) y el radio e de la canasta de la lavadora es de 25 cm. Si la lavadora tiene una constante de resorte equivalente a $k = 1\,000$ N/m y una razón de amortiguamiento $\zeta = c/c_c = 0.05$ y durante el ciclo de giro el tambor rota a 250 rpm, determine la amplitud del movimiento y la magnitud de la fuerza transmitida a los lados de la lavadora.

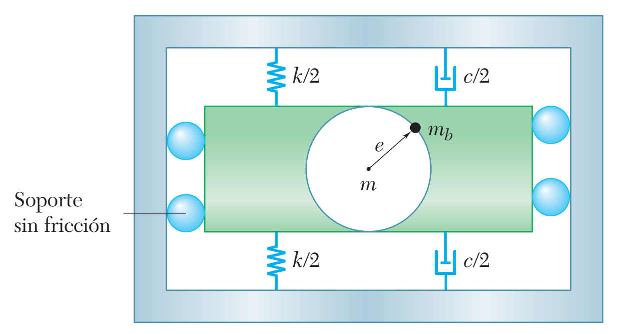


Figura P19.147

19.148 Un elemento de máquina se sostiene mediante resortes y se conecta a un amortiguador como se muestra. Demuestre que si se aplica una fuerza periódica $P = P_m \text{ sen } \omega_f t$ al elemento, la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base es

$$F_m = P_m \sqrt{\frac{1 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}}$$

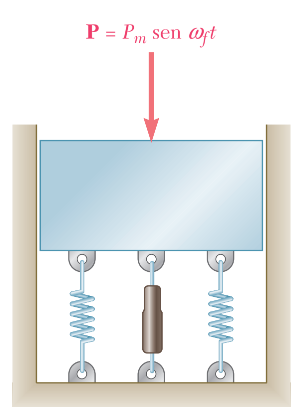


Figura *P19.148* y P19.49

19.149 Un elemento de máquina de 200 lb sostenido por cuatro resortes, cada uno de constante $k = 12$ lb/ft, está sujeto a una fuerza periódica de 0.8 Hz de frecuencia y 20 lb de amplitud. Determine la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base si *a*) un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento $c = 25$ lb · s/ft se conecta a la máquina y al suelo, *b*) se quita el amortiguador.

***19.150** Para una vibración de estado estable con amortiguamiento bajo la acción de una fuerza armónica, demuestre que la energía mecánica que el amortiguador disipa por ciclo es $E = \pi c x_m^2 \omega_f$, donde c es el coeficiente de amortiguamiento, x_m es la amplitud del movimiento y ω_f es la frecuencia circular de la fuerza armónica.

***19.151** La suspensión de un automóvil puede aproximarse mediante el sistema simplificado resorte-amortiguador que se muestra. *a*) Escriba la ecuación diferencial que define al desplazamiento vertical de la masa m cuando el sistema se mueve a una velocidad v sobre un camino con una sección transversal senoidal de amplitud δ_m y longitud de onda L. *b*) Derive una expresión para la amplitud del desplazamiento vertical de la masa m.

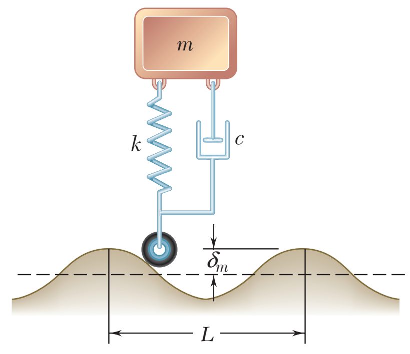


Figura P19.151

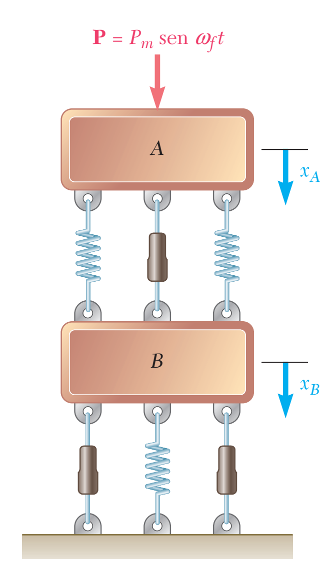


Figura *P19.152*

***19.152** Dos bloques A y B, cada uno de masa m, están soportados como se muestra mediante tres resortes de la misma constante k. Los bloques A y B se conectan mediante un amortiguador y el bloque B está unido al suelo utilizando dos amortiguadores, cada uno de ellos con el mismo coeficiente de amortiguamiento c. El bloque A está sometido a una fuerza de magnitud $P = P_m \text{ sen } \omega_f t$. Escriba las ecuaciones diferenciales que definen los desplazamientos x_A y x_B de los dos bloques desde sus posiciones de equilibrio.

19.153 Exprese en términos de L, C y E el intervalo de valores de la resistencia R para los cuales ocurrirán oscilaciones en el circuito mostrado cuando se cierra el interruptor S.

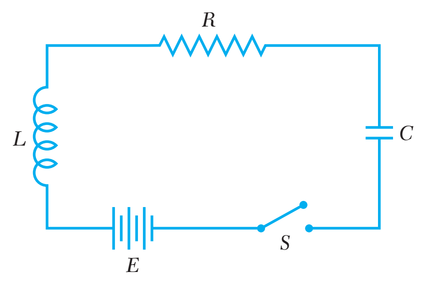


Figura P19.153

19.154 Considere el circuito del problema 19.153 cuando se retira el capacitor C. Si el interruptor S se cierra en el tiempo $t = 0$, determine *a*) el valor final de la corriente en el circuito, *b*) el tiempo t en el cual la corriente habrá llegado a $(1 - 1/e)$ veces su valor final. (El valor deseado de t se conoce como la *constante de tiempo* del circuito.)

19.155 y 19.156 Trace el análogo eléctrico del sistema mecánico que se muestra. (*Sugerencia:* Trace los circuitos correspondientes a los cuerpos libres m y A.)

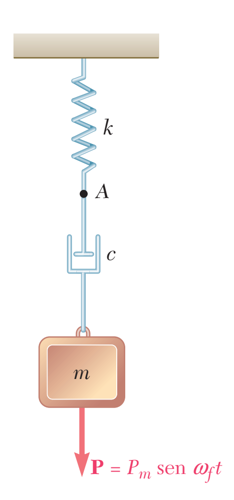


Figura P19.155 y P19.157

19.157 y *19.158* Escriba las ecuaciones diferenciales que definen *a*) los desplazamientos de la masa m y del punto A, *b*) las cargas en los capacitores del análogo eléctrico.

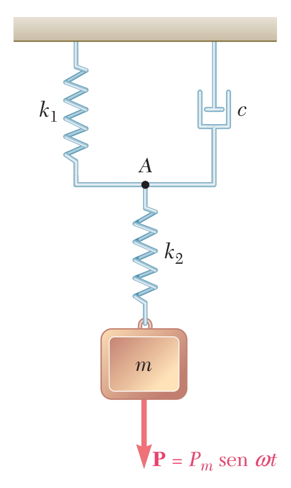


Figura P19.156 y *P19.158*

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 19

Este capítulo se dedicó al estudio de las *vibraciones mecánicas*, esto es, al análisis de movimiento de partículas y cuerpos rígidos que oscilan en torno a una posición de equilibrio. En la primera parte del capítulo [secciones 19.2 a 19.7] se consideraron *vibraciones sin amortiguamiento*, mientras que en la segunda parte se trataron las *vibraciones amortiguadas* [secciones 19.8 a 19.10].

Vibraciones libres de una partícula

En la sección 19.2 se consideraron las *vibraciones libres de una partícula*, esto es, el movimiento de una partícula P sujeta a una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento de la partícula —como la fuerza ejercida por un resorte—. Si el desplazamiento x de la partícula P se mide desde su posición de equilibrio O (figura 19.17), la resultante **F** de las fuerzas que actúan sobre P (incluyendo su peso) tiene una magnitud kx y está dirigida a O. Al aplicar la segunda ley de Newton $F = ma$ y al recordar que $a = \ddot{x}$, se escribe la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (19.2)$$

o, con $\omega_n^2 = k/m$,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (19.6)$$

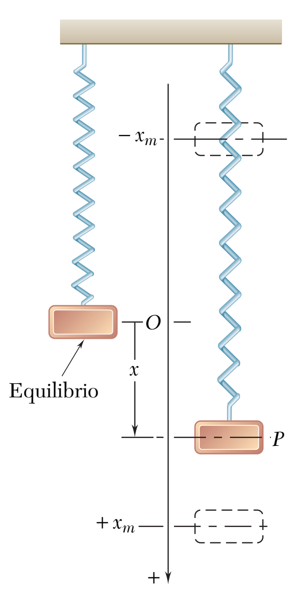


Figura 19.17

El movimiento definido por esta ecuación recibe el nombre de *movimiento armónico simple.*

La solución de la ecuación (19.6), que representa el desplazamiento de la partícula P, se expresó como

$$x = x_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \qquad (19.10)$$

donde x_m = amplitud de la vibración

$\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frecuencia circular natural

ϕ = ángulo de fase

El *periodo de vibración* (esto es, el tiempo requerido para un ciclo completo) y su *frecuencia natural* (esto es, el número de ciclos por segundo) se expresaron como

$$\text{Periodo} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad (19.13)$$

$$\text{Frecuencia natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad (19.14)$$

La velocidad y aceleración de la partícula se obtuvieron al diferenciar la ecuación (19.10), y se encontró que los valores máximos son

$$v_m = x_m\omega_n \qquad a_m = x_m\omega_n^2 \qquad (19.15)$$

Puesto que todos los parámetros anteriores dependen de manera directa de la frecuencia circular natural ω_n y, por ello, el cociente k/m, resulta esencial en cualquier problema dado calcular el valor de la constante k; esto puede realizarse determinando la relación entre la fuerza restauradora y el desplazamiento correspondiente de la partícula [problema resuelto 19.1].

También se demostró que el movimiento oscilatorio de la partícula P puede representarse mediante la proyección sobre el eje x del movimiento de un punto Q que describe un círculo auxiliar de radio x_m con la velocidad angular ω_n (figura 19.18). Los valores instantáneos de la velocidad y la aceleración de P se obtienen entonces proyectando sobre el eje x los vectores $\mathbf{v}_m$ y $\mathbf{a}_m$ que representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de Q.

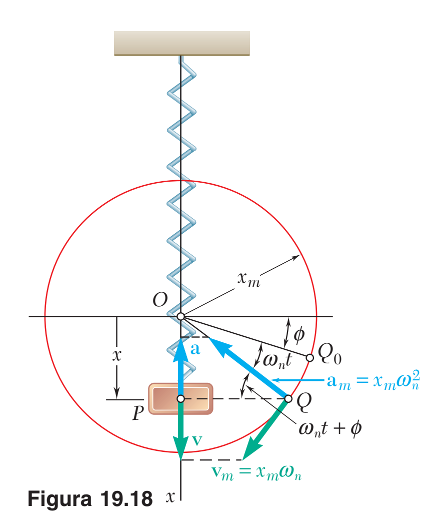


Figura 19.18

Péndulo simple

Si bien el movimiento de un *péndulo simple* no es verdaderamente un movimiento armónico simple, las fórmulas dadas antes pueden utilizarse con $\omega_n^2 = g/l$ para calcular el periodo y la frecuencia natural de las *pequeñas oscilaciones* de un péndulo simple [sección 19.31]. Las oscilaciones de gran amplitud de un péndulo simple se analizaron en la sección 19.4.

Vibraciones libres de un cuerpo rígido

Las *vibraciones libres de un cuerpo rígido* se analizan eligiendo una variable apropiada, con una distancia x o un ángulo θ, para definir las posiciones del cuerpo, dibujando una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar la equivalencia de las fuerzas externas y efectivas, y escribiendo una ecuación que relaciona la variable elegida y su segunda derivada [sección 19.5]. Si la ecuación que se obtiene es de la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \text{o} \qquad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \qquad (19.21)$$

la vibración considerada es un movimiento armónico simple y su periodo y frecuencia natural se obtienen *identificando* ω_n y sustituyendo su valor en las ecuaciones (19.13) y (19.14) [problemas resueltos 19.2 y 19.3].

Empleo del principio de la conservación de la energía

El *principio de conservación de la energía* puede utilizarse como un método alternativo para la determinación del periodo y frecuencia natural del movimiento armónico simple de una partícula o cuerpo rígido [sección 19.6]. Eligiendo de nuevo una variable apropiada, como θ, para definir la posición del sistema, se expresa que la energía total del sistema se conserva, $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, entre la posición de desplazamiento máximo ($\theta_1 = \theta_m$) y la posición de velocidad máxima ($\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_m$). Si el movimiento considerado es armónico simple, los dos miembros de la ecuación obtenida consiste en expresiones cuadráticas homogéneas en θ_m y $\dot{\theta}_m$, respectivamente.† Sustituyendo $\dot{\theta}_m = \theta_m \omega_n$ en esta ecuación, podemos sacar como factor θ_m^2 y resolver para la frecuencia circular ω_n [problema resuelto 19.4].

Vibraciones forzadas

En la sección 19.7 se consideraron las *vibraciones forzadas* de un sistema mecánico. Esas vibraciones ocurren cuando el sistema se somete a una fuerza periódica (figura 19.19) o cuando está conectado elásticamente a un apoyo que tiene un movimiento alternante (figura 19.20). Denotando por ω_f la frecuencia circular forzada, se encontró que en el primer caso, el movimiento del sisterna se definió por medio de la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.30)$$

y que en el segundo caso se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.31)$$

La solución general de estas ecuaciones se obtuvo al sumar una solución particular de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.32)$$

†Si el movimiento considerado sólo puede *aproximarse* por medio de un movimiento armónico simple, como para las pequeñas oscilaciones de un cuerpo bajo la acción de la gravedad, la energía potencial debe aproximarse mediante una expresión cuadrática en θ_m.

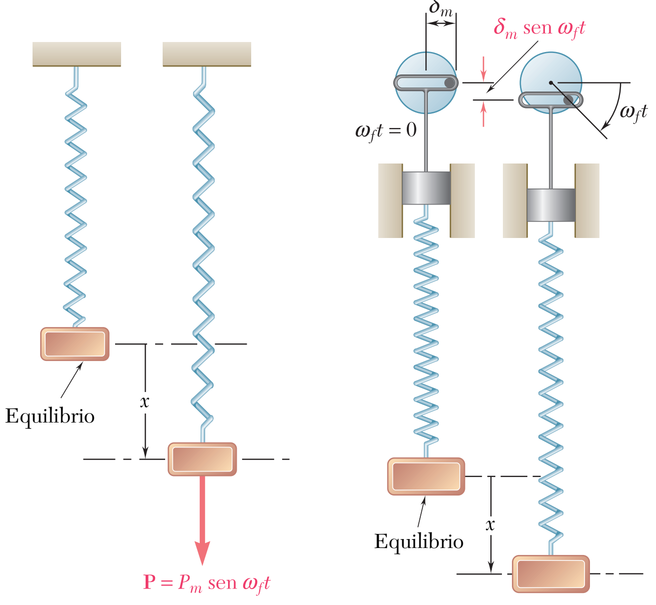


Figura 19.19

Figura 19.20

a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. La solución particular (19.32) representa una *vibración de estado estable* del sistema, mientras que la solución de la ecuación homogénea representa una *vibración libre transitoria* que por lo general puede ignorarse.

Al dividir la amplitud x_m de la vibración de estado estable por P_m/k en el caso de una fuerza periódica, o por δ_m en el caso de un apoyo oscilante, se define el *factor de amplificación* de la vibración y se encuentra que

$$\text{Factor de amplificación} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.36)$$

De acuerdo con la ecuación (19.36), la amplitud x_m de la vibración forzada *se vuelve infinita cuando* $\omega_f = \omega_n$, esto es *cuando la frecuencia forzada es igual a la frecuencia natural del sistema.* Se dice en ese caso que la fuerza aplicada o el movimiento del apoyo aplicado están en *resonancia* con el sistema [problema resuelto 19.5]. En realidad la amplitud de la vibración se muestra finita, debido a las fuerzas amortiguadas.

Vibraciones libres amortiguadas

En la última parte del capítulo se consideraron las *vibraciones amortiguadas* de un sistema mecánico. Primero se analizaron las *vibraciones libres amortiguadas* de un sistema con *amortiguamiento viscoso* [sección 19.8]. Se encontró que el movimiento de un sistema de este tipo se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19.38)$$

donde c es una constante llamada el *coeficiente de amortiguamiento viscoso*. Al definir el *coeficiente de amortiguamiento crítico* c_c como

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \qquad (19.41)$$

donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema en ausencia de amortiguamiento, se distinguieron tres casos de amortiguamiento diferentes, a saber, (1) *sobreamortiguamiento,* cuando $c > c_c$; (2) *amortiguamiento crítico,* cuando $c = c_c$, y (3) *subamortiguamiento,* cuando $c < c_c$. En los primeros dos casos, cuando el sistema se perturba tiende a recobrar su posición de equilibrio sin ninguna oscilación. En el tercer caso, el movimiento es vibratorio con amplitud decreciente.

Vibraciones forzadas amortiguadas

En la sección 19.9 se consideraron las *vibraciones forzadas amortiguadas* de un sistema mecánico. Estas vibraciones ocurren cuando un sistema con amortiguamiento viscoso está sujeto a una fuerza periódica **P** de magnitud $P = P_m$ sen $\omega_f t$ o cuando se conecta elásticamente a un apoyo con un movimiento alternante $\delta = \delta_m$ sen $\omega_f t$. En el primer caso, el movimiento del sistema se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.47)$$

y en el segundo caso por medio de una ecuación similar que se obtuvo al sustituir P_m de $k\delta_m$ en (19.47).

La *vibración de estado estable* del sistema se representa mediante una solución particular de la ecuación (19.47) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \text{ sen } (\omega_f t - \varphi) \qquad (19.48)$$

Al dividir la amplitud x_m de la vibración de estado estable entre P_m/k en el caso de una fuerza periódica, o por δ_m en el caso de un apoyo oscilante, se obtuvo la siguiente expresión para el factor de amplificación

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \qquad (19.53)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frecuencia circular natural del sistema no amortiguado

$c_c = 2m\omega_n$ = coeficiente de amortiguamiento crítico

c/c_c = factor de amortiguamiento

También se encontró que la *diferencia de fase* φ entre la fuerza o el movimiento del apoyo aplicados y la vibración resultante de estado estable del sistema amortiguado se definía por medio de la relación

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \qquad (19.54)$$

Analogías eléctricas

El capítulo finalizó con un análisis de *analogías eléctricas* [sección 19.10], en el cual se demostró que las vibraciones de los sistemas mecánicos y las oscilaciones de los circuitos eléctricos están definidas por las mismas ecuaciones diferenciales. Las analogías eléctricas de sistemas mecánicos pueden entonces utilizarse para estudiar o predecir el comportamiento de estos sistemas.

Problemas de repaso

19.159 Una placa delgada y cuadrada de lado a puede oscilar alrededor de un eje AB localizado a una distancia b de su centro de masa G. *a*) Determine el periodo de pequeñas oscilaciones si $b = \frac{1}{2}a$. *b*) Determine un segundo valor de b para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es el mismo que el que se encontró en el inciso *a*).

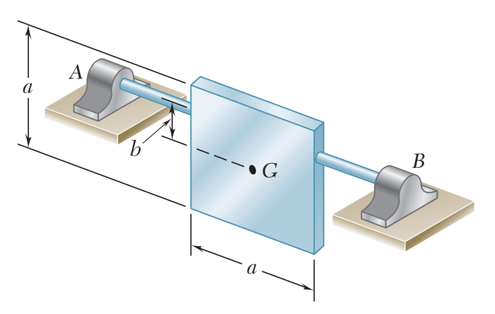


Figura P19.159

19.160 Un electroimán de 150 kg se encuentra en reposo y sostiene 100 kg de pedacería de acero cuando se corta la corriente y el acero se cae. Si el cable y la grúa de soporte tienen una rigidez equivalente a un resorte con constante igual a 200 kN/m, determine *a*) la frecuencia, la amplitud y la velocidad máxima del movimiento resultante, *b*) la tensión mínima que ocurrirá en el cable durante el movimiento, *c*) la velocidad del imán 0.03 s después de cortar la corriente.

Figura P19.160

19.161 Los discos A y B pesan 30 y 12 lb, respectivamente, y un pequeño bloque C está unido al borde del disco B. Si se supone que no ocurre deslizamiento entre los discos, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

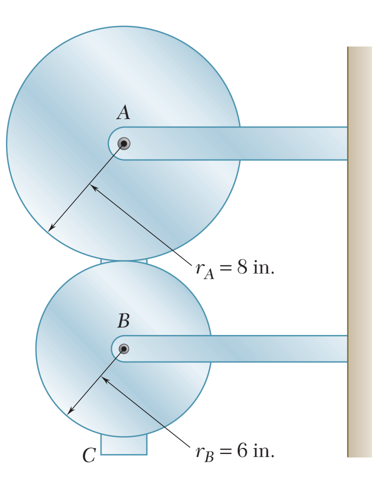


Figura P19.161

19.162 Se observa un periodo de 6.00 s para las oscilaciones angulares de un rotor de giroscopio de 4 oz. suspendido de un alambre como se muestra en la figura. Si se sabe que al suspender una esfera de acero con 1.25 in. de diámetro en la misma forma se obtiene un periodo de 3.80 s, determine el radio de giro centroidal del rotor. (Peso específico del acero = 490 lb/ft^3.)

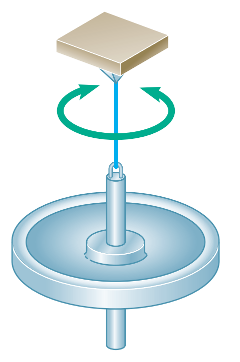


Figura *P19.162*

19.163 Un bloque *B* de 1.5 kg está conectado mediante una cuerda a un bloque *A* de 2 kg, el cual está suspendido de un resorte con constante igual a 3 kN/m. Si el sistema se encuentra en reposo al cortar la cuerda, determine *a*) la frecuencia, la amplitud y la velocidad máxima del movimiento resultante, *b*) la tensión mínima que ocurrirá en el resorte durante el movimiento, *c*) la velocidad del bloque *A* 0.3 s después de cortar la cuerda.

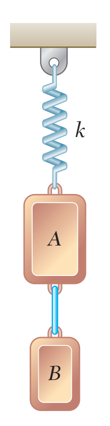


Figura P19.163

19.164 Dos barras, cada una con masa *m* y longitud *L*, se sueldan entre sí para formar el ensamble mostrado. Determine *a*) la distancia *b* para la cual la frecuencia de pequeñas oscilaciones del ensamble es máxima, *b*) la frecuencia máxima correspondiente.

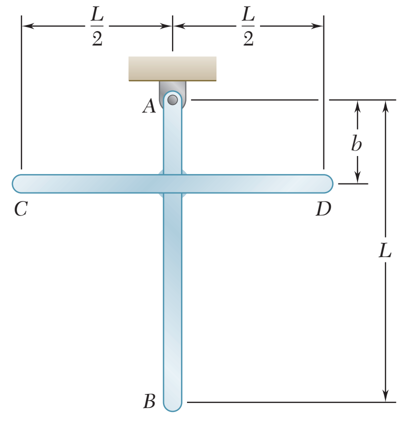


Figura P19.164

19.165 Conforme la velocidad de giro de un motor soportado por resortes se incrementa lentamente de 200 a 500 rpm, se observa que la amplitud de la vibración debida al desbalance del rotor disminuye de manera estable de 8 a 2.5 mm. Determine *a*) la velocidad a la cual ocurrirá la resonancia, *b*) la amplitud de la vibración de estado estable a una velocidad de 100 rpm.

19.166 El compresor mostrado tiene una masa de 250 kg y opera a 2 000 rpm. Con esta condición de operación ocurre una vibración indeseable cuando el compresor está unido directamente al suelo. Para reducir la vibración del piso de concreto que descansa sobre suelo de arcilla, se propone aislar el compresor al montarlo sobre un bloque cuadrado de concreto separado del resto del piso como se muestra en la figura. La densidad del concreto es de 2 400 kg/m^3 y se ha encontrado que la constante de resorte para el suelo es 80×10^6 N/m. La geometría del compresor conduce a elegir un bloque de 1.5 m por 1.5 m. Determine la profundidad h que reducirá la fuerza transmitida al suelo en 75%.

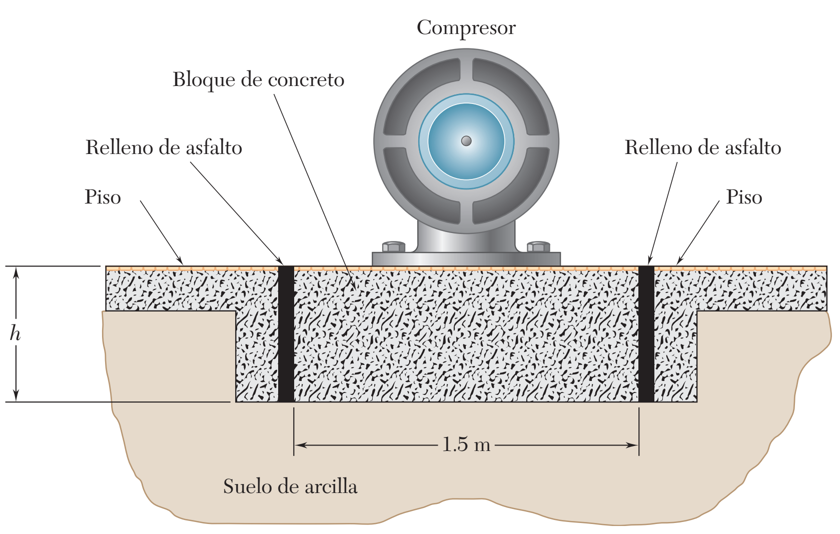


Figura P19.166

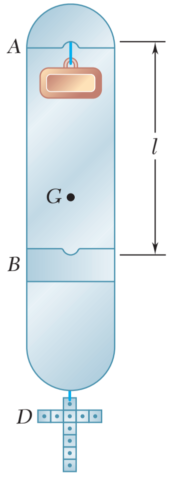


Figura P19.167

19.167 Ya sea que se utilice un péndulo simple o uno compuesto para determinar experimentalmente la aceleración de la gravedad g, siempre se presentan dificultades. En el caso del péndulo simple, la cuerda en realidad sí tiene peso, mientras que en el caso del péndulo compuesto es difícil establecer la localización exacta del centro de masa. En el caso de un péndulo compuesto, la dificultad se puede eliminar empleando un péndulo reversible o Kater. Dos filos de cuchillo A y B se colocan de manera que claramente no estén a la misma distancia del centro de masa G, y se mide la distancia l con gran precisión. Después se ajusta la posición de un contrapeso D de manera que el periodo de oscilación τ sea el mismo con cualquier filo de cuchillo que se use. Demuestre que el periodo τ obtenido es igual al de un péndulo simple verdadero de longitud l y que $g = 4\pi^2 l/\tau^2$.

19.168 Un motor de 400 kg soportado por cuatro resortes, cada uno de constante igual a 150 kN/m, está restringido a moverse verticalmente. Si el desbalance del motor es equivalente a una masa de 23 g ubicada a una distancia de 100 mm del eje de rotación, determine para una velocidad de 800 rpm *a*) la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida al cimiento, *b*) la amplitud del movimiento vertical del motor.

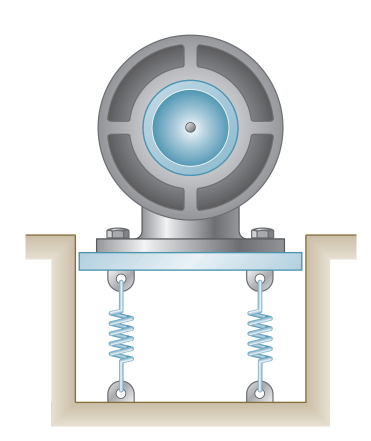


Figura *P19.168*

19.169 Retome el problema 19.168, y ahora suponga que se introduce un amortiguador de constante $c = 6\,500$ N · s/m entre el motor y el suelo.

19.170 Una pequeña pelota de masa m unida al punto medio de una cuerda elástica muy estirada de longitud l puede deslizarse sobre un plano horizontal. A la pelota se le da un pequeño deslizamiento en una dirección perpendicular a la cuerda y se suelta. Si se supone que la tensión T en la cuerda permanece constante, *a*) escriba la ecuación diferencial del movimiento de la pelota, *b*) determine el periodo de vibración.

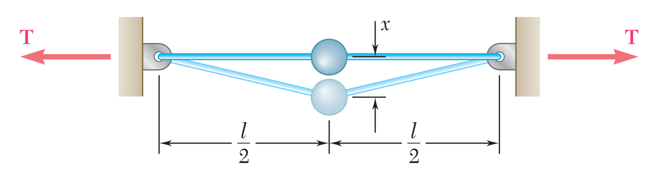


Figura P19.170

Problemas de computadora

19.C1 Al expandir el integrando de la ecuación (19.19) en una serie de potencias pares de sen ϕ para después integrar, se puede demostrar que el periodo de un péndulo simple de longitud l puede aproximarse mediante la expresión

$$\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 c^6 + \cdots\right]$$

donde $c = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta_m$ y θ_m es la amplitud de las oscilaciones. Utilice software para calcular la suma de la serie entre corchetes, usando de manera sucesiva los términos 1, 2, 4, 8 y 16, para valores de θ_m desde 30 hasta 120° con incrementos de 30°.

19.C2 La ecuación fuerza-deflexión para una clase de resortes no lineales fijos en un extremo es $F = 5x^{1/n}$ donde F es la magnitud, expresada en newtons, de la fuerza aplicada en el otro extremo del resorte y x es la deflexión expresada en metros. Si un bloque de masa m se suspende del resorte y se le da un pequeño desplazamiento hacia abajo a partir de su posición de equilibrio, utilice software para calcular y graficar la frecuencia de vibración del bloque para valores de m igual a 0.2, 0.6 y 1.0 kg y para valores de n de 1 a 2. Suponga que la pendiente de la curva fuerza-deformación en el punto correspondiente a $F = mg$ puede utilizarse como una constante de resorte equivalente.

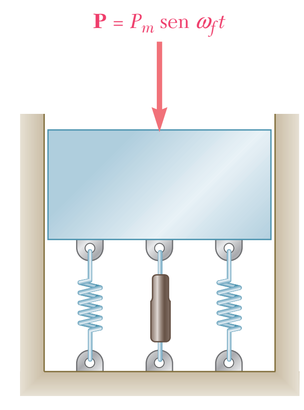


Figura P19.C3

19.C3 Un elemento de máquina sostenido por resortes y conectado a un amortiguador se somete a una fuerza periódica de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$. La transmisibilidad T_m del sistema se define como la razón F_m/P_m del valor máximo F_m de la fuerza periódica fluctuante transmitida a la base sobre el valor máximo P_m de la fuerza periódica aplicada al elemento de máquina. Utilice software para calcular y graficar el valor de T_m para razones de frecuencias ω_f/ω_n iguales a 0.8, 1.4 y 2.0 y para factores de amortiguamiento c/c_c iguales a 0, 1 y 2. (*Sugerencia:* Utilice la fórmula dada en el problema 19.148.)

19.C4 Un motor de 15 kg se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno con constante de 60 kN/m. El desbalance del motor es equivalente a una masa de 20 g localizada a 125 mm del eje de rotación. Si el motor está restringido a moverse verticalmente, use software para calcular y graficar la amplitud de la vibración y la máxima aceleración del motor para velocidades del motor de 1 000 a 2 500 rpm.

19.C5 Retome el problema 19.C4, y ahora suponga que se ha conectado un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento $c = 2.5$ kN · s/m a la base del motor y al suelo.

19.C6 Un pequeño remolque y su carga tienen una masa total de 250 kg. El remolque se sostiene por medio de dos resortes, cada uno de constante igual a 10 kN/m, y se jala sobre un camino, cuya superficie puede aproximarse por medio de una curva senoidal con una amplitud de 40 mm y una longitud de onda de 5 m (esto es, la distancia entre crestas sucesivas es de 5 m y la distancia vertical de cresta a seno es de 80 mm). *a*) Si se desprecia la masa de las ruedas y se supone que éstas permanecen en contacto con el suelo, use software para calcular y graficar la amplitud de la vibración y la aceleración vertical máxima del remolque para velocidades de 10 a 80 km/h. *b*) Determine el intervalo de valores de la velocidad del remolque para los cuales las ruedas perderán contacto con el suelo.

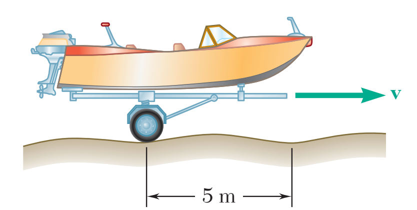


Figura P19.C6



APÉNDICE



Algunas definiciones y propiedades útiles del álgebra vectorial

En los capítulos 2 y 3 de *Mecánica vectorial para ingenieros: estática* se estudiaron de manera amplia las siguientes definiciones y propiedades del álgebra vectorial. Aquí se resumen por conveniencia para el lector, haciendo referencia a las secciones apropiadas del volumen de *Estática.* Los números de ecuación y de ilustración son los que se usaron en la presentación original.

A.1. SUMA DE VECTORES (SECCIONES 2.3 Y 2.4)

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud y dirección, las cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo*. Así, la suma de los vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores en el mismo punto *A* y construyendo un paralelogramo, utilizando **P** y **Q** como dos de los lados de éste (figura A.2). La diagonal que pasa por *A* representa la suma de los vectores **P** y **Q**, y esta suma se denota por medio de **P** + **Q**. La suma vectorial es *asociativa* y *conmutativa*.

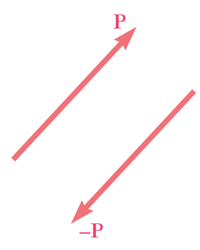


Figura A.1

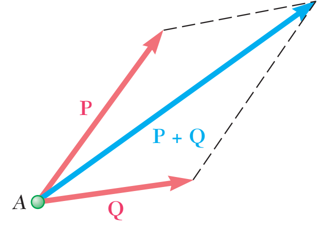


Figura A.2

El *vector negativo* de un vector dado **P** se define como el vector que tiene la misma magnitud *P* y la dirección opuesta a la de **P** (figura A.1); el negativo del vector **P** se denota por −**P**. Claramente, resulta

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

A.2. PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UN VECTOR (SECCIÓN 2.4)

El producto $k\mathbf{P}$ de un escalar k y un vector $\mathbf{P}$ se define como un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{P}$ (si k es positiva), o una dirección opuesta a la de $\mathbf{P}$ (si k es negativa), y una magnitud igual al producto de la magnitud de P y el valor absoluto de k (figura A.3).

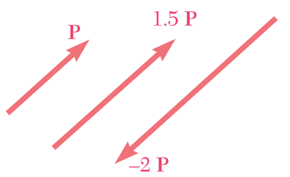


Figura A.3

A.3. VECTORES UNITARIOS, DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN COMPONENTES RECTANGULARES (SECCIONES 2.7 Y 2.12)

Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, denominados *vectores unitarios*, se definen como vectores de magnitud 1, dirigidos, respectivamente, a lo largo de los ejes x, y y z (figura A.4).

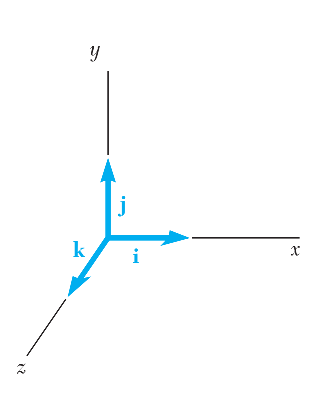


Figura A.4

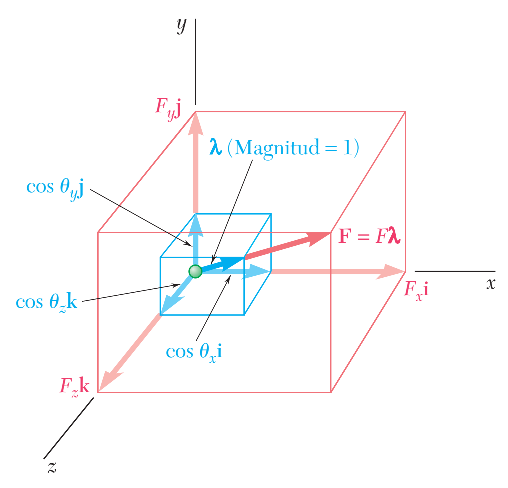


Figura A.5

Al denotar por F_x, F_y y F_z las componentes escalares del vector $\mathbf{F}$, se tiene (figura A.5)

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

En el caso particular de un vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ dirigido a lo largo de la línea que forman los ángulos θ_x, θ_y y θ_z con los ejes de coordenadas, se tiene

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k} \tag{2.22}$$

A.4. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES (SECCIONES 3.4 Y 3.5)

El producto vectorial, o *producto cruz*, de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se define como el vector

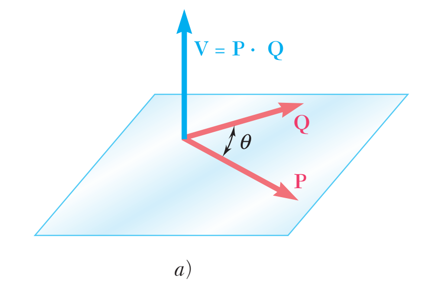
$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

que satisface las siguientes condiciones:

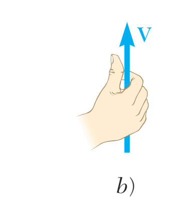
1. La línea de acción de **V** es perpendicular al plano que contiene a **P** y **Q** (figura A.6).
2. La magnitud de **V** es el producto de la magnitud de **P** y **Q** y del seno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (cuya medida siempre será 180° o menos); de tal modo se tiene

$$V = PQ \text{ sen } \theta \tag{3.1}$$

3. La dirección de **V** se obtiene de la *regla de la mano derecha.* Cierre su mano derecha y sosténgala de manera que sus dedos se curven en el mismo sentido que la rotación del ángulo θ que lleva al vector **P** en línea con el vector **Q**; su pulgar indicará en ese caso la dirección del vector **V** (figura A.6*b*). Hay que observar que si **P** y **Q** no tienen un punto de aplicación común, deben redibujarse primero a partir del mismo punto. Los tres vectores **P**, **Q** y **V** —tomados en ese orden— se dice que forman una *tríada derecha.*



a)



b)

Figura A.6

Los productos vectoriales son *distributivos* pero *no conmutativos.* Con lo que se tiene

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

Productos vectoriales de vectores unitarios. Se deduce de la definición del producto vectorial de dos vectores que

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \end{array} \tag{3.7}$$

Componentes rectangulares del producto vectorial. Al descomponer los vectores **P** y **Q** en componentes rectangulares, se obtienen las siguientes expresiones para los componentes de su producto vectorial **V**:

$$\begin{aligned} V_x &= P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y &= P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z &= P_xQ_y - P_yQ_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

En forma de determinante, se tiene

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

A.5. MOMENTO DE UNA FUERZA ALREDEDOR DE UN PUNTO (SECCIONES 3.6 Y 3.8)

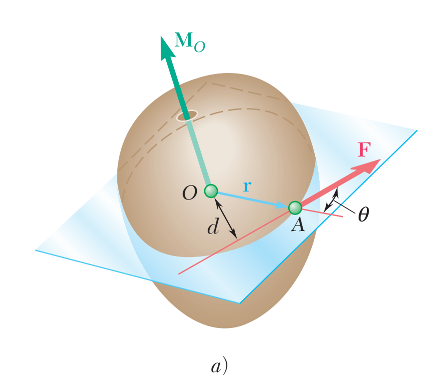
El momento de una fuerza **F** (o, de manera más general, de un vector **F**) alrededor de un punto O se define como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

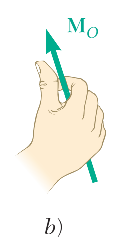
donde **r** denota al *vector de posición* del punto de aplicación A de **F** (figura A.7*a*).

De acuerdo con la definición del producto vectorial de dos vectores dada en la sección A.4, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene a O y la fuerza **F**. Su magnitud es igual a

$$M_O = rF \text{ sen } \theta = Fd \tag{3.12}$$



a)



b)

Figura A.7

donde d es la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$, y su sentido se define por medio del sentido de rotación que llevaría al vector $\mathbf{r}$ en línea con el vector $\mathbf{F}$; esta rotación debe apreciarla un observador ubicado en la punta de $\mathbf{M}_O$ *contraria al sentido de las manecillas del reloj.* Otra forma de definir el sentido de $\mathbf{M}_O$ la proporciona la variación de la *regla de la mano derecha:* se cierra la mano derecha y se sostiene de manera que los dedos se curven en el sentido de rotación que $\mathbf{F}$ impartiría a un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$; el pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$ (figura A.7*b*).

Componentes rectangulares del momento de una fuerza. Denotando por x, y y z las coordenadas del punto de aplicación A de $\mathbf{F}$, se obtienen las siguientes expresiones para las componentes del momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \qquad (3.18)$$

En forma de determinante, se tiene

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.19)$$

Para calcular el momento $\mathbf{M}_B$ alrededor de un punto arbitrario B de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A, se debe utilizar el vector $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ dibujado desde B hasta A en lugar del vector $\mathbf{r}$. Se escribe

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \qquad (3.20)$$

o, utilizar la forma de determinante,

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$, $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

A.6. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES (SECCIÓN 3.9)

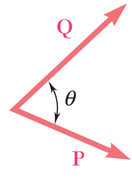


Figura A.8

El producto escalar, o *producto punto,* de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se define como el producto de las magnitudes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ del coseno del ángulo θ formado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura A.8). El producto escalar de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se denota mediante $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Se escribe

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \qquad (3.24)$$

Los productos escalares son *conmutativos* y *distributivos.*

Productos escalares de vectores unitarios. Se sigue de la definición de producto escalar de dos vectores que

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{aligned} \qquad (3.29)$$

Producto escalar expresado en términos de componentes rectangulares. Al descomponer los vectores **P** y **Q** en componentes rectangulares, se obtiene

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \qquad (3.30)$$

Ángulo formado por dos vectores. Se deduce de (3.24) y (3.29) que

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{PQ} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \qquad (3.32)$$

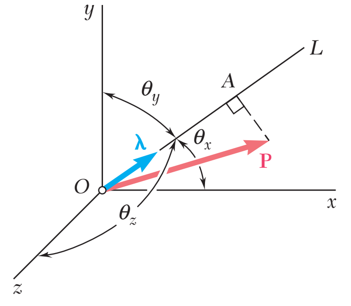


Figura A.9

Proyección de un vector sobre un eje determinado. La proyección de un vector **P** sobre el eje OL definido por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ (figura A.9) es

$$P_{OL} = OA = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \qquad (3.36)$$

A.7. TRIPLE PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES (SECCIÓN 3.10)

El triple producto mixto de tres vectores **S**, **P** y **Q** se define como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.38)$$

obtenido al formar el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q**. Los triples productos mixtos son invariantes bajo *permutaciones circulares*, pero cambian de signo bajo cualquier otra permutación:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S}) \qquad (3.39)\end{aligned}$$

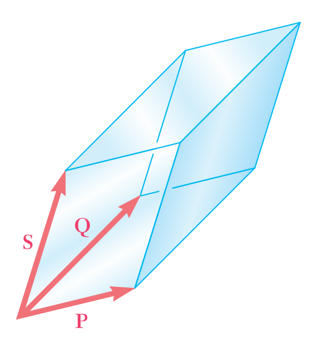


Figura A.10

Triple producto mixto expresado en términos de componentes rectangulares. El triple producto mixto de **S**, **P** y **Q** puede expresarse en la forma de un determinante

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \qquad (3.41)$$

El triple producto mixto $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ mide el volumen del paralelepípedo que tiene los vectores **S**, **P** y **Q** de lados (figura A.10).

A.8. MOMENTOS DE UNA FUERZA ALREDEDOR DE UN EJE DADO (SECCIÓN 3.11)

El momento M_{OL} de una fuerza **F** (o, de manera más general, de un vector **F**) alrededor de un eje OL se define como la proyección OC sobre el eje OL del momento $\mathbf{M}_O$ de **F** alrededor de O (figura A.11). Al denotar por $\boldsymbol{\lambda}$ el vector unitario a lo largo de OL, resulta

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \qquad (3.42)$$

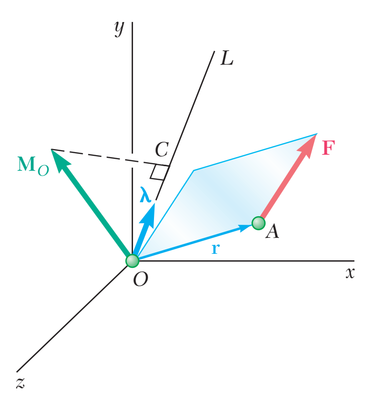


Figura A.11

o, en forma de determinante,

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de **F**
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

Los momentos de la fuerza **F** alrededor de tres ejes de coordenadas se dan mediante las expresiones (3.18) obtenidas antes para las componentes rectangulares del momento $\mathbf{M}_O$ de **F** alrededor de O:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

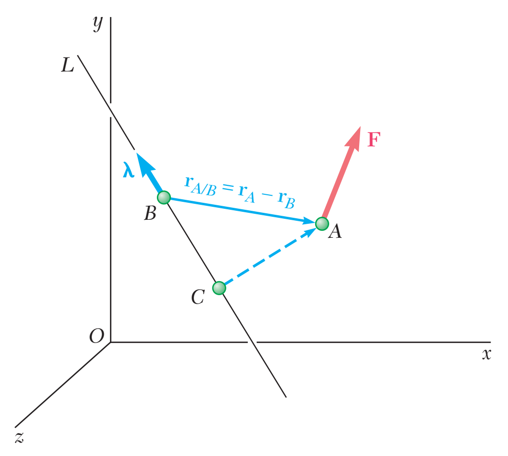


Figura A.12

De manera general, el momento de una fuerza **F** aplicada en A alrededor de un eje que no pasa por el origen se obtiene eligiendo un punto arbitrario B sobre el eje (figura A.12) y determinando la proyección sobre el eje BL del momento $\mathbf{M}_B$ de **F** alrededor de B. Se escribe

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector dibujado desde B hasta A. Al expresar M_{BL} en la fórmula de un determinante, se tiene

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje BL

$x_{A/B} = x_A - x_B, \; y_{A/B} = y_A - y_B, \; z_{A/B} = z_A - z_B$
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

Debe notarse que el resultado que se obtuvo es independiente de la elección del punto B sobre el eje dado; el mismo resultado se habría obtenido si el punto C se hubiera elegido en lugar de B.

A P É N D I C E

B

Momentos de inercia de masas

MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

B.1. MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA

Considérese una pequeña masa Δm montada sobre una barra de masa insignificante que puede girar libremente alrededor de un eje AA' (figura B.1*a*). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa, supuestas inicialmente en reposo, empezarán a girar alrededor de AA'. Los detalles de este movimiento se estudian después en dinámica. Por ahora sólo se quiere indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación determinada es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r. Por lo tanto, el producto $r^2\,\Delta m$ proporciona una medida de la *inercia* del sistema, esto es, una medida de la resistencia que el sistema ofrece cuando se intenta ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto $r^2\,\Delta m$ recibe el nombre de *momento de inercia* de la masa Δm con respecto al eje AA'.

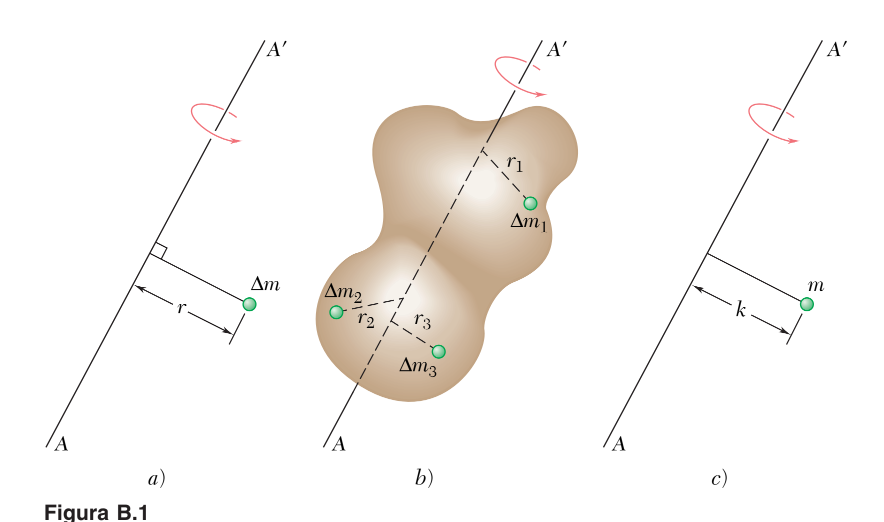


Figura B.1

Considérese ahora un cuerpo de masa m que girará alrededor de un eje AA' (figura B.1*b*). Al dividir el cuerpo en elementos de masa Δm_1, Δm_2, etc., se encuentra que la resistencia del cuerpo que se va a girar se mide por la suma $r_1^2\,\Delta m_1 + r_2^2\,\Delta m_2 + \cdots$. Esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA'. Al aumentar el número de elementos, se encuentra que el momento de inercia es igual, en el límite, a la integral

$$I = \int r^2\,dm \tag{B.1}$$

El *radio de giro k* del cuerpo con respecto al eje AA' se define mediante la relación

$$I = k^2 m \qquad \text{o} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{B.2}$$

El radio de giro k representa, en consecuencia, la distancia a la cual la masa completa del cuerpo debe concentrarse si el momento de inercia con respecto a AA' va a permanecer sin cambio (figura B.1*c*). Ya sea que conserve su forma original (figura B.1*b*) o si se concentra como se muestra en la figura B.1*c*, la masa m reaccionará de la misma manera a una rotación, o *giro*, alrededor de AA'.

Si se utilizan unidades del SI, el radio de giro k se expresa en metros y la masa m en kilogramos y, por ello, la unidad que se emplea para el momento de inercia de una masa es $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en slugs (esto es, $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$) y, por ello, la unidad derivada que se utiliza para el momento de inercia de una masa es $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.†

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje de coordenadas puede expresarse con facilidad en términos de las coordenadas x, y y z del elemento de masa dm (figura B.2). Al advertir, por ejemplo, que el cuadrado de la distancia r desde el elemento dm hasta el eje y es $z^2 + x^2$, se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

Es posible obtener expresiones similares para los momentos de inercia con respecto a los ejes x y z. Se escribe

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \tag{B.3}$$
$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

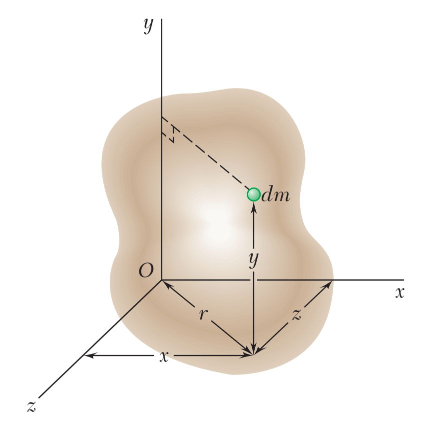


Figura B.2


Fotografía B.1 Como estudiará en su curso de dinámica, el comportamiento rotacional del cigüeñal que se muestra depende de su momento de inercia de masa con respecto a su eje de rotación.

†Debe tenerse presente cuando se convierte el momento de inercia de una masa de unidades de uso común en Estados Unidos a unidades del SI que la unidad fundamental *libra* utilizada en la unidad derivada $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ es una unidad de fuerza (*no* de masa) y debe, por lo tanto, convertirse en newtons. Se tiene

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = (4.45\ \text{N})(0.3048\ \text{m})(1\ \text{s})^2 = 1.356\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o, puesto que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$,

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = 1.356\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

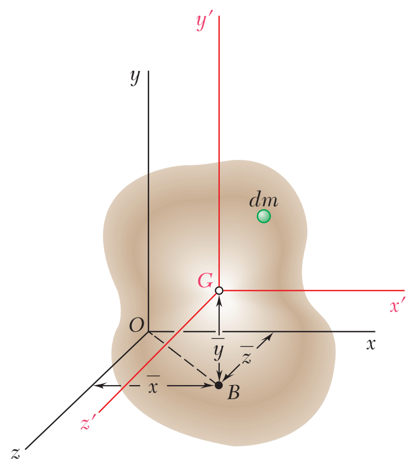


Figura B.3

B.2. TEOREMA DE EJES PARALELOS

Considérese un cuerpo de masa m. Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está en el punto arbitrario O, y $Gx'y'z'$ un sistema de *ejes centroidales* paralelos, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad G del cuerpo[†] y cuyos ejes x', y' y z' son paralelos a los ejes x, y y z, respectivamente (figura B.3). Denotando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas x, y y z de elemento dm con respecto a $Oxyz$ y sus coordenadas x', y' y z' con respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z} \tag{B.4}$$

Con referencia a las ecuaciones (B.3), es posible expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y} \int y'\, dm + 2\bar{z} \int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en esta expresión representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje centroidal x'; la segunda y tercera integrales representan el primer momento del cuerpo con respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, respectivamente, y, puesto que ambos planos contienen G, las dos integrales son *cero*; la última integral es igual a la masa total m del cuerpo. Por lo tanto, se escribe,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \tag{B.5}$$

y, de manera similar,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{B.5'}$$

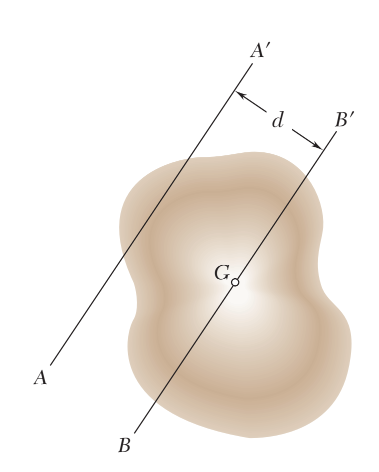


Figura B.4

De la figura B.3 se ve fácilmente que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB, entre los ejes y y y'. De manera similar, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representan los cuadrados de la distancia entre los ejes x y x' y los ejes z y z', respectivamente. Al denotar por d la distancia entre un eje arbitrario AA' y el eje centroidal paralelo BB' (figura B.4), se puede, en consecuencia, escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia $\bar{I}$ con respecto a BB':

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{B.6}$$

Al expresar los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{B.7}$$

donde k y $\bar{k}$ representan los radios de giro del cuerpo alrededor de AA' y BB', respectivamente.

[†]Observe que el término *centroidal* se usa aquí para definir el centro de gravedad G del cuerpo, aunque G no coincida con el centroide del volumen del cuerpo.

B.3. MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS DELGADAS

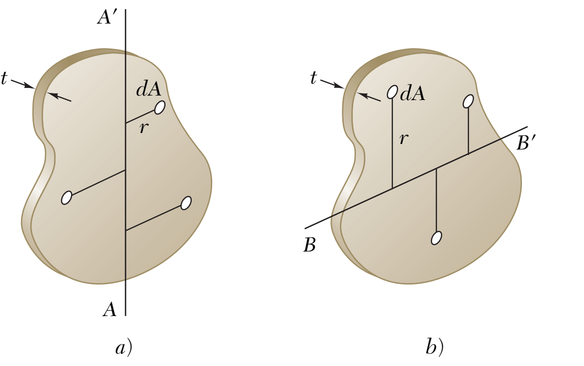
Considere una placa delgada de espesor uniforme t, hecha de un material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' *contenido en el plano* de la placa (figura B.5*a*) es

$$I_{AA',\ \text{masa}} = \int r^2\, dm$$

Puesto que $dm = \rho t\, dA$, se escribe

$$I_{AA',\ \text{masa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Pero r representa la distancia del elemento de área dA al eje AA'; la



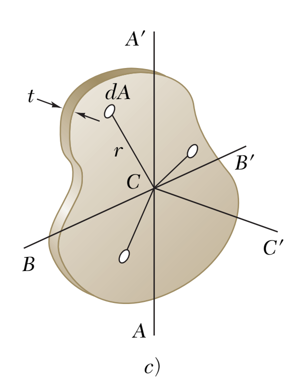


Figura B.5

integral por lo tanto es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA'. Se tiene

$$I_{AA',\ \text{masa}} = \rho t I_{AA',\ \text{área}} \tag{B.8}$$

De manera similar, para un eje BB' que está contenido en el plano de la placa y es perpendicular a AA' (figura B.5*b*), se tiene

$$I_{BB',\ \text{masa}} = \rho t I_{BB',\ \text{área}} \tag{B.9}$$

Si se considera ahora el eje CC' que es *perpendicular* a la placa y pasa por el punto de intersección C de AA' y BB' (figura B.5*c*), se escribe

$$I_{CC',\ \text{masa}} = \rho t J_{C,\ \text{área}} \tag{B.10}$$

donde J_C es el momento *polar* de inercia del área de la placa con respecto al punto C.

Al recordar la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre los momentos polar y rectangular de inercia de un área, se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \tag{B.11}$$

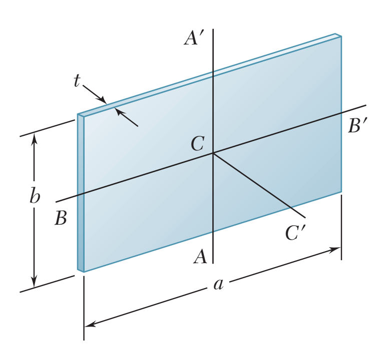


Figura B.6

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b (figura B.6), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a los ejes que pasan por el centro de gravedad de la placa

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3b)$$
$$I_{BB', \text{ masa}} = \rho t I_{BB', \text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Al observar que el producto ρabt es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada del modo siguiente:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{B.12}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{B.13}$$

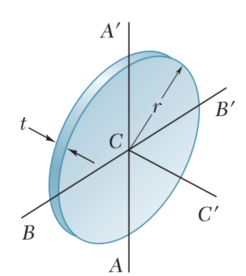


Figura B.7

Placa circular. En el caso de una placa circular, o disco, de radio r (figura B.7), se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

Al observar que el producto $\rho\pi r^2 t$ es igual a la masa m de la placa y que $I_{AA'} = I_{BB'}$, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la manera siguiente:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{B.14}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{B.15}$$

B.4. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL MEDIANTE INTEGRACIÓN

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral $I = \int r^2\, dm$. Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad ρ, el elemento de masa dm es igual a ρdV y se puede escribir $I = \rho \int r^2\, dV$. Esta integral depende sólo de la forma del cuerpo. De tal modo, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional, por lo general es necesario efectuar una integración triple, o al menos doble.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración al elegir como elemento de masa dm una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. En el caso de cuerpos de revolución, por ejemplo, el elemento de masa sería un disco delgado (figura B.8). Utilizando la fórmula (B.15), el momento de inercia con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura B.8. Su momento de inercia con respecto a cada uno de los otros dos ejes de coordenadas se obtiene utilizando la fórmula (B.14) y el teorema de ejes paralelos. La integración de la expresión obtenida produce el momento de inercia deseado del cuerpo.

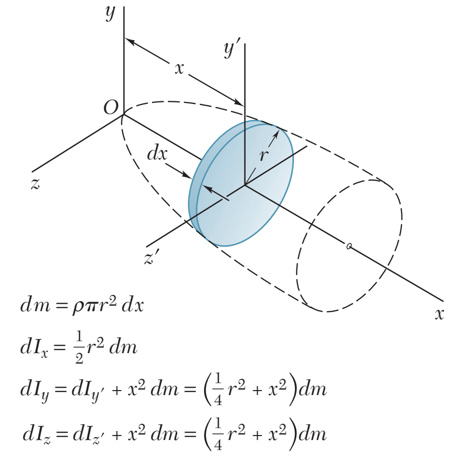
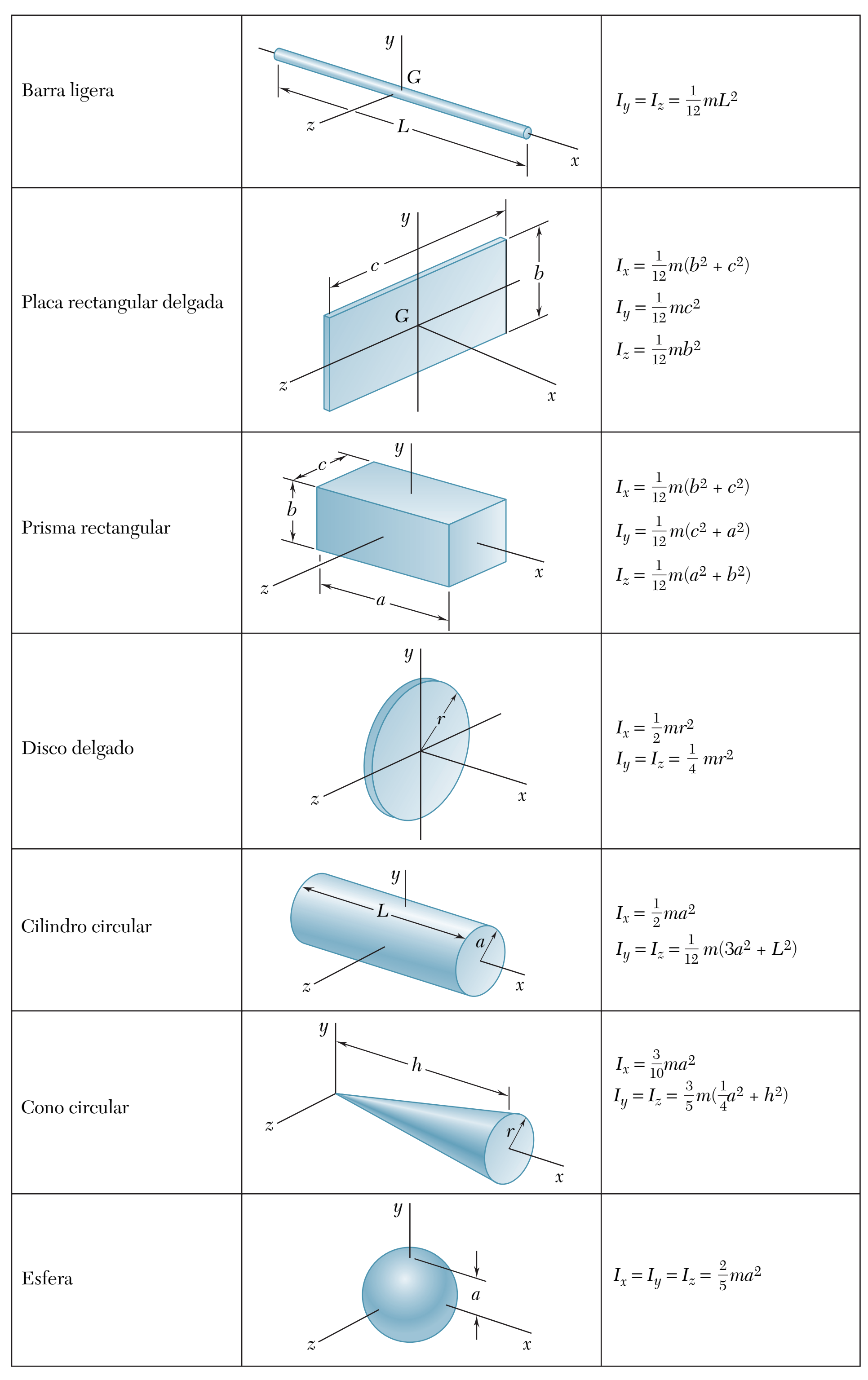


Figura B.8 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

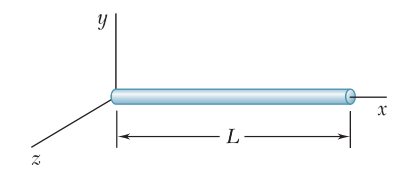
B.5. MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

Los momentos de inercia de unas cuantas formas comunes se muestran en la figura B.9. Para un cuerpo consistente en varias de estas formas simples, el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje dado puede obtenerse calculando primero los momentos de inercia de sus partes componentes alrededor del eje deseado y después sumándolos en conjunto. Como sucedió con las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto *no puede* obtenerse sumando los radios de giro de sus partes componentes.



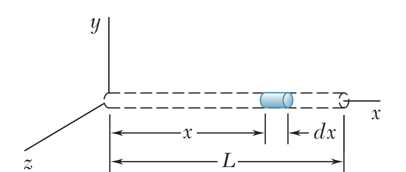
Barra ligera		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

Figura B.9 Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.



PROBLEMA RESUELTO B.1

Determine el momento de inercia de una barra ligera de longitud L y masa m con respecto a un eje que es perpendicular a la barra y pasa por un extremo de la misma.

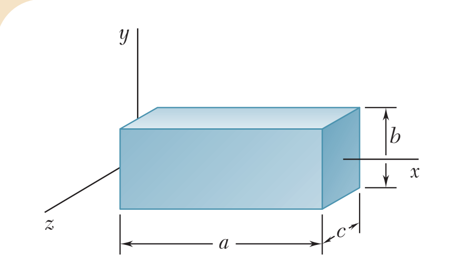


SOLUCIÓN

Al elegir el elemento diferencial de masa que se muestra, se escribe

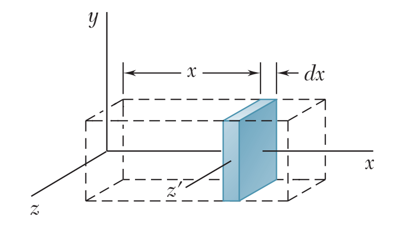
$$dm = \frac{m}{L}\,dx$$

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L}\,dx = \left[\frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L \qquad I_y = \tfrac{1}{3}mL^2 \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO B.2

Para el prisma rectangular homogéneo que se muestra, determine el momento de inercia con respecto al eje z.



SOLUCIÓN

Se elige como elemento diferencial de masa la placa delgada que se muestra; de tal modo

$$dm = \rho bc\,dx$$

Refiriéndose a la sección B.3, se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z' es

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\,dm$$

Al aplicar el teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner, se obtiene el momento de inercia de masa de la placa con respecto al eje z.

$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{12}b^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx$$

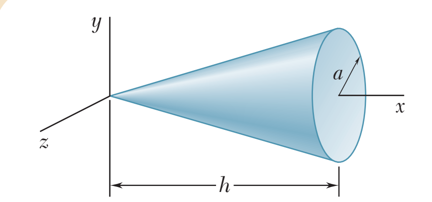
Si se integra desde $x = 0$ a $x = a$, se obtiene

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx = \rho abc(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

Puesto que la masa total del prisma es $m = \rho abc$, se puede escribir

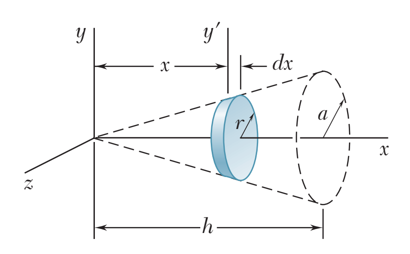
$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2) \blacktriangleleft$$

Hay que observar que si el prisma es delgado, b es pequeña comparada con a, y la expresión para I_z se reduce a $\frac{1}{3}ma^2$, que es el resultado que se obtuvo en el problema resuelto B.1 cuando $L = a$.



PROBLEMA RESUELTO B.3

Determine el momento de inercia de un cono circular recto con respecto a *a*) su eje longitudinal, *b*) un eje que pasa por el ápice del cono y perpendicular a su eje longitudinal, *c*) un eje que pasa por el centroide del cono y perpendicular a su eje longitudinal.



SOLUCIÓN

Se elige el elemento diferencial de masa que se muestra.

$$r = a\frac{x}{h} \qquad dm = \rho\pi r^2\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

***a*) Momentos de inercia I_x.** Utilizando la expresión que se obtuvo en la sección B.3 para un disco delgado, se calcula el momento de inercia de masa del elemento diferencial con respecto al eje x.

$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx$$

Al integrar desde $x = 0$ hasta $x = h$, se obtiene

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

Puesto que la masa total del cono es $m = \tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h$, se puede escribir

$$I_x = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \tfrac{3}{10}a^2(\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h) = \tfrac{3}{10}ma^2 \qquad I_x = \tfrac{3}{10}ma^2 \blacktriangleleft$$

***b*) Momento de inercia I_y.** Se usa el mismo elemento diferencial. Aplicando el teorema de ejes paralelos y utilizando la expresión que se dedujo en la sección B.3 para un disco delgado, se escribe

$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{4}r^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{4}r^2 + x^2)\,dm$$

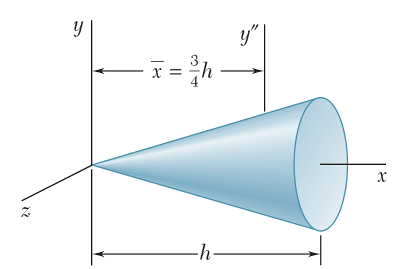
Al sustituir las expresiones para r y dm en la ecuación, se obtiene

$$dI_y = \left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)x^4\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2}+1\right)\frac{h^5}{5}$$

Al introducir la masa total del cono m, se reescribe I_y como sigue:

$$I_y = \tfrac{3}{5}(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h \qquad I_y = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) \blacktriangleleft$$



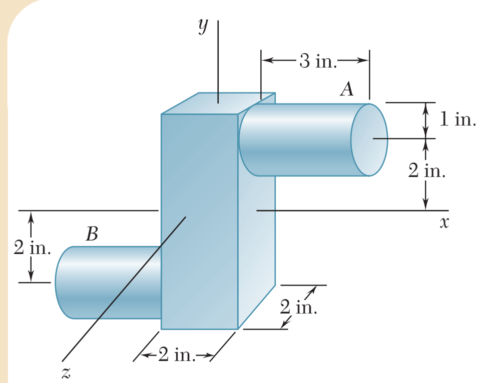
***c*) Momento de inercia $\bar{I}_{y''}$.** Se aplica el teorema de ejes paralelos y se escribe

$$I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$$

Al resolver para $\bar{I}_{y''}$ y recordar que $\bar{x} = \tfrac{3}{4}h$, se tiene

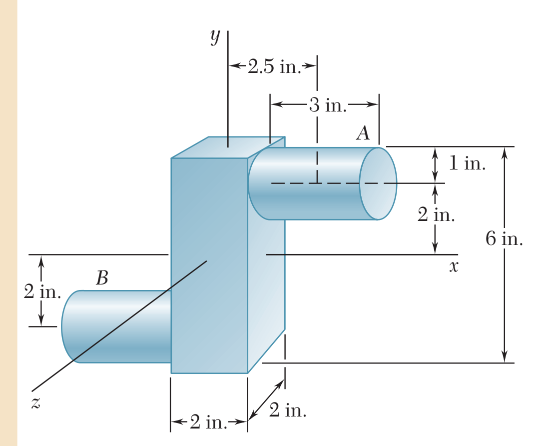
$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) - m(\tfrac{3}{4}h)^2$$

$$\bar{I}_{y''} = \tfrac{3}{20}m(a^2 + \tfrac{1}{4}h^2) \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO B.4

Una pieza de acero forjado está compuesta por un prisma rectangular de 6 × 2 × 2 in. y dos cilindros de 2 in. de diámetro y 3 in. de largo como se muestra. Determine los momentos de inercia de la pieza forzada con respecto a los ejes coordenados si se sabe que el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3.



SOLUCIÓN

Cálculo de masas

Prisma

$$V = (2 \text{ in.})(2 \text{ in.})(6 \text{ in.}) = 24 \text{ in}^3$$

$$W = (24 \text{ in}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 6.81 \text{ lb}$$

$$m = \frac{6.81 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Cada cilindro

$$V = \pi(1 \text{ in.})^2(3 \text{ in.}) = 9.42 \text{ in}^3$$

$$W = (9.42 \text{ in}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 2.67 \text{ lb}$$

$$m = \frac{2.67 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Momentos de inercia. Los momentos de inercia de cada componente se calculan a partir de la figura B.9, utilizando el teorema de ejes paralelos cuando es necesario. Hay que observar que las longitudes se expresan en pies.

Prisma

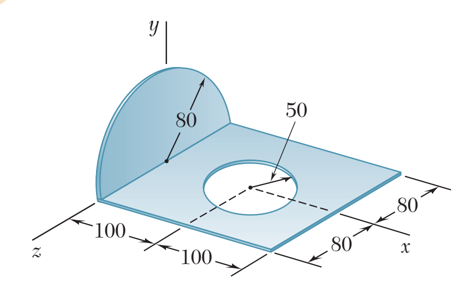
$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{6}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 4.88 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 0.977 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Cada cilindro

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \tfrac{1}{2}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2 = 2.59 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2.5}{12} \text{ ft})^2 = 4.17 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{2.5}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 6.48 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Cuerpo completo. Al sumar los valores obtenidos,

$$I_x = 4.88 \times 10^{-3} + 2(2.59 \times 10^{-3}) \qquad I_x = 10.06 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_y = 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-3}) \qquad I_y = 9.32 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_z = 4.88 \times 10^{-3} + 2(6.48 \times 10^{-3}) \qquad I_z = 17.84 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \blacktriangleleft$$



Dimensiones en mm

PROBLEMA RESUELTO B.5

Una delgada placa de acero que mide 4 mm de espesor se corta y dobla para formar la parte de la máquina que se muestra. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine los momentos de inercia de la parte de la máquina con respecto a los ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN

Se observa que la parte de la máquina se compone de una placa circular y de una placa rectangular de la cual se removió una placa circular.

Cálculo de masas. ***Placa semicircular***

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0.08 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.3156 \text{ kg}$$

Placa rectangular

$$V_2 = (0.200 \text{ m})(0.160 \text{ m})(0.004 \text{ m}) = 128 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 1.005 \text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0.050 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.2466 \text{ kg}$$

Momentos de inercia. Utilizando el método que se presentó en la sección B.3, se calculan los momentos de inercia de cada componente.

Placa semicircular. De la figura B.9, se observa que para una placa circular de masa m y radio r

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

Debido a la simetría, se advierte que para una placa semicircular

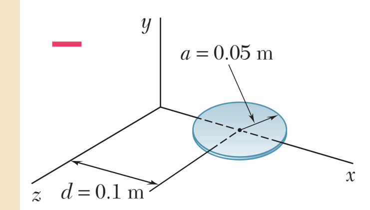
$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Puesto que la masa de la placa semicircular es $m_1 = \tfrac{1}{2}m$, se tiene

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1 r^2 = \tfrac{1}{2}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 1.010 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1 r^2 = \tfrac{1}{4}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 0.505 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa rectangular

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2 c^2 = \tfrac{1}{12}(1.005 \text{ kg})(0.16 \text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2 b^2 = \tfrac{1}{3}(1.005 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400)(10^{-3}) = 15.544 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Placa circular

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3 a^2 + m_3 d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 + m_3 d^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2$$
$$= 2.620 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Parte de máquina completa

$$I_x = (1.010 + 2.144 - 0.154)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_x = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_y = (0.505 + 15.544 - 2.774)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_y = 13.28 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_z = (0.505 + 13.400 - 2.620)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_z = 11.29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se introdujo el *momento de inercia de masa* y el *radio de giro* de un cuerpo tridimensional con respecto a un eje dado [ecuaciones (B.1) y (B.2)]. También se dedujo un *teorema de ejes paralelos* para usarlo con momentos de inercia de masa y se estudió el cálculo de momentos de inercia de masa de placas delgadas y cuerpos tridimensionales.

1. Cálculo de momentos de inercia de masa. El momento de inercia de masa I de un cuerpo con respecto a un eje dado puede calcularse de manera directa a partir de la definición dada en la ecuación (B.1) para formas simples [problema resuelto B.1]. Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario dividir el cuerpo en placas delgadas, calcular el momento de inercia de una placa característica con respecto a un eje dado —utilizando el teorema de los ejes paralelos si es necesario— e integrar la expresión obtenida.

2. Aplicación del teorema de los ejes paralelos. En la sección B.2 se obtuvo el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

$$I = \bar{I} + md^2 \qquad \text{(B.6)}$$

que establece que el momento de inercia I de un cuerpo de masa m con respecto a un eje dado es igual a la suma de los momentos de inercia $\bar{I}$ de ese cuerpo con respecto al *eje centroidal paralelo* y el producto md^2, donde d es la distancia entre los dos ejes. Cuando el momento de inercia de un cuerpo tridimensional se calcula con respecto a uno de los ejes de coordenadas, d^2 puede sustituirse por la suma de los cuadrados de las distancias medidas a lo largo de los otros dos ejes de coordenadas [ecuaciones (B.5) y (B.5′)].

3. Evitar errores relacionados con las unidades. Para evitar errores, es esencial que exista consistencia en el uso de las unidades. De tal modo, todas las longitudes deben expresarse en metros o pies, según sea apropiado, y en problemas en los que se utilicen unidades de uso común en Estados Unidos, las masas deben indicarse en lb · s^2/ft. Además, se recomienda ampliamente que se incluyan unidades cuando se efectúen los cálculos [problemas resueltos (B.4) y (B.5)].

4. Cálculo del momento de inercia de masa de placas delgadas. Se demostró en la sección B.3 que el momento de inercia de masa de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse multiplicando el momento de inercia correspondiente del área de la placa por la densidad ρ y por el espesor t de la misma [ecuaciones (B.8) a (B.10)]. Hay que observar que como el eje CC' en la figura B.5*c* es *perpendicular a la placa,* $I_{CC',\,\text{masa}}$ se asocia con el momento de inercia polar $J_{C,\,\text{área}}$.

En lugar de calcular de manera directa el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje especificado, en ocasiones resulta conveniente calcular

(*continúa*)

primero su momento de inercia con respecto a un eje paralelo al eje especificado y después aplicar el teorema de los ejes paralelos. Además, para determinar el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la placa, es posible determinar primero sus momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares en un plano y luego utilizar la ecuación (B.11). Por último, hay que recordar que la masa de una placa de área A, espesor t y densidad ρ es $m = \rho t A$.

5. Obtención del momento de inercia de un cuerpo mediante una sola integración directa. En la sección B.4 se analizó y se ilustró en los problemas resueltos B.2 y B.3 cómo es posible utilizar una sola integración para calcular el momento de inercia de un cuerpo que puede dividirse en una serie de placas delgadas y paralelas. Para estos casos, a menudo es necesario expresar la masa del cuerpo en términos de la densidad y las dimensiones del mismo. Suponiendo que se ha dividido, como en los problemas resueltos, en placas delgadas perpendiculares al eje x, resultará necesario expresar las dimensiones de cada placa como funciones de la variable x.

a) En el caso especial de un cuerpo de revolución, la placa elemental es un disco delgado y deben utilizarse las ecuaciones que se dan en la figura B.8 para determinar los momentos de inercia del cuerpo [problema resuelto B.3].

b) En el caso general, cuando el cuerpo no es de revolución, el elemento diferencial no es un disco, sino una placa delgada de una forma diferente, y no es posible utilizar las ecuaciones de la figura B.8. Hay que observar, por ejemplo, el problema resuelto B.2, donde el elemento era una placa rectangular delgada. Para configuraciones más complejas, se puede utilizar una o más de las siguientes ecuaciones, las cuales se basan en las ecuaciones (B.5) y (B.5′) de la sección B.2.

$$dI_x = dI_{x'} + (\bar{y}_{el}^2 + \bar{z}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + (\bar{z}_{el}^2 + \bar{x}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + (\bar{x}_{el}^2 + \bar{y}_{el}^2)\, dm$$

donde las primas denotan los ejes centroidales de cada placa elemental, y $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ representan las coordenadas de su centroide. Los momentos de inercia centroidales de la placa se determinan de la manera que se describió antes para una placa delgada: con referencia en la figura 9.12, calcule los momentos de inercia correspondientes del área de la placa y multiplique el resultado por la densidad ρ y el espesor t de la misma. Además, suponiendo que el cuerpo se ha dividido en placas delgadas perpendiculares al eje x, recuerde que es posible obtener $dI_{x'}$ sumando $dI_{y'}$ y $dI_{z'}$ en lugar de hacer el cálculo de manera directa. Por último, utilizando la geometría del cuerpo, se puede expresar el resultado obtenido en términos de una sola variable x e integrar en x.

6. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto. Como se estableció en la sección B.5, el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a un eje especificado es igual a la suma de los momentos de sus componentes con respecto a ese eje. Los problemas resueltos B.4 y B.5 ilustran el método de solución apropiado. También se debe recordar que el momento de inercia de un componente será negativo sólo si el componente se *remueve* (como en el caso de un agujero).

Aunque los problemas del cuerpo compuesto en esta lección son relativamente directos, se tendrá que trabajar con cuidado para evitar errores de cálculo. Además, si alguno de los momentos de inercia necesarios no se indica en la figura B.9, se tendrá que deducir sus fórmulas utilizando las técnicas de esta lección.

Problemas

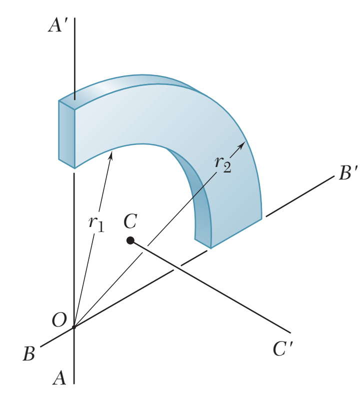


Figura PB.1

B.1 En la figura se muestra un cuarto de anillo con masa m que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si $r_1 = \frac{1}{2}r_2$, determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje AA' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al cuarto de anillo.

B.2 En la figura se muestra una placa delgada y semielíptica con una masa m. Determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje centroidal BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa.

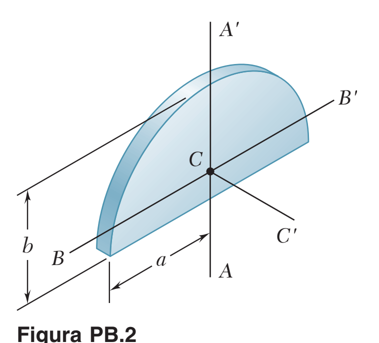


Figura PB.2

B.3 En la figura se muestra un anillo elíptico que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si la masa del anillo se denota con m, determine su momento de inercia con respecto a a) el eje centroidal BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al anillo.

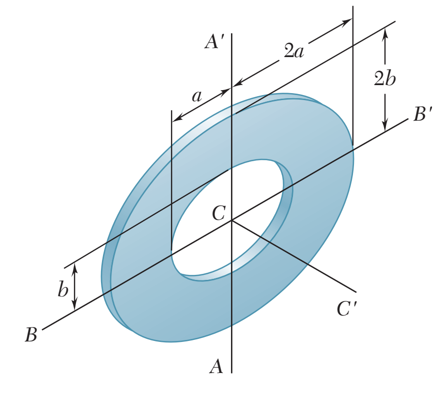


Figura *PB.3*

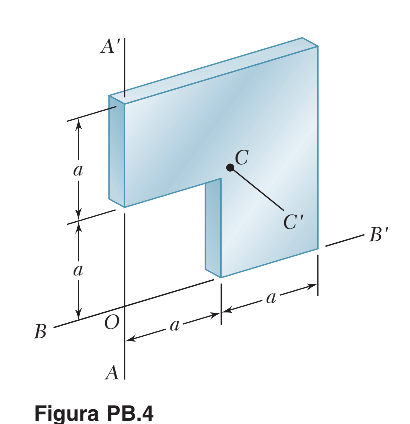


Figura PB.4

B.4 En la figura se muestra un componente de máquina que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si la masa del componente se denota con m, determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al componente.

B.5 El rombo mostrado en la figura tiene una masa m y fue cortado de una placa delgada uniforme. Determine el momento de inercia de masa del rombo con respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y.

B.6 El rombo mostrado en la figura tiene una masa m y fue cortado de una placa delgada uniforme. Si los ejes AA' y BB' son paralelos al eje z y descansan en un plano paralelo al plano zx y además se encuentran a una distancia a sobre éste, determine el momento de inercia de masa del rombo con respecto a *a*) el eje AA', *b*) el eje BB'.

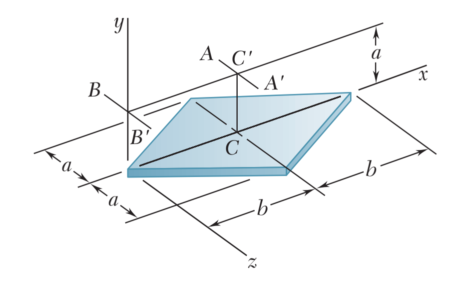


Figura PB.5 y *PB.6*

B.7 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje x y *b*) el eje y.

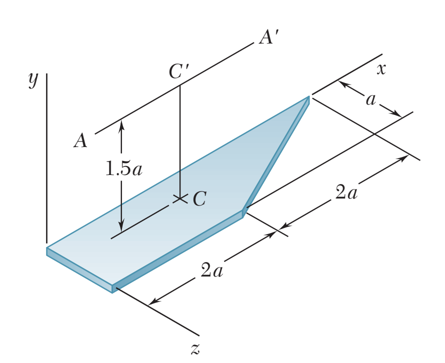


Figura PB.7 y PB.8

B.8 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa y *b*) el eje AA' que es paralelo al eje x y se encuentra a una distancia de $1.5a$ desde la placa.

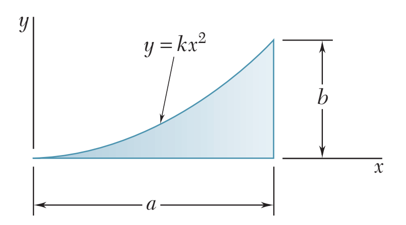


Figura PB.9

B.9 Al rotar la enjuta parabólica mostrada con respecto al eje x se forma un sólido homogéneo de revolución con masa m. Utilice integración directa para expresar, en términos de m y b, el momento de inercia del sólido con respecto al eje x.

B.10 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje z del cilindro circular recto que se muestra en la figura. Suponga que el cilindro tiene densidad uniforme y una masa m.

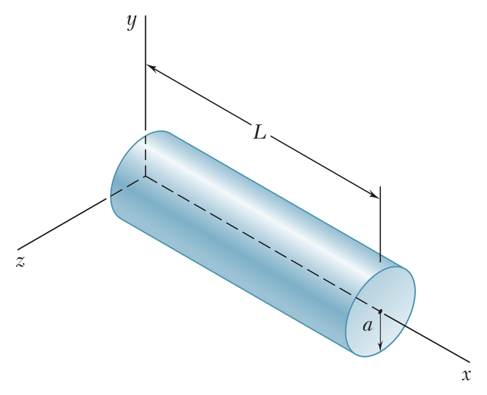


Figura *PB.10*

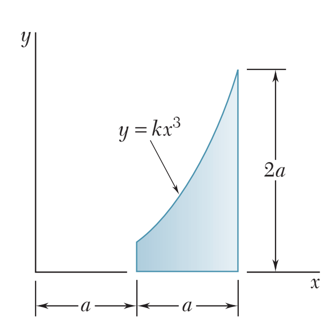


Figura PB.11

B.11 El área mostrada en la figura se rota con respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución con masa m. Determine por integración directa el momento de masa de inercia del sólido con respecto a a) el eje x y b) el eje y. Exprese las respuestas en términos de m y a.

B.12 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje x.

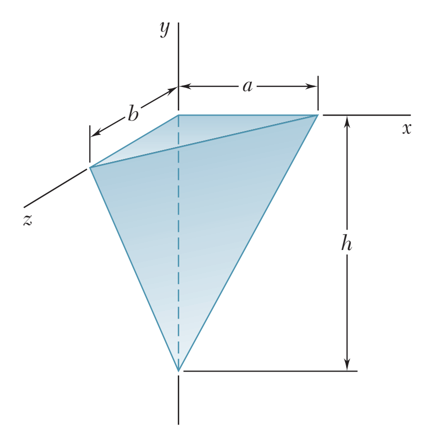


Figura PB.12 y *PB.13*

B.13 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje y.

***B.14** Suponga que el semielipsoide mostrado en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje z.

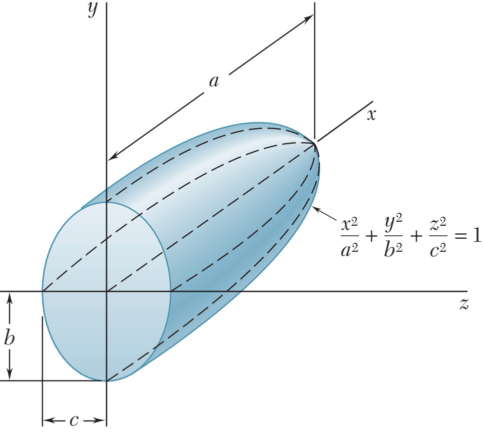


Figura PB.14

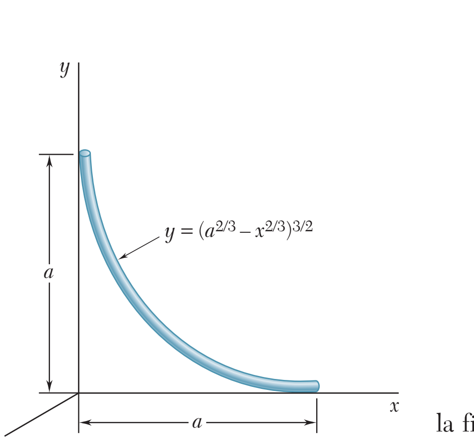


Figura PB.15

***B.15** Un alambre delgado de acero se dobla en la forma mostrada en la figura. Si se representa con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

B.16 En la figura se muestra una placa delgada con forma triangular y masa m, la cual está soldada a un bloque a lo largo de su base AB. Si se sabe que la placa forma un ángulo θ con el eje y, determine por integración directa el momento de inercia de masa de la placa con respecto a a) el eje x, b) el eje y y c) el eje z.

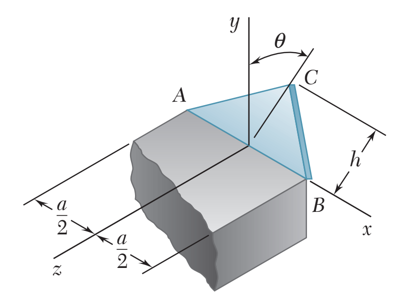


Figura PB.16

B.17 En la figura se muestra la sección transversal de una polea moldeada para banda plana. Determine su momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje AA'. (El peso específico del latón es 0.306 lb/in.^{3}, y el del policarbonato de fibra reforzada es 0.0433 lb/in.^{3})

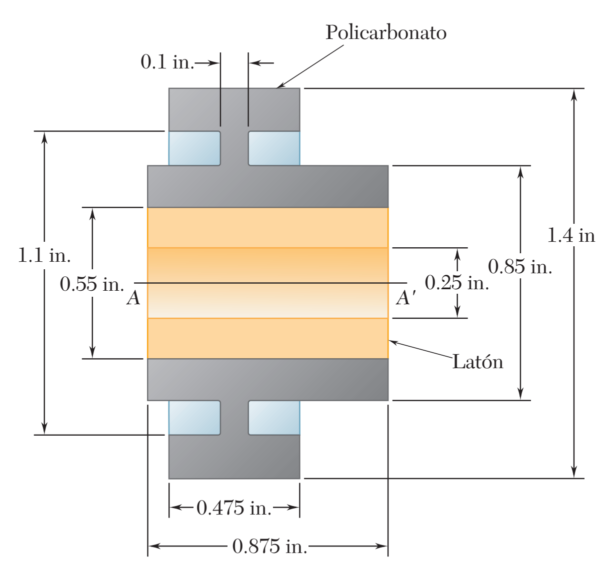


Figura PB.17

B.18 En la figura se muestra la sección transversal de un rodillo móvil. Determine su momento de inercia y su radio de giro de masa con respecto al eje AA'. (La densidad del bronce es de 8 580 kg/m^3, la del aluminio es de 2 770 kg/m^3 y la del neopreno es de 1 250 kg/m^3.)

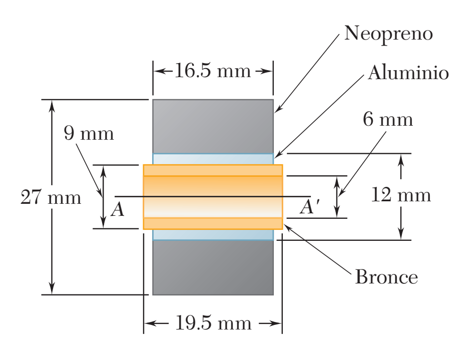


Figura PB.18

B.19 Dadas las dimensiones y la masa m del cascarón cónico delgado que se muestra en la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro del cascarón con respecto al eje x. (*Sugerencia*: Considere que el cascarón se formó al remover un cono con una base circular de radio a de un cono con una base circular de radio $a + t$. En las expresiones resultantes, no tome en cuenta los términos que contengan t^2, t^3 etc. No olvide tomar en cuenta la diferencia en las alturas de los dos conos.)

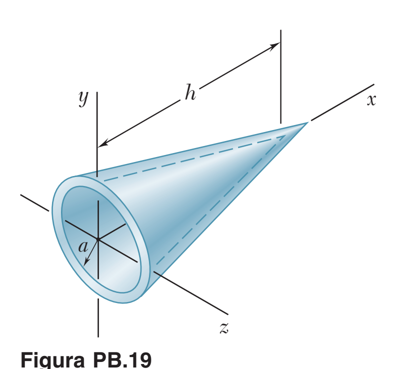


Figura PB.19

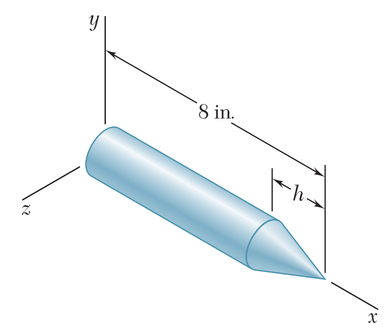


Figura PB.20

B.20 Una porción de una barra larga de acero de 8 in. de largo y 1.50 in. de diámetro se gira para formar la sección cónica que se muestra. Si el proceso de giro reduce el momento de inercia de la barra con respecto al eje x en 20 por ciento, determine la altura h del cono.

B.21 El componente de máquina de acero que se muestra se formó maquinando un hemisferio en la base de un cono truncado. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa de la componente con respecto al eje y.

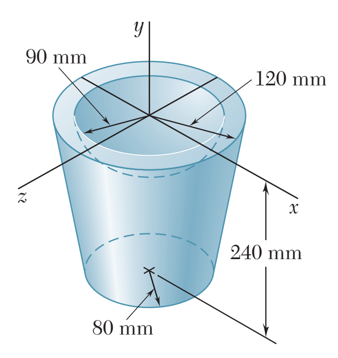


Figura PB.21

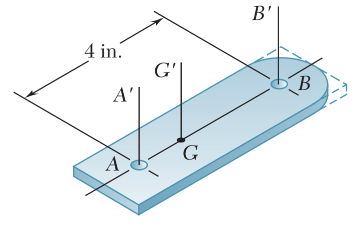


Figura *PB.22*

B.22 Luego de un periodo de uso, se desgastó una de las cuchillas de un desmenuzador y terminó en la forma mostrada, con un peso de 0.4 lb. Si los momentos de inercia de la cuchilla con respecto a los ejes AA' y BB' son 0.6×10^{-3} lb · ft · s^2 y 1.26×10^{-3} lb · ft · s^2, respectivamente, determine *a*) la ubicación del eje centroidal GG', *b*) el radio de giro con respecto al eje GG'.

B.23 Las copas y los brazos de un anemómetro se fabrica con un material de densidad ρ. Si el momento de inercia de un cascarón hemisférico delgado de masa m y espesor t con respecto a su eje centroidal GG' es $5ma^2/12$, determine *a*) el momento de inercia del anemómetro con respecto al eje AA', *b*) la razón de a sobre l para la cual el momento de inercia centroidal de las copas es igual a 1 por ciento del momento de inercia de las copas con respecto al eje AA'.

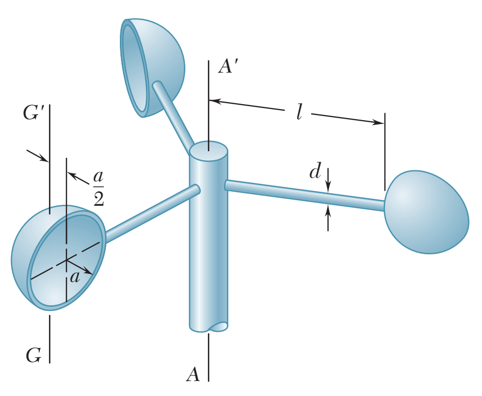


Figura *PB.23*

B.24 Un agujero cuadrado centrado se extiende de un lado al otro del componente de máquina de aluminio que se muestra. Determine *a*) el valor de *a* para el cual la masa del momento de inercia del componente con respecto al eje AA', que biseca la superficie superior del agujero, es máxima, *b*) los valores correspondientes del momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje AA'. (La densidad del aluminio es de 2 800 kg/m^3.)

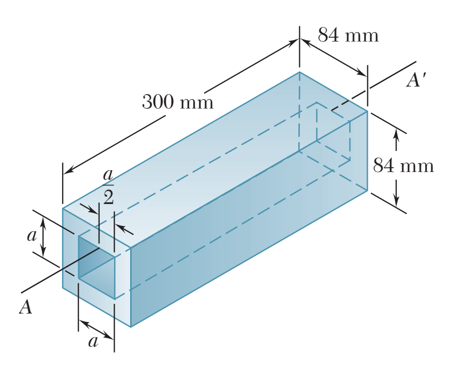


Figura PB.24

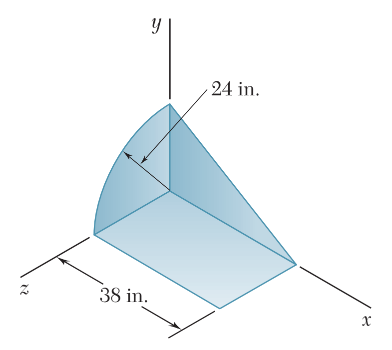


Figura PB.25

B.25 Una pieza de 0.1 in. de espesor de hoja metálica se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si el peso específico del acero es de 0.284 lb/in.^{3}, determine el momento de inercia del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

B.26 Una pieza de 3 mm de espesor de hoja metálica se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si la densidad del acero es 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

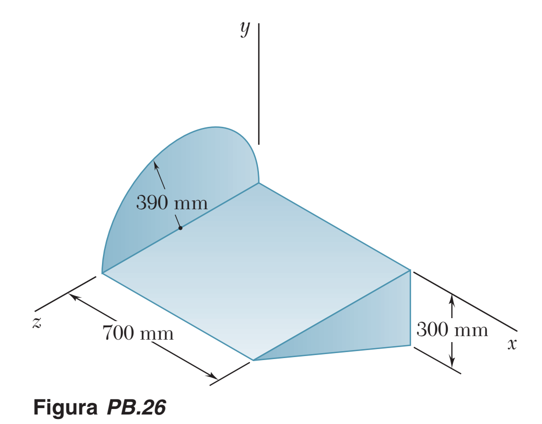


Figura *PB.26*

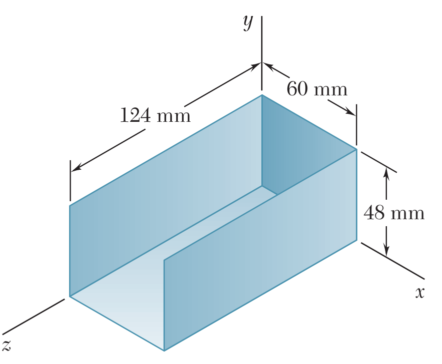


Figura PB.27

B.27 La cubierta de un dispositivo electrónico se forma de una hoja de aluminio de 2 mm de espesor. Determine el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (La densidad del aluminio es de 2 770 kg/m^3.)

B.28 Un anclaje de estructuras se forma con acero galvanizado de 2 mm de espesor. Determine el momento de inercia de masa del anclaje con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (La densidad del acero galvanizado es de 7 530 kg/m^3.)

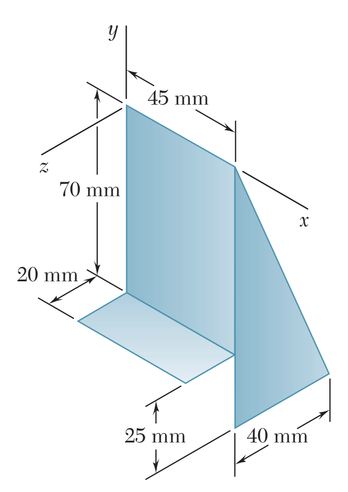


Figura *PB.28*

B.29 Una pieza de hoja de acero de 2 mm de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si la densidad del acero es igual a 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

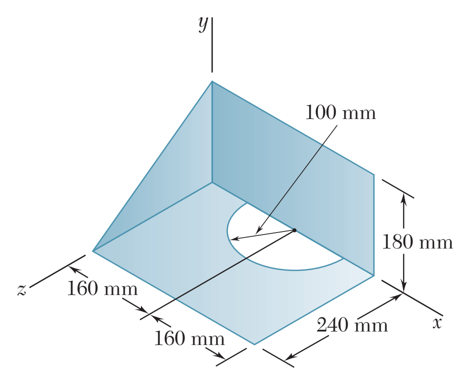


Figura PB.29

***B.30** La pieza de escurridor de techo que se muestra se forma a partir de hoja de cobre que tiene un espesor de 0.032 in. Si el peso específico del cobre es de 558 lb/ft^3, determine el momento de inercia del escurridor con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

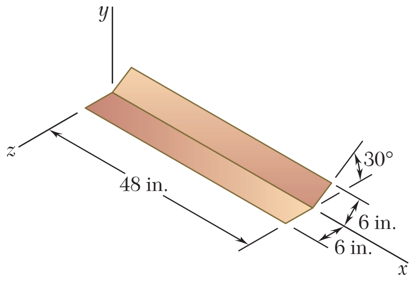


Figura PB.30

B.31 El elemento de máquina que se muestra en la figura está fabricado con acero. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a *a*) el eje *x*, *b*) el eje *y*, *c*) el eje *z*. (El peso específico del acero es de 0.284 lb/in.^{3})

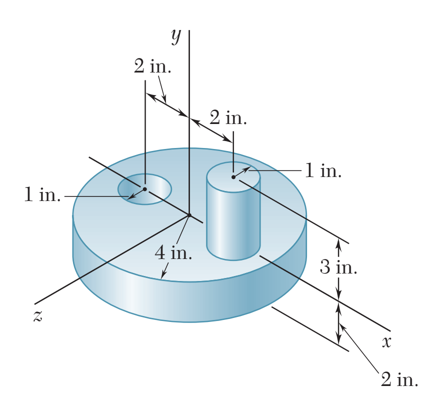


Figura PB.31

B.32 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje *y*. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

B.33 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje *z*. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

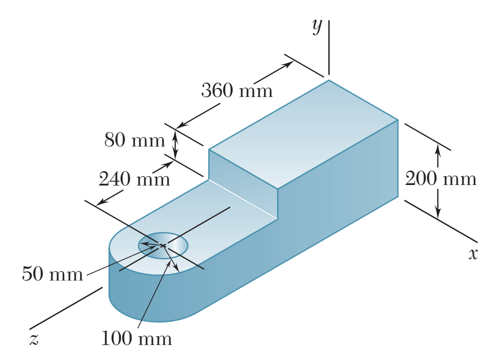


Figura PB.32 y PB.33

B.34 Una pieza fundida de aluminio tiene la forma que se indica. Si el peso específico del aluminio es igual a 0.100 lb/in.^{3}, determine el momento de inercia de la pieza fundida con respecto al eje *z*.

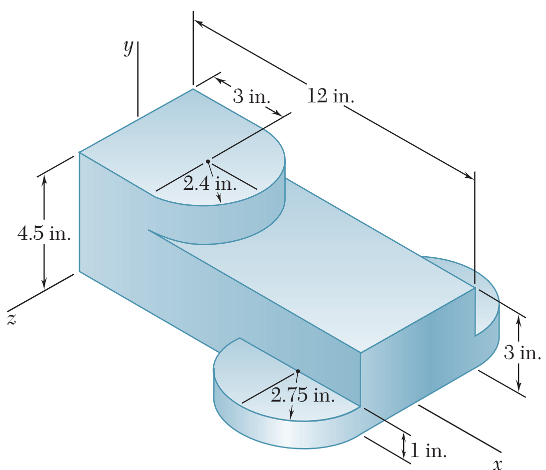


Figura *PB.34*

B.35 Determine el momento de inercia del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto *a*) el eje x, *b*) el eje y, *c*) el eje z. (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3.)

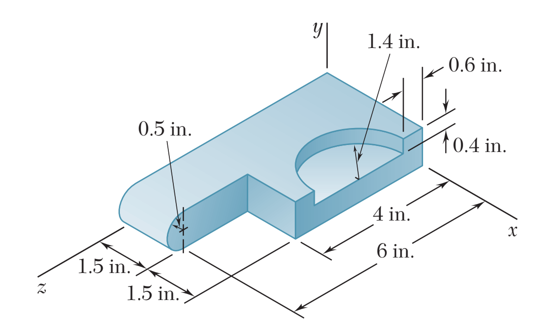


Figura PB.35

B.36 Un alambre de aluminio con una masa por unidad de longitud de 0.049 kg/m se emplea para formar el círculo y los elementos rectos de la figura mostrada. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

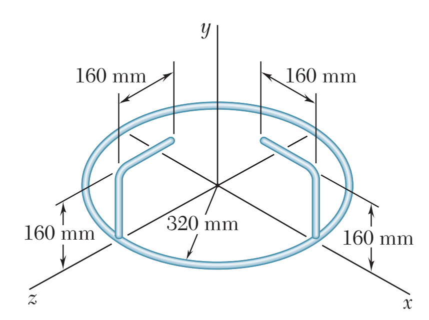


Figura PB.36

B.37 La figura que se muestra está formada con alambre de acero de 3 mm de diámetro. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

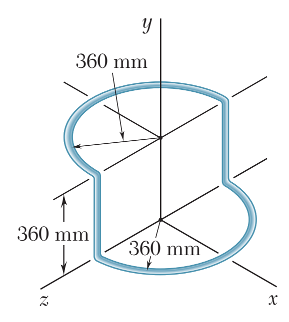


Figura PB.37

B.38 Un alambre homogéneo con un peso por unidad de longitud de 0.041 lb/ft se usa para formar la figura mostrada. Determine el momento de inercia del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

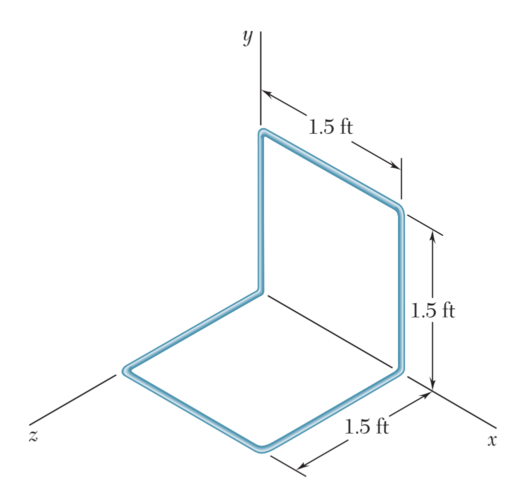


Figura PB.38

*B.6. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO RESPECTO A UN EJE ARBITRARIO QUE PASA POR *O*. PRODUCTOS DE INERCIA

En esta sección se verá cómo determinar el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario OL que pasa por el origen (figura B.10) si sus momentos de inercia en relación con los tres ejes coordenados, así como con otras cantidades que se definirán más adelante, ya fueron determinados.

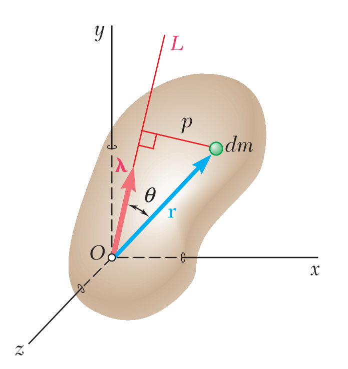


Figura B.10

El momento de inercia I_{OL} del cuerpo respecto a OL es igual a $\int p^2\, dm$, donde p denota la distancia perpendicular desde el elemento de masa dm hasta el eje OL. Si se denota mediante $\boldsymbol{\lambda}$ el vector unitario a lo largo de OL y con $\mathbf{r}$ el vector de posición del elemento dm, se observa que la distancia perpendicular p es igual a r sen θ, lo cual representa la magnitud del producto vectorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Por lo tanto, se escribe

$$I_{OL} = \int p^2\, dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2\, dm \qquad \text{(B.16)}$$

Al expresar $|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2$ en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, se tiene

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2]\, dm$$

donde las componentes λ_x, λ_y y λ_z del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ representan los cosenos directores del eje OL y las componentes x, y y z de $\mathbf{r}$ representan las coordenadas del elemento de masa dm. Al desarrollar los términos cuadráticos y reagrupar los términos, se escribe

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2)\, dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2)\, dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2)\, dm$$
$$- 2\lambda_x\lambda_y \int xy\, dm - 2\lambda_y\lambda_z \int yz\, dm - 2\lambda_z\lambda_x \int zx\, dm \qquad \text{(B.17)}$$

Si se recurre a las ecuaciones (B.3), se advierte que las primeras tres integrales en (B.17) representan, respectivamente, los momentos de inercia I_x, I_y e I_z del cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas. Las últimas tres integrales en (B.17), que implican productos de coordenadas, se denominan los *productos de inercia* del cuerpo con respecto a los ejes x y y, los ejes y y z, y los ejes z y x de manera respectiva. Se escribe

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{B.18}$$

Si se reescribe la ecuación (B.17) en términos de las integrales definidas en las ecuaciones (B.3) y (B.18), se tiene

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{B.19}$$

Hay que observar que la definición de los productos de inercia de una masa determinada en las ecuaciones (B.18) es una extensión de la definición del producto de inercia de un área (sección 9.8). Los productos de inercia de masa se reducen a cero bajo las mismas condiciones de simetría que los productos de inercia de áreas, y el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa se expresan mediante relaciones similares a la forma que se obtuvo para el producto de inercia de un área. Al sustituir las expresiones para x, y y z dadas en las ecuaciones (B.4) y en las ecuaciones (B.18), se encuentra que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \tag{B.20}$$

donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ denotan los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' (figura B.3).

*B.7. ELIPSOIDE DE INERCIA. EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Supóngase que el momento de inercia del cuerpo que se consideró en la sección anterior se ha determinado con respecto a un gran número de ejes OL que pasan por el punto fijo O y que un punto Q se ha graficado sobre cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O. El lugar geométrico de los puntos Q obtenido de esa manera forma una superficie (figura B.11). La ecuación de esa superficie se obtiene al sustituir $1/(OQ)^2$ en vez de I_{OL} en (B.19) y multiplicar después a ambos lados de la ecuación por $(OQ)^2$. Al observar que

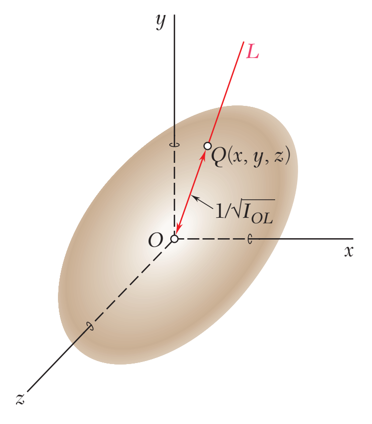


Figura B.11

$$(OQ)\lambda_x = x \qquad (OQ)\lambda_y = y \qquad (OQ)\lambda_z = z$$

donde x, y y z denotan las coordenadas rectangulares de Q, se escribe

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \tag{B.21}$$

La ecuación que se obtiene es la ecuación de una *superficie cuadrática*. Puesto que el momento de inercia I_{OL} es diferente de cero para cada eje OL, ningún punto Q puede estar a una distancia infinita de O. De tal modo, la superficie cuadrática que se obtiene es *una elipsoide*.

Esta elipsoide, que define el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa por O, se conoce como la *elipsoide de inercia* del cuerpo en O.

Hay que observar que si se rotan los ejes en la figura B.11, cambian los coeficientes de la ecuación que define la elipsoide, ya que son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas rotados. Sin embargo, la *elipsoide misma permanece sin cambio,* pues su forma sólo depende de la distribución de masa en el cuerpo dado. Supóngase que se eligen como ejes de coordenadas los ejes principales x', y' y z' de la elipsoide de inercia (figura B.12). Se sabe que la ecuación de la elipsoide con respecto a estos ejes de coordenadas es de la forma

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \tag{B.22}$$

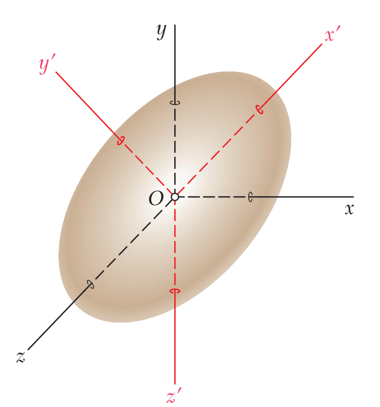


Figura B.12

que no contiene ningún producto de las coordenadas. Al comparar las ecuaciones (B.21) y (B.22), se puede observar que los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x', y' y z' deben ser cero. Los ejes x', y' y z' se conocen como los *ejes principales de inercia* del cuerpo en O, y los coeficientes $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ se denominan *momentos principales de inercia* del cuerpo O. Hay que observar que, dado un cuerpo de forma arbitraria y un punto O, siempre es posible encontrar ejes que son los ejes principales de inercia del cuerpo en O, esto es, ejes con respecto a los cuales los productos de inercia del cuerpo son cero. De hecho, cualquiera que sea la forma del cuerpo, los momentos y productos de inercia del mismo con respecto a los ejes x, y y z que pasan por O definirán una elipsoide, y éste tendrá ejes principales que, por definición, son los ejes principales de inercia del cuerpo en O.

Si los ejes principales de inercia x', y' y z' se usan como ejes de coordenadas, la expresión que se obtiene en la ecuación (B.19) para el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por O se reduce a

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{B.23}$$

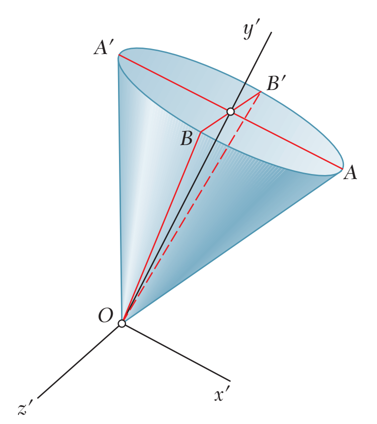


Figura B.13

La determinación de los ejes principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria es algo complicada y se analizará en la siguiente sección. Sin embargo, hay muchos casos en los que los ejes pueden visualizarse de inmediato. Considere, por ejemplo, el cono homogéneo de base elíptica que se muestra en la figura B.13; este cono posee dos planos perpendiculares de simetría OAA' y OBB' mutuamente perpendiculares. De la definición (B.18) se puede observar que si los planos $x'y'$ y $y'z'$ se eligen para que coincidan con los dos planos de simetría, todos los productos de inercia son cero. Los ejes x', y' y z' elegidos de ese modo son, en consecuencia, los ejes principales de inercia del cono en O. En el caso del tetraedro regular y homogéneo $OABC$ que se muestra en la figura B.14, la línea que une la esquina O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O, y cualquier línea que pasa por O perpendicular a OD también es un eje principal de inercia en O. Esta propiedad es patente si observamos que al girar el tetraedro 120 grados alrededor de OD no cambia su forma y su distribución de masa. Se concluye que la elipsoide de inercia en O también permanece sin cambio bajo esta rotación. Por lo tanto, la elipsoide es un cuerpo de revolución cuyo eje de revolución es OD, y la línea OD, así como cualquier línea perpendicular que pase por O, debe ser un eje principal de la elipsoide.

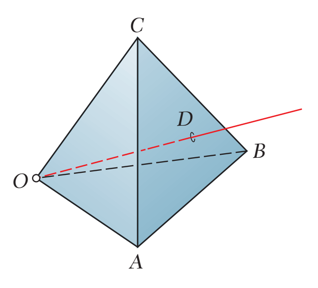


Figura B.14

*B.8. DETERMINACIÓN DE LOS EJES PRINCIPALES Y DE LOS MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE UN CUERPO DE FORMA ARBITRARIA

El método de análisis que se describe en esta sección debe utilizarse cuando el cuerpo bajo consideración no tenga ninguna propiedad de simetría evidente.

Considérese la elipsoide de inercia del cuerpo en un punto dado O (figura B.15); sea $\mathbf{r}$ el radio vector de un punto P sobre la superficie de la elipsoide y sea $\mathbf{n}$ el vector unitario a lo largo de la normal a esa superficie en P. Se observa que los únicos puntos donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ son colineales son los puntos P_1, P_2 y P_3, donde los ejes principales intersecan la porción visible de la superficie de la elipsoide y los puntos correspondientes sobre el otro lado de la elipsoide.

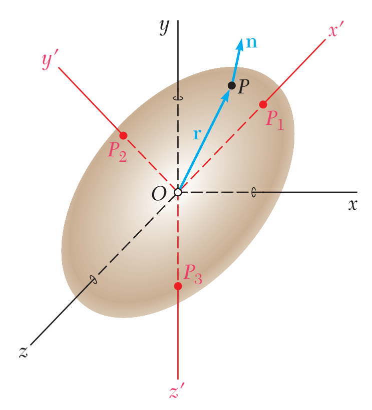


Figura B.15

Si se recuerda del cálculo que la dirección de la normal a una superficie de ecuación $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P(x, y, z)$ se define mediante el gradiente ∇f de la función f para obtener los puntos donde los ejes principales intersecan la superficie de la elipsoide de inercia, se debe, por lo tanto, escribir que $\mathbf{r}$ y ∇f son colineales,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \tag{B.24}$$

donde K es una constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}$$

Al recordar la ecuación (B.21) se puede observar que la función $f(x, y, z)$ correspondiente a la elipsoide de inercia es

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

Al sustituir $\mathbf{r}$ y ∇f en la ecuación (B.24) e igualar los coeficientes de los vectores unitarios, se escribe

$$\begin{aligned} I_x x \quad - I_{xy} y - I_{zx} z &= Kx \\ -I_{xy} x + I_y y \quad - I_{yz} z &= Ky \\ -I_{zx} x - I_{yz} y + I_z z \quad &= Kz \end{aligned} \tag{B.25}$$

Al dividir cada término por la distancia r de O a P, se obtienen ecuaciones similares que incluyen los cosenos directores λ_x, λ_y y λ_z:

$$\begin{aligned} I_x\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= K\lambda_x \\ -I_{xy}\lambda_x + I_y\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= K\lambda_y \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + I_z\lambda_z &= K\lambda_z \end{aligned} \tag{B.26}$$

La transposición de los miembros del lado derecho conduce a las siguientes ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} (I_x - K)\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= 0 \\ -I_{xy}\lambda_x + (I_y - K)\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= 0 \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + (I_z - K)\lambda_z &= 0 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución diferente de $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, su discriminante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \tag{B.28}$$

Al expandir este determinante y cambiar signos, se escribe

$$\begin{aligned} K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K \\ - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Ésta es una ecuación cúbica en K, la cual produce tres raíces reales y positivas K_1, K_2 y K_3.

Para obtener los cosenos directores del eje principal correspondiente a la raíz K_1, se sustituye K_1 por K en las ecuaciones (B.27). Puesto que estas ecuaciones ahora son linealmente dependientes, sólo dos de ellas pueden utilizarse de determinar λ_x, λ_y y λ_z. Sin embargo, es posible obtener una ecuación adicional al recordar en la sección 2.12 que los cosenos directores deben satisfacer la relación

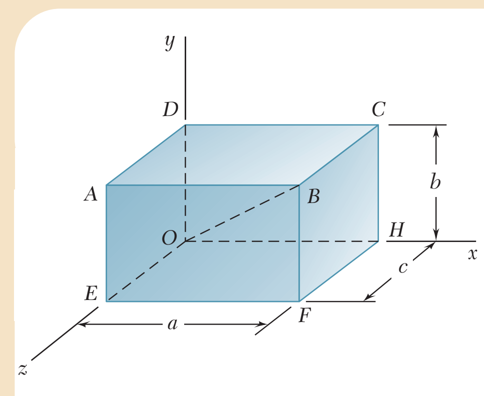
$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \tag{B.30}$$

Al repetir este procedimiento con K_2 y K_3, se obtienen los cosenos directores de los otros dos ejes principales.

Ahora se mostrará que *las raíces K_1, K_2 y K_3 de la ecuación (B.29) son los momentos principales de inercia del cuerpo dado*. Se sustituye la raíz K_1 para K en las ecuaciones (B.26), y para λ_x, λ_y y λ_z los valores correspondientes $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ de los cosenos directores; se satisfarán tres ecuaciones. Se multiplica ahora por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$, respectivamente, cada término en la primera, segunda y tercera ecuaciones y se suman las ecuaciones obtenidas mediante este procedimiento. Se escribe

$$\begin{aligned} I_x^2(\lambda_x)_1^2 + I_y^2(\lambda_y)_1^2 + I_z^2(\lambda_z)_1^2 - 2I_{xy}(\lambda_x)_1(\lambda_y)_1 \\ - 2I_{yz}(\lambda_y)_1(\lambda_z)_1 - 2I_{zx}(\lambda_z)_1(\lambda_x)_1 = K_1[(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2] \end{aligned}$$

Considerando la ecuación (B.19), se puede observar que el miembro del lado izquierdo de esta ecuación representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje principal correspondiente a K_1; éste es consecuentemente el momento principal de inercia correspondiente a esa raíz. Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (B.30), se advierte que el miembro del lado derecho se reduce a K_1. De tal manera la propia K es el momento principal de inercia. Se puede demostrar de la misma manera que K_2 y K_3 son los otros dos momentos principales de inercia del cuerpo.



PROBLEMA RESUELTO B.6

Considérese un prisma rectangular de masa m y lados a, b, c. Determine *a*) los momentos y productos de inercia del prisma con respecto a los ejes de coordenadas que se muestra, *b*) su momento de inercia con respecto a la diagonal OB.

SOLUCIÓN

a*) Momentos y productos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas.** ***Momentos de inercia. Al introducir los ejes centroidales x', y' y z', con respecto a los cuales los momentos de inercia se dan en la figura B.9, se aplica el teorema de los ejes paralelos:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad ◀$$

De modo similar, $\quad I_y = \frac{1}{3}m(c^2 + a^2) \qquad I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ ◀

Productos de inercia. Debido a la simetría, los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' son cero, y estos ejes son ejes principales de inercia. Al utilizar el teorema de los ejes paralelos, se tiene

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{1}{2}b) \qquad I_{xy} = \tfrac{1}{4}mab \quad ◀$$

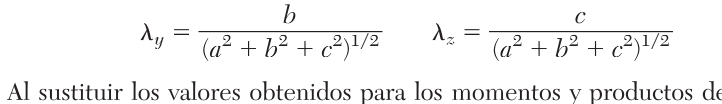
De modo similar, $\quad I_{yz} = \frac{1}{4}mbc \qquad I_{zx} = \frac{1}{4}mca$ ◀

***b*) Momento de inercia con respecto a *OB*.** De acuerdo con la ecuación (B.19):

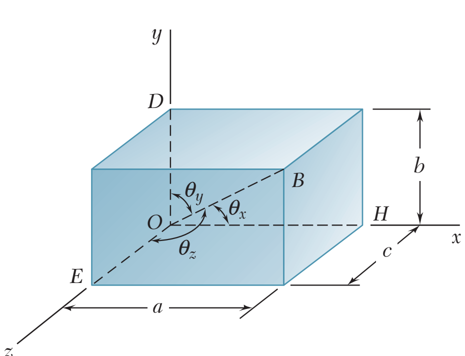
$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

donde los cosenos directores de OB son

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$



$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$



Al sustituir los valores obtenidos para los momentos y productos de inercia y para los cosenos directores en la ecuación para I_{OB}, se tiene

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}[\tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \tfrac{1}{2}ma^2b^2 - \tfrac{1}{2}mb^2c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2a^2]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$

Solución alternativa. El momento de inercia I_{OB} se puede obtener directamente de los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$, ya que la línea OB pasa por el centroide O'. Puesto que los ejes x', y' y z' son ejes principales de inercia, se utiliza la ecuación (B.23) para escribir

$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$
$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO B.7

Si $a = 3c$ y $b = 2c$ para el prisma rectangular del problema resuelto B.6, determine *a*) los momentos principales de inercia en el origen *O*, *b*) los ejes principales de inercia en *O*.

SOLUCIÓN

***a*) Momentos principales de inercia en el origen *O*.** Al sustituir $a = 3c$ y $b = 2c$ en la solución del problema resuelto B.6, se tiene

$$I_x = \tfrac{5}{3}mc^2 \qquad I_y = \tfrac{10}{3}mc^2 \qquad I_z = \tfrac{13}{3}mc^2$$
$$I_{xy} = \tfrac{3}{2}mc^2 \qquad I_{yz} = \tfrac{1}{2}mc^2 \qquad I_{zx} = \tfrac{3}{4}mc^2$$

Al sustituir los valores de los momentos y productos de inercia en la ecuación (B.29) y agrupando términos, se encuentra

$$K^3 - (\tfrac{28}{3}\,mc^2)K^2 + (\tfrac{3\,479}{144}m^2c^4)K - \tfrac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Luego se resuelve para las raíces de esta ecuación; del análisis de la sección B.18, se concluye que estas raíces son los momentos principales del cuerpo en el origen.

$$K_1 = 0.568867mc^2 \qquad K_2 = 4.20885mc^2 \qquad K_3 = 4.55562mc^2$$
$$K_1 = 0.569mc^2 \qquad K_2 = 4.21mc^2 \qquad K_3 = 4.56mc^2 \quad ◀$$

***b*) Ejes principales de inercia en *O*.** Para determinar la dirección de un eje principal de inercia, se sustituye primero el valor correspondiente de K en dos de las ecuaciones (B.27); las ecuaciones resultantes junto con la ecuación (B.30) constituyen un sistema de tres ecuaciones del cual es posible determinar los cosenos directores de los ejes principales correspondientes. De tal modo, para el primer momento principal de inercia K_1 se tiene:

$$(\tfrac{5}{3} - 0.568867)\,mc^2(\lambda_x)_1 - \tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$-\tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + (\tfrac{10}{3} - 0.568867)\,mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 = 1$$

Al resolver, se obtiene

$$(\lambda_x)_1 = 0.836600 \qquad (\lambda_y)_1 = 0.496001 \qquad (\lambda_z)_1 = 0.232557$$

Los ángulos que el primer eje principal de inercia forma con los ejes de coordenadas son entonces

$$(\theta_x)_1 = 33.2° \qquad (\theta_y)_1 = 60.3° \qquad (\theta_z)_1 = 76.6° \quad ◀$$

Utilizando el mismo conjunto de ecuaciones de manera sucesiva con K_2 y K_3, se encuentra que los ángulos asociados con el segundo y tercer momentos principales de inercia en el origen son, respectivamente,

$$(\theta_x)_2 = 57.8° \qquad (\theta_y)_2 = 146.6° \qquad (\theta_z)_2 = 98.0° \quad ◀$$

y

$$(\theta_x)_3 = 82.8° \qquad (\theta_y)_3 = 76.1° \qquad (\theta_z)_3 = 164.3° \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definieron los *productos de inercia de masa* I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de un cuerpo y se mostró la forma en la que se determinan los momentos de inercia de ese cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por el origen O. Se aprendió también cómo determinar en el origen O los *ejes principales de inercia* de un cuerpo y los *momentos principales de inercia* correspondientes.

1. *Determinación de los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto.* Los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto con respecto a los ejes de coordenadas pueden expresarse como las sumas de los productos de inercias de sus partes componentes con respecto a esos ejes. Para cada parte componente, podemos utilizar el teorema de los ejes paralelos y escribir las ecuaciones (B.20)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \qquad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \qquad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x}$$

donde las primas denotan los ejes centroidales de cada parte componente y donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ representan las coordenadas de su centro de gravedad. Hay que tener presente que el producto de inercia de masa puede ser positivo, negativo o cero, y asegurarse de tomar en cuenta los signos de $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$.

a) De las propiedades de simetría de una parte componente, es posible deducir que dos o los tres productos centroidales de inercia son cero. Por ejemplo, es posible verificar que para una placa delgada paralela al plano xy, un alambre que se encuentre en un plano paralelo al plano xy, un cuerpo con el plano de simetría paralelo al plano xy, y un cuerpo de simetría paralelo al eje z *los productos de inercia de masa* $\bar{I}_{y'z'}$ *e* $\bar{I}_{z'x'}$ *son cero*.

Para placas rectangulares, circulares o semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas; alambres rectos paralelos al eje de coordenadas; alambres circulares y semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas y primas rectangulares con ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas, *los productos de inercia* $I\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ *son todos cero*.

b) Los productos de inercia de masa que son diferentes de cero pueden calcularse a partir de las ecuaciones (B.18). Si bien, en general, se requiere una integración triple para determinar un producto de inercia de masa, es posible recurrir a una sola integración si es factible dividir el cuerpo dado en una serie de placas delgadas paralelas. Los cálculos en ese caso son similares a los que se analizaron en la lección anterior correspondiente a momentos de inercia.

2. *Cálculo del momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario OL.* En la sección B.6 se obtuvo una expresión para el momento de inercia I_{OL}, la cual se da en la ecuación (B.19). Antes de calcular I_{OL} se debe determi-

(*continúa*)

nar primero los momentos y productos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas dados, así como los cosenos directores del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL.

3. Cálculo de los momentos principales de inercia de un cuerpo y determinación de sus ejes principales de inercia. En la sección B.7 se vio que siempre es posible encontrar una orientación de los ejes de coordenadas, para lo cual los productos de inercia de masa sean cero. Estos ejes se conocen como los *ejes principales de inercia* y los momentos de inercia correspondientes como los *momentos principales de inercia* del cuerpo. En muchos casos, los ejes principales de inercia de un cuerpo se determinan a partir de sus propiedades de simetría. El procedimiento requerido para determinar los momentos principales y los ejes principales de un cuerpo sin ninguna propiedad de simetría evidente se estudiaron en la sección B.8 y se ilustraron en el problema resuelto B.7. Consiste en los siguientes pasos:

a) Desarrollo del determinante en la ecuación (B.28) y solución de la ecuación cúbica resultante. La solución puede obtenerse mediante ensayo y error o, de preferencia, con el auxilio de una calculadora científica avanzada o mediante el software de computadora adecuado. Las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo.

b) Para determinar la dirección de los ejes principales correspondientes a K_1 se sustituye este valor para K en dos de las ecuaciones (B.27) y se resuelven junto con la ecuación (B.30) para los cosenos directores del eje principal correspondiente a K_1.

c) Repetir este procedimiento con K_2 y K_3 para determinar las direcciones de los otros dos ejes principales. Como verificación de los cálculos, es posible verificar que el producto escalar de cualesquiera dos de los vectores unitarios a lo largo de los tres ejes obtenidos es cero y, en consecuencia, que estos ejes son perpendiculares entre sí.

d) Cuando un momento principal de inercia es aproximadamente igual a un momento de inercia con respecto a un eje de coordenadas, los valores calculados de los cosenos directores correspondientes serán muy sensibles al número de cifras significativas utilizadas en los cálculos. Para este caso se sugiere expresar las respuestas intermedias en términos de seis o siete cifras significativas para evitar posibles errores.

Problemas

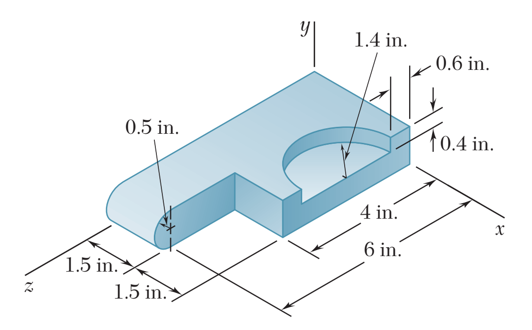


Figura PB.39

B.39 Determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del elemento de máquina de acero que se muestra. (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3.)

B.40 Determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del elemento de máquina de acero que se muestra. (El peso específico del acero es de 0.284 lb/in.^{3}.)

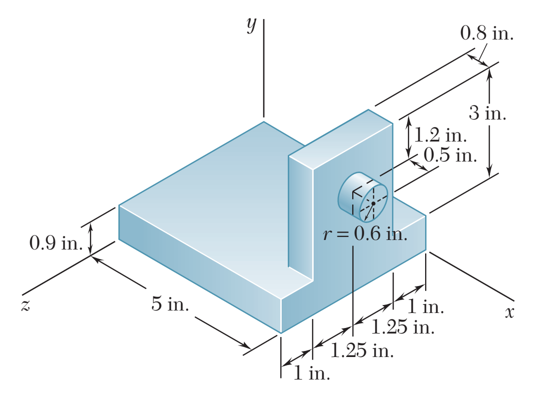


Figura PB.40

B.41 y B.42 Determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del componente de máquina de aluminio fundido que se muestra. (La densidad del aluminio es de 2 700 kg/m^3.)

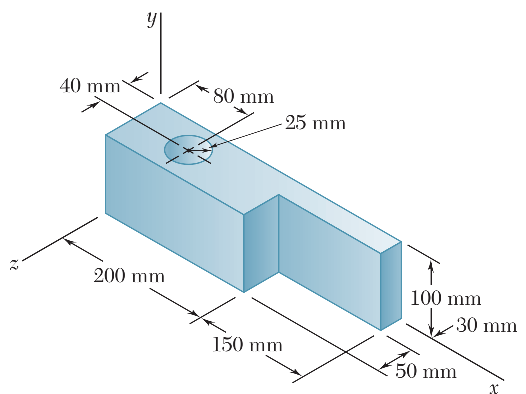


Figura PB.41

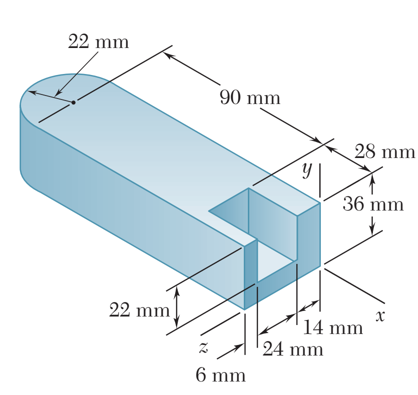


Figura PB.42

B.43 a B.45 Una sección de lámina de acero de 3 mm de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si la densidad del acero es de 7 860 kg/m^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del componente.

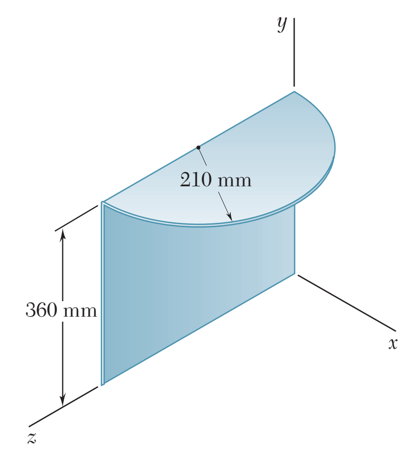


Figura PB.43

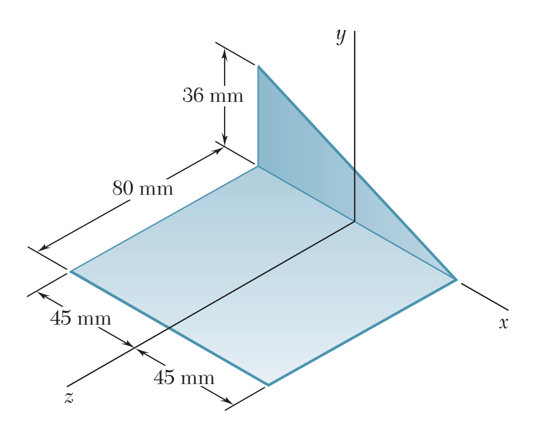


Figura PB.44

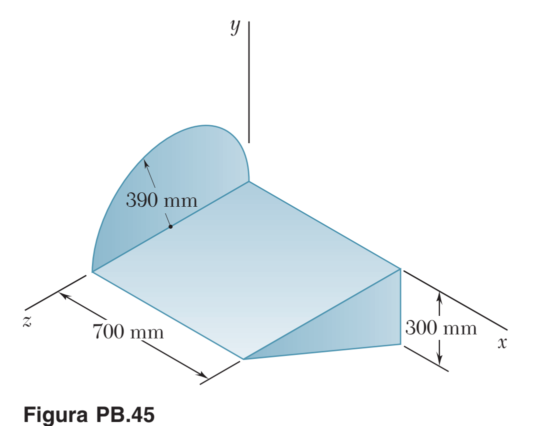


Figura PB.45

B.46 Una sección de lámina de acero con 0.08 in. de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del componente.

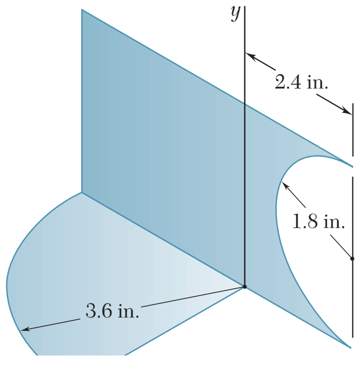


Figura PB.46

B.47 y *B.48* Se usa alambre de latón con un peso w por unidad de longitud para formar la figura que se ilustra. Determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

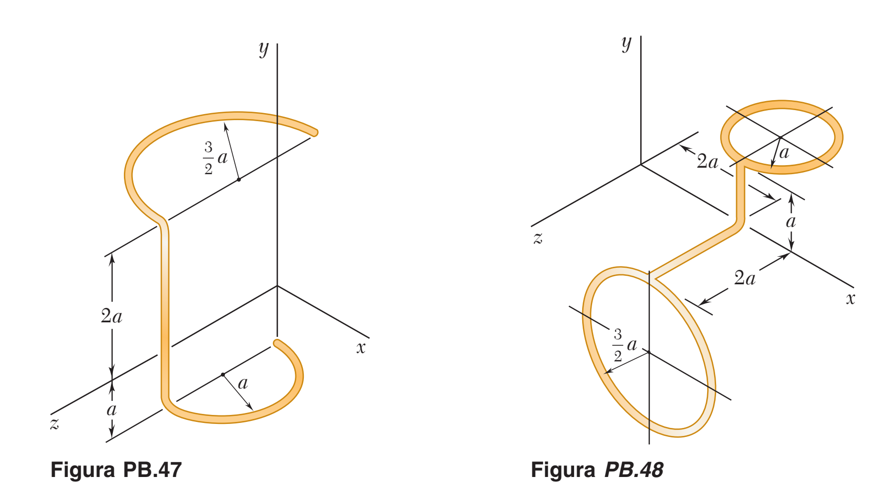


Figura PB.47

Figura *PB.48*

B.49 La figura mostrada se forma con alambre de aluminio de 0.075 in. de diámetro. Si el peso específico del aluminio es igual a 0.10 lb/in.^{3}, determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

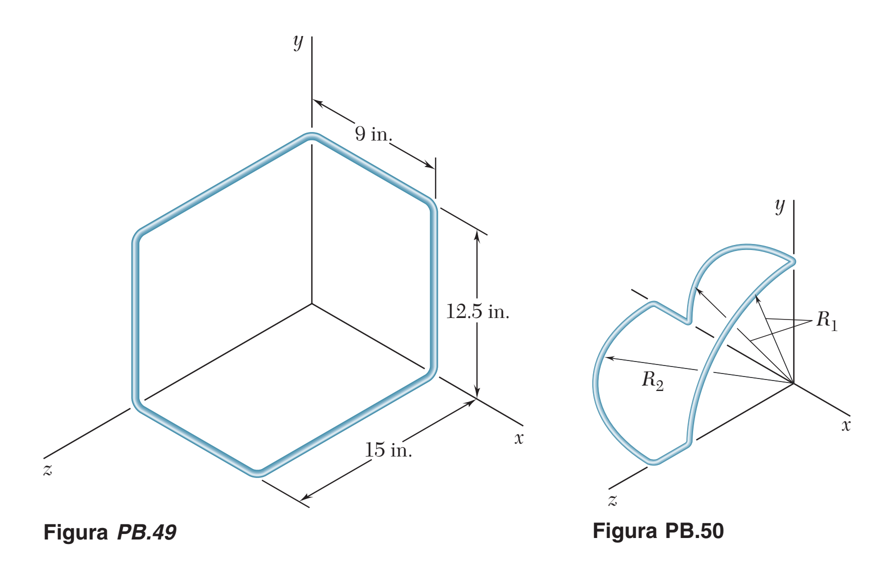


Figura *PB.49*

Figura PB.50

B.50 Un alambre delgado de aluminio de diámetro uniforme se utiliza para formar la figura que se muestra. Si se denota con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine los productos de inercia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

B.51 Complete la deducción de las ecuaciones (B.20), las cuales expresan el teorema de ejes paralelos para productos de inercia de masa.

B.52 Para el tetraedro homogéneo de masa m que se muestra, *a*) determine mediante integración directa el producto de inercia I_{zx}, *b*) deduzca I_{yz} e I_{xy} de los resultados que se obtuvieron en el inciso *a*).

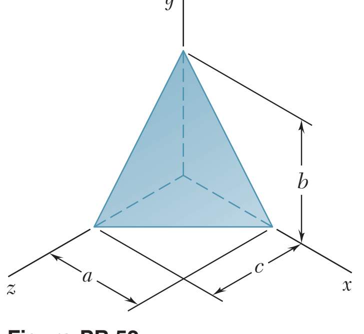


Figura PB.52

B.53 El cilindro circular homogéneo que se muestra tiene una masa m. Determine el momento de inercia del cilindro con respecto a la línea que une el origen O y el punto A que se localiza sobre el perímetro de la superficie superior del cilindro.

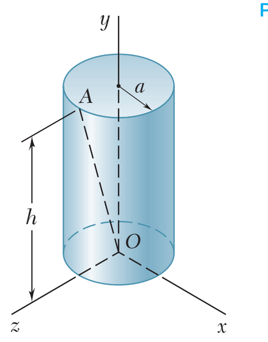


Figura PB.53

B.54 El cono circular homogéneo que se muestra tiene una masa m. Determine el momento de inercia del cono con respecto a la línea que une el origen O y el punto A.

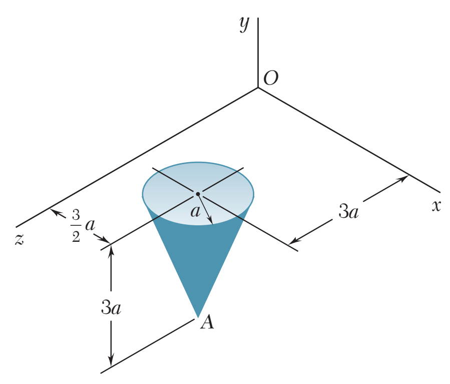


Figura PB.54

B.55 En el elemento de máquina que se muestra del problema B.31, determine su momento de inercia con respecto a la línea que une el origen O y el punto A.

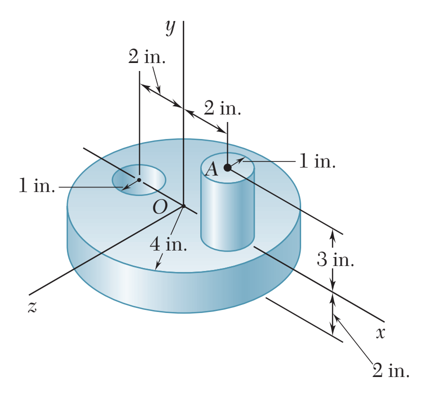


Figura PB.55

B.56 Determine el momento de inercia del elemento de máquina de acero de los problemas B.35 y B.39 con respecto al eje que pasa por el origen y que forma ángulos iguales con los ejes x, y y z.

B.57 La placa delgada y doblada que se muestra tiene densidad uniforme y peso W. Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A.

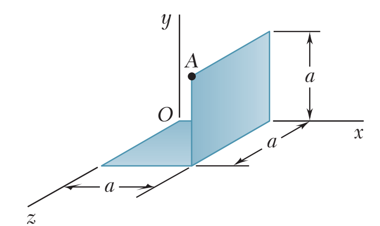


Figura PB.57

B.58 Una pieza de lámina metálica de espesor t y densidad ρ se corta y se dobla para formar la pieza mostrada. Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une los puntos A y B.

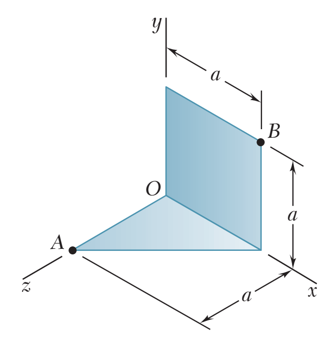


Figura PB.58

B.59 Determine el momento de inercia de masa de los componentes de máquina de los problemas B.26 y B.45 con respecto al eje que pasa por el origen caracterizado por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

B.60 a B.62 Para la figura de alambre del problema indicado, determine el momento de inercia de masa de la figura con respecto al eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

B.60 Problema B.38.
B.61 Problema B.37.
B.62 Problema B.36.

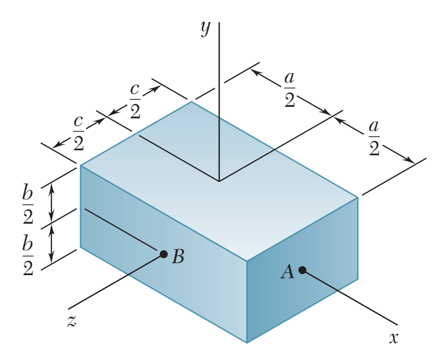


Figura PB.63

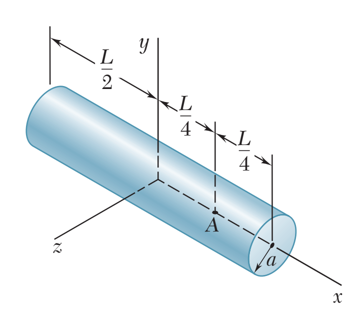


Figura PB.65

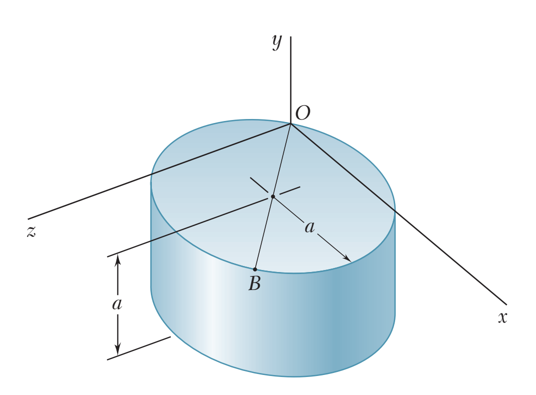


Figura PB.69

B.63 Para el prisma rectangular que se muestra, determine los valores de los cocientes b/a y c/a de manera que el elipsoide de inercia del prisma sea una esfera cuando se calcule *a*) en el punto *A*, *b*) en el punto *B*.

B.64 Para el cono circular recto de problema resuelto B.3, determine el valor de la razón a/h para el cual el elipsoide de inercia de cono es una esfera cuando se calcula *a*) en el ápice del cono, *b*) en el centro de la base del cono.

B.65 Para el cilindro circular homogéneo que se muestra, de radio *a* y longitud *L*, determine el valor de la razón a/L para la cual el elipsoide de inercia del cilindro es una esfera cuando se calcula *a*) en el centroide del cilindro, *b*) en el punto *A*.

B.66 Dado un cuerpo arbitrario y tres ejes rectangulares *x*, *y* y *z* demuestre que el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualesquiera de los tres ejes no puede ser mayor que la suma de los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los otros dos ejes. Esto es, demuestre que se satisface la desigualdad $I_x \leq I_y + I_z$ y las dos desigualdades similares. Además, demuestre que $I_y \geq \frac{1}{2}I_x$ si el cuerpo es un sólido de revolución homogénea, donde *x* es el eje de revolución y *y* es el eje transversal.

B.67 Considere un cubo de masa *m* y lado *a*. *a*) Demuestre que el elipsoide de inercia en el centro del cubo es una esfera, y utilice esta propiedad para determinar el momento de inercia del cubo con respecto a una de sus diagonales. *b*) Demuestre que el elipsoide de inercia en una de las esquinas del cubo es un elipsoide de revolución y determine los momentos principales del cubo en ese punto.

B.68 Dado un cuerpo homogéneo de masa *m* y forma arbitraria y tres ejes rectangulares *x*, *y* y *z* con origen en *O*, demuestre que la suma $I_x + I_y + I_z$ de los momentos de inercia del cuerpo no puede ser menor que la suma similar calculada para una esfera de la misma masa y el mismo material centrada en *O*. Además, utilizando los resultados del problema B.66, demuestre que si el cuerpo es un sólido de revolución, donde *x* es el eje de revolución, su momento de inercia I_y alrededor de un eje transversal *y* no puede ser más pequeño que $3ma^2/10$, donde *a* es el radio de la esfera de la misma masa y el mismo material.

***B.69** El cilindro circular homogéneo que se muestra tiene una masa *m* y el diámetro *OB* de su superficie superior forma ángulos de 45° con los ejes *x* y *z*. *a*) Determine los momentos principales de inercia del cilindro en el origen *O*. *b*) Calcule los ángulos que forman los ejes principales de inercia en *O* con los ejes coordenados. *c*) Trace el cilindro y muestre la orientación de los ejes principales de inercia relativa a los ejes *x*, *y* y *z*.

***B.70 a *B.74** Para la componente descrita en el problema indicado, determine *a*) los momentos principales de inercia en el origen, *b*) los ejes principales de inercia en el origen. Dibuje el cuerpo e indique la orientación de los ejes principales de inercia relativa a los ejes *x*, *y* y *z*.

***B.70** Problema B.55.
***B.71** Problemas B.35 y B.39.
***B.72** Problema B.57.
***B.73** Problema B.58.
***B.74** Problemas B.38 y B.60.

REPASO Y RESUMEN DEL APÉNDICE B

Momentos de inercia de masas

La segunda mitad del capítulo se dedicó a la determinación de *momentos de inercia de masas*, los cuales se encuentran en dinámica en problemas que implican la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. El momento de inercia de masa de un cuerpo con respecto a un eje AA' (figura B.16) se definió como

$$I = \int r^2\, dm \qquad \text{(B.1)}$$

donde r es la distancia desde AA' al elemento de masa [sección B.1]. El *radio de giro* del cuerpo se definió como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \qquad \text{(B.2)}$$

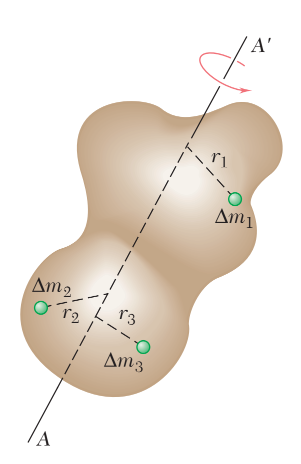


Figura B.16

Los momentos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas se expresaron como

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \qquad \text{(B.3)}$$
$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner

Se ha visto que el *teorema de los ejes paralelos* o *teorema de Steiner* se aplica también a momentos de inercia de masa [sección B.2]. De tal modo, el momento de inercia I del cuerpo con respecto a un eje arbitrario AA' (figura B.17) puede expresarse como

$$I = \bar{I} + md^2 \qquad \text{(B.6)}$$

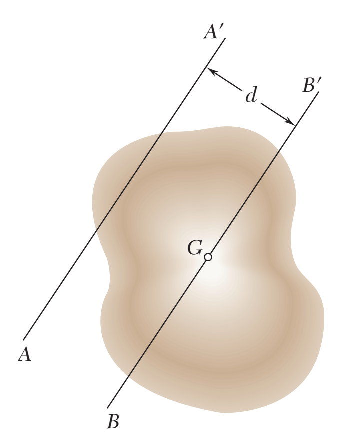


Figura B.17

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo al eje AA', m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los dos ejes.

Momentos de inercia de placas delgadas

Los momentos de inercia de *placas delgadas* pueden obtenerse con facilidad a partir de los momentos de inercia de sus áreas [sección B.3]. Se encontró que para una *placa rectangular* los momentos de inercia con respecto a los ejes que se muestran (figura B.18) son

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{B.12}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{B.13}$$

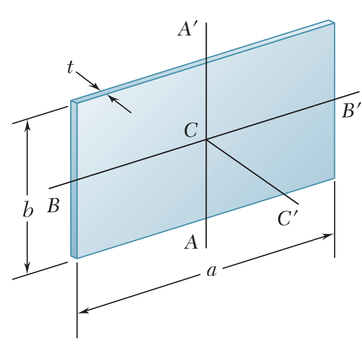


Figura B.18

Figura B.19

mientras que para una *placa circular* (figura B.19) son

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{B.14}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{B.15}$$

Cuerpos compuestos

Cuando un cuerpo posee *dos planos de simetría* suele ser posible utilizar una sola integración para determinar su momento de inercia con respecto a un eje dado para determinar un eje de masa dm como una placa delgada [problemas resueltos B.2 y B.3]. Por otro lado, cuando un cuerpo está compuesto por *varias formas geométricas comunes,* su momento de inercia con respecto a un eje dado puede obtenerse utilizando las fórmulas de la figura B.9 junto con el teorema de los ejes paralelos [problemas resueltos B.4 y B.5].

Momentos de inercia con respecto a un eje arbitrario

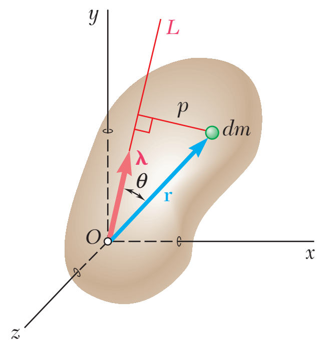


Figura B.20

En la última parte del capítulo, se ha aprendido a determinar el momento de inercia de un cuerpo *con respecto a un eje arbitrario OL* que se dibuja por el origen O [sección B.6]. Si se denota mediante λ_x, λ_y y λ_z las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL (figura B.20) se introducen los *productos de inercia*

$$I_{xy} = \int xy\,dm \qquad I_{yz} = \int yz\,dm \qquad I_{zx} = \int zx\,dm \tag{B.18}$$

se encuentra que el momento de inercia del cuerpo con respecto a OL podría expresarse como

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{B.19}$$

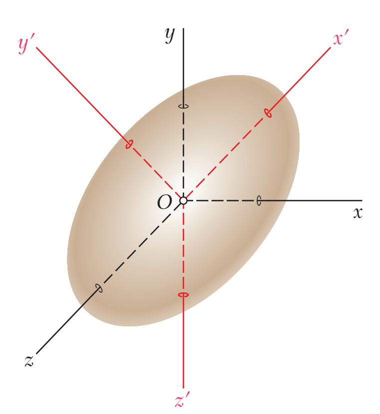


Figura B.21

Elipsoide de inercia

Al graficar un punto Q a lo largo de cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O [sección B.7), se obtuvo la superficie de una elipsoide, lo que se conoce como la *elipsoide de inercia* del cuerpo en el punto O. Los ejes principales x', y' y z' de esta elipsoide (figura B.21) son los *ejes principales de inercia* del cuerpo; esto es, los productos de inercia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ del cuerpo con respecto a estos ejes son cero. Hay muchas situaciones en las que un eje principal de inercia de un cuerpo puede deducirse de las propiedades de simetría de este mismo. Si se eligen estos ejes como los ejes de coordenadas, es posible expresar entonces I_{OL} como

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \qquad \text{(B.23)}$$

Ejes principales de inercia
Momentos principales de inercia

donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O.

Cuando no es posible obtener los ejes principales de inercia mediante observación [sección B.7], es necesario resolver la ecuación cúbica

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K$$
$$- (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \qquad \text{(B.29)}$$

Se encontró [sección B.8] que las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo dado. Los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ de los ejes principales correspondientes al momento principal de inercia K_1 se determinan entonces sustituyendo K_1 en las ecuaciones (B.27) y al resolver de manera simultánea dos de estas ecuaciones y la ecuación (B.30). El mismo procedimiento se repite entonces utilizando K_2 y K_3 para determinar los cosenos directores de los otros dos ejes principales [problema resuelto B.7].



A P É N D I C E

C

Fundamentos para la certificación en ingeniería en Estados Unidos

A los ingenieros se les solicita que obtengan una licencia cuando su trabajo afecta en forma directa la salud, la seguridad o el bienestar públicos. Se intenta asegurar que los ingenieros alcancen un mínimo de calificación, la cual incluye competencia, habilidad, experiencia y carácter. El proceso de certificación incluye un examen inicial, llamado *Fundamentals of Engineering Examination*, acerca de la experiencia profesional, y un segundo examen denominado *Principles and Practice of Engineering.* Quienes aprueban estos exámenes obtienen la certificación de *Ingeniero profesional*. Las pruebas se desarrollan bajo los auspicios del *National Council of Examiners for Engineering and Surveying.*

El primer examen, *Fundamentals of Engineering Examination*, se puede presentar justo antes o después de la graduación de un programa de estudios de cuatro años. El examen analiza los contenidos de un programa normal de licenciatura en ingeniería que incluye dinámica. Los temas que aborda dicho examen se cubren en este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas temáticas, en referencia a las secciones del libro donde aparecen. También incluye problemas que pueden resolverse con el objetivo de repasar el material.

Cinemática (11.1-11.6; 11.9-11.14; 15.2-15.8)
Problemas: 11.4, 11.5, 11.34, 11.61, 11.69, 11.97, 15.6, 15.30, 15.40, 15.57, 15.65, 15.83, 15.118, 15.141

Fuerza, masa y aceleración (12.1-12.6; 16.2-16.8)
Problemas: 12.5, 12.6, 12.28, 12.30, 12.37, 12.46, 12.51, 12.56, 16.3, 16.5, 16.11, 16.25, 16.30, 16.50, 16.58, 16.63, 16.76, 16.85, 16.138

Trabajo y energía (13.1-13.6; 13.8; 17.1-17.7)
Problemas: 13.5, 13.7, 13.15, 13.22, 13.39, 13.41, 13.50, 13.62, 13.64, 13.68, 17.1, 17.2, 17.18, 17.28

Impulso y cantidad de movimiento (13.10-13.15; 17.8-17.12)
Problemas: 13.121, 13.126, 13.129, 13.134, 13.146, 13.157, 13.159, 13.170, 17.53, 17.59, 17.69, 17.74, 17.96, 17.102, 17.106

Vibraciones (19.1-19.3; 19.5-19.7)
Problemas: 19.1, 19.3, 19.11, 19.17, 19.23, 19.27, 19.50, 19.55, 19.66, 19.76, 19.83, 19.85, 19.101, 19.105, 19.115

Fricción (En cada uno de los temas mencionados anteriormente se presentan problemas que implican fricción)

CRÉDITOS DE FOTOGRAFÍAS

CAPÍTULO 11

Portada: © NASA/Getty Images RF; **Fotografía 11.1**: U.S Department of Energy; **Fotografía 11.2:** © Getty Images RF/Digital Vision; **Fotografía 11.3**: © Brand X Pictures/Jupiter Images; **Fotografía 11.4**: © Digital Vision/Getty Images RF; **Fotografía 11.5**: © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 11.6**: © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 12

Portada: © Lester Lefkowitz/CORBIS: **Fotografía 12.1**: © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 12.2**: © Brand X Pictures/PunchStock RF; **Fotografía 12.3**: © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 12.4**: © Russell Illig/Getty Images RF; **Fotografía 12.5**: © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 13

Portada: © Tom Miles; **Fotografía 13.2**: © Scandia National Laboratories/Getty Images RF; **Fotografía 13.2**: © Andrew Davidhazy/RIT; **Fotografía 13.3**: © Tom McCarthy/Photolibrary.

CAPÍTULO 14

Portada: © XCOR; **Fotografía 14.1**: NASA; **Fotografía 14.2**: © Royalty-Free/CORBIS: **Fotografía 14.3**: © Brand X Pictures/PunchStock.

CAPÍTULO 15

Portada (motor): Cortesía de Wartsila Corporation: **Portada (barco)**: Cortesía de A. P. Moller-Maersk: **Fotografía 15.1**: © Chris Hellier/CORBIS; **Fotografía 15.2**: © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 15.3**: © Joseph Nettis/Stock Boston Inc.; **Fotografía 15.4**: © AGE Fotostock/Photolibrary; **Fotografía 15.5**: © George Tiedeman/NewSport/CORBIS; **Fotografía 15.6**: © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 15.7**: Cortesía de Tangen Drives; **Fotografía 15.8**: © Northrop Gruimman/Index Stock Imagery/Jupiter Images; **Fotografía 15.9**: © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 16

Portada: © Getty Images RF; **Fotografía 16.1**: © Getty Images RF; **Fotografía 16.2**: Cortesía de Samsung Semiconductor, Inc.; **Fotografía 16.3**: © Tony Arruza/CORBlS: **Fotografía 16.4**: © Robert E. Daemmrich.

CAPÍTULO 17

Portada: © AP Photo/Matt Dunham; **Fotografía 17.1**: © Richard McDowell/Alamy; **Fotografía 17.2**: © Phillip Cornwell; **Fotografía 17.3a,b**: © Fotografía de Leah; **Fotografía 17.4**: © Chuck Savage/CORBIS.

CAPÍTULO 18

Portada: © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 18.1**: © SuperStock; **Fotografía 18.2**: © Matthias Kulka/COBBIS; **Fotografía 18.3**: © Roger Ressmeyer/CORBIS; **Fotografía 18.4**: Cortesía de Caterpillar Engine Division; **Fotografía 18.5**: © Lawrence Manning/CORBIS RF.

CAPÍTULO 19

Portada: © Peter Tsai Photography; **Fotografía 19.1**: © Tony Freeman/Index Stock; **Fotografía 19.2**: © The McGraw-Hill Companies, Inc./Fotografía de Sabina Dowell; **Fotografía 19.3**: Cortesía de MTS Systems Corporation.

Índice analítico

Respuestas a los problemas

En esta página y las siguientes se dan las respuestas a los problemas cuyo número está en caracteres normales. Las respuestas a los problemas con número en letras cursivas no se proporcionan en esta lista.

CAPÍTULO 11

11.1 −66.0 m, 149.0 m/s, 228 m/s^2.
11.2 3.00 m, −7.00 m/s.
11.3 3.00 s, −59.5 ft, 25.0 ft/s^2.
11.4 248 in., 72.0 in./s, −383 in./s^2.
11.5 0.667 s, 0.259 m, −8.56 m/s.
11.6 *a*) 1.000 s y 4.00 s. *b*) 1.500 m, 24.5 m.
11.9 *a*) 4.00 s. *b*) −56.0 m/s, 260 m.
11.10 $x = t^4/108 + 10t + 24$, $v = t^3/27 + 10$.
11.11 −33.0 in./s, 2.00 s, 87.7 in.
11.12 *a*) 3.00 ft/s^4. *b*) $v = \; t^3 - 32)$ ft/s, $x = \; t^4/4 - 32t + 64)$ ft.
11.15 *a*) 5.89 ft/s. *b*) 1.772 ft.
11.16 −36.8 ft^2, 1.832 s^{-2}.
11.17 *a*) 0.0900 s^{-2}. *b*) ±16.97 mm/s.
11.18 *a*) 48.0 m^3/s^2. *b*) 21.6 m. *c*) 4.90 m/s.
11.21 *a*) 22.5 m. *b*) 38.4 m/s.
11.22 *a*) 29.3 m/s. *b*) 0.947 s.
11.23 *a*) 50.0 in. *b*) ∞. *c*) 0.866 s.
11.24 3.33 ft/s.
11.25 *a*) 0.1457 s/m. *b*) 145.2 m. *c*) 6.86 m/s.
11.26 *a*) 3.33 m. *b*) 2.22 s. *c*) 1.667 s.
11.27 *a*) 7.15 mi. *b*) -2.75×10^{-6} ft/s^2. *c*) 49.9 min.
11.28 *a*) −0.0525 m/s^2. *b*) 6.17 s.
11.31 *a*) 2.36 v_0T, $\pi v_0/T$. *b*) 0.363 v_0.
11.33 *a*) 1.500 m/s^2. *b*) 10.00 s.
11.34 *a*) 25.0 m/s. *b*) 19.00 m/s. *c*) 36.8 m.
11.35 *a*) 2.71 s. *b*) 50.4 mi/h.
11.36 *a*) 252 ft/s. *b*) 1 076 ft.
11.39 *a*) 0.500 km. *b*) 42.9 km/h.
11.40 *a*) −2.10 m/s^2, 2.06 m/s^2. *b*) 2.59 s antes de que *A* llegue a la zona de intercambio.
11.41 *a*) 15.05 s, 734 ft. *b*) 42.5 mi/h, 23.7 mi/h.
11.42 *a*) 5.50 ft/s^2. *b*) 9.25 ft/s^2.
11.43 *a*) 3.00 s. *b*) 4.00 ft/s^2.
11.44 *a*) −0.250 m/s^2, 0.300 m/s^2. *b*) 20.8 s. *c*) 85.5 km/h.
11.46 *a*) 17.36 ft/s^2 ↙, 3.47 ft/s^2 ↙. *b*) 20.1 ft. *c*) 9.64 ft/s.
11.47 *a*) 2.00 m/s ↑. *b*) 2.00 m/s ↓. *c*) 8.00 m/s ↑.
11.48 *a*) 20.0 m/s^2 →, 6.67 m/s^2 ↓. *b*) 13.33 m/s ↓, 13.33 m ↓.
11.49 *a*) 30.0 ft/s ↑. *b*) 15.00 ft/s ↑. *c*) 45.0 ft/s ↑. *d*) 30.0 ft/s ↑.
11.50 *a*) 2.40 ft/s^2 ↑, 4.80 ft/s^2 ↓. *b*) 12.00 ft/s ↑.
11.53 *a*) 200 mm/s →. *b*) 600 mm/s →. *c*) 200 mm/s ←. *d*) 400 mm/s →.
11.54 *a*) 13.33 mm/s^2 ←, 20.0 mm/s^2 ←. *b*) 13.33 mm/s^2 →. *c*) 70.0 mm/s →, 440 mm →.
11.55 *a*) 10.00 mm/s →, *b*) 6.00 mm/s^2 →, 2.00 mm/s^2 ↑. *c*) 175 mm ↑.
11.56 *a*) 240 mm/s^2 ↓, 345 mm/s^2 ↑. *b*) 130 mm/s →, 43.3 mm/s ↑. *c*) 728 mm →.
11.57 *a*) 2.00 in./s^2 ↑, 3.00 in/s^2 ↓. *b*) 0.667 s. *c*) 0.667 in. ↑.
11.58 *a*) $\; 1 - 6t^2 \,)/4$ in./s^2. *b*) 9.06 in.
11.61 *a*) Los valores correspondientes de (t, v, x) son (0, −18 ft/s, 0), (4 s, −6 ft/s, −45 ft), (10 s, 30 ft/s, 24 ft), (20 s, −20 ft/s, 74 ft). *b*) 12 ft/s, 74 ft, 176 ft. 20.0 ft/s.
11.62 Consulte el problema 11.61 para ver las gráficas. *a*) 30.0 ft/s, *b*) 30 ft/s, 114 ft.
11.63 *a*) $0 < t < 10$ s, $a = 0$; 10 s $< t <$ 26 s, $a = -5$ ft/s^2; 26 s $< t <$ 41 s, $a = 0$; 41 s $< t <$ 46 s, $a = 3$ ft/s^2; $t >$ 46 s, $a = 0$; $x = -540$ ft en $t = 0$, $x = 60$ ft en $t = 10$ s, $x = 380$ ft en $t = 26$ s, $x = 80$ ft en $t = 41$ s, $x = 17.5$ ft en $t = 46$ s, $x = -2.5$ ft en $t = 50$ s. *b*) 1 383 ft. *c*) 9.00 s, 49.5 s.
11.64 *a*) Igual que en el problema 11.63. *b*) 420 ft. *c*) 10.69 s, 40.0 s.
11.65 *a*) 44.8 s. *b*) 103.3 m/s^2 ↑.
11.66 207 mm/s
11.67 *a*) 10.5 s. *b*) curvas *v-t* y *x-t*.
11.69 3.96 m/s^2.
11.70 *a*) 0.600 s. *b*) 0.200 m/s, 2.84 m.
11.71 9.39 s.
11.72 8.54 s, 58.3 mi/h.
11.73 1.525 s.
11.74 *a*) 50.0 m/s, 1 194 m. *b*) 59.25 m/s.
11.77 *a*) 18.00 s. *b*) 178.8 m, *c*) 34.7 km/h.
11.78 *b*) 3.75 m.
11.79 *a*) 2.00 s. *b*) 1.200 ft/s, 0.600 ft/s.
11.80 *a*) 5.01 min. *b*) 19.18 mi/h.
11.83 *a*) 2.96 s. *b*) 224 ft.
11.84 *a*) 163.0 in./s^2. *b*) 114.3 in./s^2.
11.86 104 ft.
11.89 *a*) 8.60 mm/s ∡ 35.5°, 17.20 mm/s^2 ∡ 35.5°. *b*) 33.4 mm/s ∡ 8.6°, 39.3 mm/s^2 ∡ 14.7°.
11.90 *a*) 0, 159.1 m/s^2 ∡ 82.9°. *b*) 6.28 m/s →, 157.9 m/s^2 ↓.
11.91 *a*) 5.37 m/s. *b*) $t = 2.80$ s, $x = -7.56$ m, $y = 5.52$ m, **v** = 5.37 m/s^2 ∡ 63.4°.
11.92 *a*) 2.00 in./s, 6.00 in./s. *b*) Para $v_{mín}$, $t = 2N\pi$ s, $x = 8N\pi$ in., $y = 2$ in., **v** = (2.00 in./s → o bien 2.00 in./s ←. Para $v_{máx}$, $t = (2N + 1)\pi$ s, $x = 4(2N + 1)\pi$, $y = 6$ in., **v** = 6.00 in./s → o bien 6.00 in./s ←.
11.95 $\sqrt{R^2 1 \;\; + \omega_n^2 t^2) + c^2}$, $R\omega_n\sqrt{4 + \omega_n^2 t^2}$.
11.96 *a*) 3.00 ft/s, 3.61 ft/s^2. *b*) 3.82 s.
11.97 353 m.
11.98 *a*) 15.50 m/s. *b*) 5.12 m.
11.99 15.38 ft/s $\leq v_0 \leq$ 35.0 ft/s.
11.100 *a*) 70.4 mi/h $\leq v_0 \leq$ 89.4 mi/h. *b*) 6.89°, 4.29°.
11.101 *a*) 2.87 m > 2.43 m. *b*) 7.01 m de la red.
11.102 0.244 m ≤ h ≤ 0.386 m.
11.103 726 ft o bien 242 yd.
11.104 $0 \leq d \leq$ 1.737 ft.
11.105 23.8 ft/s.
11.106 *a*) 29.8 ft/s. *b*) 29.6 ft/s.
11.107 10.64 m/s $\leq v_0 \leq$ 14.48 m/s.
11.108 0.678 m/s $\leq v_0 \leq$ 1.211 m/s.
11.111 *a*) 4.90°. *b*) 963 ft. *c*) 16.24 s.
11.112 *a*) 14.66°. *b*) 0.1074 s.

11.113 *a*) 10.38°. *b*) 9.74°.
11.115 *a*) 45.0°, 6.52 m. *b*) 58.2°, 5.84 m.
11.117 *a*) 1.540 m/s ∠ 38.6°. *b*) 1.503 m/s ∠ 58.3°.
11.118 5.05 m/s ∠ 55.8°.
11.119 1.737 nudos ∠ 18.41°.
11.120 *a*) 2.67 mi/h ∠ 12.97°. *b*) 258 mi/h ∠ 76.4°. *c*) 65 m ∠ 40°.
11.123 *a*) 8.53 in./s ∠ 54.1°. *b*) 6.40 in./s^2 ∠ 54.1°.
11.124 *a*) 7.01 in./s ∠ 60°. *b*) 11.69 in./s^2 ∠ 60.6°.
11.125 *a*) 0.835 mm/s^2 ∠ 75°. *b*) 8.35 mm/s ∠ 75°.
11.126 *a*) 0.958 m/s^2 ∠ 23.6°. *b*) 1.917 m/s ∠ 23.6°.
11.127 10.54 ft/s ∠ 81.3°.
11.128 *a*) 5.18 ft/s ∠ 15°. *b*) 1.232 ft/s ∠ 15°.
11.129 17.49 km/h ∠ 59.0°.
11.130 15.79 km/h ∠ 26.0°.
11.133 28.0 m/s.
11.134 *a*) 250 m. *b*) 82.9 km/h.
11.135 1 815 ft.
11.136 59.9 mi/h.
11.137 *a*) 20.0 mm/s^2. *b*) 26.8 mm/s^2.
11.138 *a*) 178.9 m. *b*) 1.118 m/s^2.
11.139 2.53 ft/s^2.
11.141 15.95 ft/s^2.
11.143 *a*) 281 m. *b*) 209 m.
11.144 *a*) 7.99 m/s ∠ 40°. *b*) 3.82 m.
11.145 *a*) 6.75 ft. *b*) 0.1170 ft.
11.146 *a*) 1.739 ft. *b*) 27.9 ft.
11.147 $\rho_B = v_B^2/9v_A$.
11.148 18.17 m/s ∠ 4.04° y 18.17 m/s ∠ 4.04°.
11.151 $(R^2 + c^2)/2\omega_n R$
11.152 2.50 ft.
11.153 25.8×10^3 km/h.
11.154 12.56×10^3 km/h.
11.155 153.3×10^3 km/h.
11.156 92.9×10^6 mi.
11.157 885×10^6 mi.
11.158 1.606 h.
11.161 *a*) $3\pi b\ \mathbf{e}_\theta, -4\pi^2 b\ \mathbf{e}_r$. *b*) $\theta = 2N\pi$, N = 0, 1, 2, ...
11.162 *a*) $2b\omega$, $4b\omega^2$. *b*) $\rho = b$, un círculo.
11.163 *a*) $-(6\pi$ in./$s^2)\mathbf{e}_r$, $(80\pi$ in./$s^2)\mathbf{e}_\theta$. *b*) 0.
11.165 *a*) $(2\pi$ m/s$)\mathbf{e}_\theta, -4\pi^2$ m/$s^2)\mathbf{e}_r$
b) $-(\pi/2$ m/s$)\mathbf{e}_r + (\pi$ m/s$)\mathbf{e}_\theta, -(\pi^2/2$ m/$s^2)\mathbf{e}_r - (\pi^2$ m/$s^2)\mathbf{e}_\theta$.
11.166 *a*) $2abt$, $2ab\sqrt{1 + 4b^2t^4}$. *b*) $\rho = a$ (círculo)
11.169 $\dot{d}\theta \tan\beta \sec\beta/\tan\ \beta\cos\theta - \text{sen}\ \theta)^2$.
11.170 $v_0 \cos\beta \tan\ \beta\cos\theta + \text{sen}\ \theta)^2/h$.
11.171 185.7 km/h.
11.172 61.8 mi/h, 49.7°.
11.175 $(b\omega^2/\theta^3)\sqrt{4 + \theta^4}$.
11.176 $(1 + b^2)\ \omega^2 e^{b\theta}$.
11.180 $\tan^{-1}[R2\ + \omega_N^2 t^2)/c\sqrt{4 + \omega_N^2 t^2}]$
11.181 *a*) $\theta_x = 90°$, $\theta_y = 123.7°$, $\theta_z = 33.7°$. *b*) $\theta_x = 103.4°$, $\theta_y = 134.3°$, $\theta_z = 47.4°$.
11.182 *a*) 1.00 s, 4.00 s. *b*) 1.50 m, 24.5 m.
11.184 *a*) -2.43×10^6 ft/s^2. *b*) 1.366×10^{-3} s.
11.185 *a*) 11.62 s, 69.7 ft. *b*) 18.30 ft/s.
11.186 *a*) 3.00 s. *b*) 56.25 mm arriba de su posición inicial.
11.187 $\mathbf{v}_A = 12.5$ mm/s ↑, $\mathbf{v}_B = 75$ mm/s ↓, $\mathbf{v}_C = 175$ mm/s ↓.
11.189 17.88 km/h ∠ 36.4°.
11.190 2.44 ft/s^2.
11.193 $\dot{r} = 120$ m/s, $\ddot{r} = 34.8$ m/s^2, $\dot{\theta} = -0.0900$ rad/s, $\ddot{\theta} = -0.0156$ rad/s^2.

CAPÍTULO 12

12.1 *a*) 4.987 lb en 0°, 5.000 lb en 45°, 5.013 lb en 90°. *b*) 5.000 lb en todas las latitudes, *c*) 0.1554 lb · s^2/ft en todas las latitudes.
12.2 *a*) 3.24 N. *b*) 2.00 kg.
12.3 1.300×10^6 kg · m/s.
12.5 *a*) 6.67 m/s. *b*) 0.0755.
12.6 *a*) 225 km/h. *b*) 187.1 km/h.
12.7 0.242 mi.
12.8 *a*) 135.3 ft. *b*) 155.8 ft.
12.9 419 N al inicio y 301 N durante el deslizamiento.
12.10 0.414 m/s^2 ∠ 15°.
12.11 *a*) A: 2.49 m/s^2 →, B: 0.831 m/s^2 ↓. *b*) 74.8 N.
12.12 *a*) A: 0.698 m/s^2 →, B: 0.233 m/s^2 ↓. *b*) 79.8 N.
12.15 *a*) 0.986 m/s^2 ∠ 25°. *b*) 51.7 N.
12.16 *a*) 1.794 m/s^2 ∠ 25°. *b*) 58.2 N.
12.17 *a*) 0.997 ft/s^2 ∠ 15°, 1.619 ft/s^2 ∠ 15°.
12.19 *Sistema 1:* *a*) 10.73 ft/s^2. *b*) 14.65 ft/s. *c*) 1.864 s.
Sistema 2: *a*) 16.10 ft/s^2. *b*) 17.94 ft/s. *c*) 1.242 s.
Sistema 3: *a*) 0.749 ft/s^2. *b*) 3.87 ft/s. *c*) 26.7 s.
12.20 *a*) 1.962 m/s^2 ↑. *b*) 39.1 N.
12.21 *a*) 6.63 m/s^2 ←. *b*) 0.321 m →.
12.22 *a*) 14.53 m/s^2 ∠ 65°. *b*) 4.24 m/s^2 ∠ 65°.
12.24 $0.347\ m_0 v_0^2/F_0$.
12.26 $\sqrt{k/m}\ (\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)$.
12.27 119.5 mi/h.
12.28 *a*) 33.6 N. *b*) $\mathbf{a}_A = 4.76$ m/s^2 →, $\mathbf{a}_B = 3.08$ m/s^2 ↓, $\mathbf{a}_C = 1.401$ m/s^2 ←.
12.29 *a*) 36.0 N. *b*) $\mathbf{a}_A = 5.23$ m/s^2 →, $\mathbf{a}_B = 2.62$ m/s^2 ↓. $\mathbf{a}_C = 0$.
12.30 *a*) $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_D = 2.76$ ft/s^2 ↓, $\mathbf{a}_C = 11.04$ ft/s^2 ↑. *b*) 18.80 lb.
12.31 *a*) 24.2 ft/s ↓. *b*) 17.25 ft/s ↑.
12.36 *a*) 80.4 N. *b*) 2.30 m/s.
12.37 *a*) 49.9°. *b*) 6.85 N.
12.38 8.25 ft/s.
12.40 2.77 m/s $< v <$ 4.36 m/s.
12.42 9.00 ft/s $< v_C <$ 12.31 ft/s.
12.43 2.42 ft/s $< v <$ 13.85 ft/s.
12.44 *a*) 131.7 N. *b*) 88.4 N.
12.45 *a*) 553 N. *b*) 659 N.
12.46 *a*) 668 ft. *b*) 120.0 lb↑.
12.47 *a*) 6.95 ft/s^2 ∠ 20°. *b*) 8.87 ft/s^2 ∠ 20°.
12.48 *a*) 2.905 N. *b*) 13.09°.
12.49 1 126 N ∠ 25.6°.
12.50 $24.1° \leq \theta \leq 155.9°$.
12.51 *a*) 43.9°. *b*) 0.390. *c*) 78.8 km/h.
12.53 *a*) 0.1858 W. *b*) 10.28°.
12.55 468 mm.
12.56 2.36 m/s $\leq v \leq$ 4.99 m/s.
12.57 *a*) 0.1904, movimiento inminente hacia abajo, *b*) 0.349, movimiento inminente hacia arriba.
12.58 *a*) No se desliza 1.926 lb ∠ 80°. *b*) Se desliza hacia abajo. 1.123 lb ∠ 40°.
12.61 *a*) 0.1834. *b*) 10.39° para el movimiento inminente hacia la izquierda, 169.6° para el movimiento inminente hacia la derecha.
12.62 *a*) 2.98 ft/s. *b*) 19.29° para el movimiento inminente hacia la izquierda, 160.7° para el movimiento inminente hacia la derecha.
12.64 $1.054\sqrt{eV/mv_0^2}$.
12.65 1.333 l.
12.66 *a*) $F_r = -10.73$ N, $F_\theta = 0.754$ N. *b*) $F_r = -4.44$ N, $F_\theta = 1.118$ N.
12.67 $F_r = 0.0523$ N, $F_\theta = 0.432$ N.

12.68 *a)* $F_r = -1.217$ lb, $F_\theta = 0.248$ lb.
b) $F_r = -0.618$ lb, $F_\theta = -0.0621$ lb.
12.69 *a)* $mc^2(r_0 - kt)\, t^2$. *b)* $mc(r_0 - 3kt)$.
12.70 2.00 s.
12.71 $\mathbf{P} = (5.76 \text{ N}) \tan\theta \sec^3\theta$ ⦪ θ
$\mathbf{Q} = (5.76 \text{ N}) \tan^3\theta \sec^3\theta \rightarrow$
12.76 $v_r = v_0 \operatorname{sen} 2\theta/\sqrt{\cos 2\theta}$. $v_\theta = v_0\sqrt{\cos 2\theta}$.
12.79 *a)* $r = (g\tau^2 R^2/4\pi^2)^{1/3}$. *b)* $g = 24.8$ m/s^2.
12.80 *a)* 35 800 km y 22 240 mi, *b)* 3 070 m/s y 10 090 ft/s.
12.81 4.13×10^{21} lb · s^2/ft.
12.82 *a)* 1 h 57 min. *b)* 3 380 km.
12.84 *a)* 86.9×10^{24} kg. *b)* 436 000 km.
12.86 *a)* 5 280 ft/s. *b)* 8 000 ft/s.
12.87 *a)* 1 551 m/s. *b)* 15.8 m/s.
12.88 5 000 m/s.
12.89 53 ft/s.
12.90 *a)* En $A\, (a_A)_r = 0$, $(a_A)_\theta = 0$. *b)* 1 536 in./s^2. *c)* 32.0 in./s.
12.91 *a)* 24.0 in./s. *b)* $a_r = -258$ in./s^2, $a_\theta = 0$. *c)* -226 in./s^2.
12.98 10.42 km /s.
12.99 *a)* 10.13 km/s. *b)* 2.97 km/s.
12.103 *a)* 26.3×10^3 ft/s. *b)* 448 ft/s.
12.104 $\sqrt{2/(2 + \alpha)}$.
12.105 *a)* 52.4×10^3 ft/s. *b)* 1 318 ft/s en *A*, 3 900 ft/s en *B*.
12.108 98.0 h.
12.109 4.95 h.
12.110 54.0°.
12.112 5.31×10^9 km.
12.114 $\cos^{-1}[1 - n\beta^2)/1 - \beta^2)]$.
12.115 81.0 m/s.
12.116 *a)* 14.37°. *b)* 59.8 km/s.
12.118 Demuestre . . . .
12.119 *a)* $(r_1 - r_0)/(r_1 + r_0)$. *b)* 609×10^{12} m.
12.120 Demuestre . . . .
12.121 Deduzca . . . .
12.122 267 ft.
12.124 *a)* 1.656 lb. *b)* 20.8 lb.
12.125 *a)* 20.49 ft/s^2 ⦩ 30°. *b)* 17.75 ft/s^2 →.
12.127 *a)* 0.454, hacia abajo. *b)* 0.1796, hacia abajo.
c) 0.218, hacia arriba.
12.128 *a)* $F_r = -13.16$ lb, $F_\theta = 2.10$ lb.
b) $\mathbf{P} = 6.89$ lb ⦪ 70°, $\mathbf{Q} = 14.00$ lb ⦩ 40°.
12.129 $v_r = 2v_0 \operatorname{sen} 2\theta$, $v_\theta = v_0 \cos 2\theta$.
12.131 *a)* $r = 1.250$ ft, $F_H = 0$. *b)* $r = 0.871$ ft, $F_H = -2.69$ lb.
12.132 1.147.

CAPÍTULO 13

13.1 *a)* 585 kJ. *b)* 41.0 km/h.
13.2 4.54×10^9 ft · lb.
13.5 *a)* 69.6 mi/h. *b)* 56.9 mi/h.
13.6 *a)* 32.8 mi/h. *b)* 142.5 mi/h.
13.7 4.05 m/s.
13.8 2.99 m.
13.9 *a)* 8.57 m/s ⦣ 15°. *b)* 5.30 m/s ⦩ 15°.
13.10 *a)* 8.70 m. *b)* 4.94 m/s ⦩ 15°.
13.13 6.71 m.
13.14 *a)* 2.90 m/s. *b)* 0.893 m.
13.15 *a)* 124.1 ft. *b)* $F_{AB} = 19.38$ kips (tensión),
$F_{BC} = 81.62$ kips (tensión)
13.16 *a)* 279 ft. *b)* $F_{AB} = 19.38$ kips (compresión),
$F_{BC} = 8.62$ kips (compresión).
13.21 *a)* 2.34 m/s ←. *b)* 235 mm.
13.22 *a)* 45.7 J. *b)* $T_A = 83.2$ N, $T_B = 60.3$ N.
13.23 *a)* 10.36 ft/s ↓. *b)* 17.94 ft/s ↓.
13.24 *a)* 11.35 ft/s ⦩ 23.6°. *b)* 16.05 ft/s ⦩ 23.6°.
13.25 1.190 m/s.
13.26 *a)* 2.32 ft/s. *b)* 2.39 ft/s .
13.27 *a)* 0.222 ft. *b)* El bloque se mueve hacia la derecha.
13.29 *a)* 3.29 m/s. *b)* 1.472 m.
13.31 *a)* 0.750 in. ↓. *b)* 8.51 in./s ↑ o ↓.
13.33 $0.759\sqrt{paA/m}$.
13.35 $1/[1 - (v_0^2 - v^2)/2g_m R_m]$.
13.36 1 515 yd.
13.38 *a)* 32.7 mm, 98.1 N ↑. *b)* 30.4 mm, 104.9 N ↑.
13.39 *a)* $\sqrt{3gl}$. *b)* $\sqrt{2gl}$.
13.40 14.00°.
13.41 167.0 lb.
13.42 mínimo = 167.0 lb, máximo = 1 260 lb.
13.44 *a)* 27.4°. *b)* 3.81 ft.
13.46 *a)* 20.2 ft · lb/s. *b)* 118.7 ft · lb/s.
13.49 *a)* 109.0 kW, 146.2 hp. *b)* 530 kW, 711 hp.
13.50 *a)* 2.75 kW. *b)* 3.35 kW.
13.51 14.8 kN.
13.52 *a)* 3 000 lb. *b)* 267 hp.
13.53 *a)* 375 kW. *b)* 5.79 km /h.
13.54 *a)* 58.9 kW. *b)* 52.9 kW.
13.55 *a)* $k_1k_2/(k_1 + k_2)$. *b)* $k_1 + k_2$.
13.56 *a)* $x_0\sqrt{k_1k_2/m(k_1 + k_2)}$. *b)* $x_0\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$.
13.57 3.19 m/s → o bien 3.19 m/s ←.
13.58 *a)* 3.34 ft/s. *b)* 27.7 ft/s^2.
13.59 56.7 ft/s.
13.61 *a)* 87.2 m/s. *b)* 105.8 m/s.
13.62 *a)* 1 000 mm. *b)* 4.42 m/s.
13.64 *a)* 0.956 ft. *b)* 7.85 ft/s.
13.65 *a)* 43.5°. *b)* 8.02 ft/s ↓.
13.68 0.269 m.
13.69 0.1744 m.
13.70 *a)* 2.55 N. *b)* 6.96 N.
13.71 *a)* 8.15 N. *b)* 2.94 N.
13.73 14.34 ft/s ←, 13.77 lb ↑.
13.74 1): *a)* 7.99 m/s. *b)* 5.89 N ←.
2): *a)* 7.67 m/s. *b)* 3.92 N ←.
13.75 *a)* Conducto 1: mínimo $v_C = 3.84$ m/s > 3.5 m/s.
b) Conducto 2: $v_0 = 7.83$ m/s.
13.78 *a)* $\cot\phi = 4.113/12 - y)$.
b) $\theta_x = 85.7°$, $\theta_y = 71.6°$, $\theta_z = 161.1°$.
13.80 *b)* $V = -\ln xyz + C$.
13.81 *a)* $\pi ka^2/4$. *b)* 0.
13.82 *a)* $F_x = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $F_y = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$,
$F_z = z\, x^2 + y^2 + z^2)$. *b)* $a\sqrt{3}$.
13.85 *a)* 90.46 J. *b)* 2 086 J.
13.86 57.5 MJ/kg.
13.87 15.65×10^3 mi/h.
13.88 450×10^3 ft · lb/lb.
13.89 *a)* $mgR(1 - R/r)$. *b)* $mgR^2/2r$. *c)* $mgR(1 - R/2r)$.
13.90 *a)* 33.9 MJ/kg. *b)* 46.4 MJ/kg.
13.93 *a)* 0.919 m/s. *b)* 8.27 m/s.
13.94 *a)* 7.35 m/s. *b)* 11.02 m/s.
13.95 $v_r = 9.05$ ft/s, $v_\theta = 9.14$ ft/s.
13.96 *a)* 25.3 in. *b)* 7.58 ft/s.
13.97 máxima: 1.661 m, mínima: 0.338 m,
máxima: 25.6 m/s, mínima: 5.21 m/s.
13.100 14.20 km/s.
13.101 29.8 m/s.

13.102 21.8×10^6 ft²/s²
13.103 *a*) 16 800 ft/s. *b*) 32 700 ft/s.
13.106 1 555 m/s, 79.3°.
13.107 máxima: $r_0(1 + \text{sen }\alpha)$, mínimo: $r_0(1 - \text{sen }\alpha)$
13.108 68.9°.
13.109 *a*) 11.32×10^3 ft/s. *b*) 13.68×10^3 ft/s.
13.110 58.9°.
13.111 *a*) 31.5 m/s. *b*) 1053 m/s.
13.116 *b*) $v_{esc}\sqrt{\alpha/(1+\alpha)} \le v_0 \le v_{esc}\sqrt{(1+\alpha)/(2+\alpha)}$.
13.118 *a*) $h = r_{mín}\, v_{máx}$, $E/m = \frac{1}{2}v_{máx}^2 - GM/r_{mín}$.
13.119 *a*) 3.40 s. *b*) 25.5 s.
13.120 4 min 20 s.
13.121 *a*) 3.11 s. *b*) 1.493 s.
13.122 *a*) 11.42 s. *b*) $-(125.5\text{ m/s})\mathbf{j} - (194.5\text{ m/s})\mathbf{k}$.
13.123 *a*) 2.49 s. *b*) 12.24 s.
13.124 2.61 s.
13.126 0.260.
13.127 0.310.
13.129 *a*) 14.78 s. *b*) 693 lb (tensión).
13.130 *a*) 29.6 s. *b*) 2 500 lb (tensión).
13.131 *a*) 19.60 s. *b*) 10.20 kN (compresión).
13.132 *a*) 3.92 m/s. *b*) 39.2 N.
13.134 *a*) 29.0 ft/s. *b*) 77.3 ft/s.
13.135 *a*) 77.3 ft/s. *b*) 5.40 s.
13.136 *a*) 5.00 s. *b*) 49.9 ft/s. *c*) 17.88 s.
13.137 *a*) 7.00 s. *b*) 10.99 ft/s. *c*) 13.49 s.
13.139 8.18%.
13.140 6.21 *W*.
13.141 642 lb.
13.142 *a*) 3 730 lb. *b*) 7450 lb.
13.145 *a*) 1.333 km/h ←. *b*) 0.1888 s.
13.146 *a*) A iba más rápido. *b*) 115.2 km/h.
13.147 *a*) 8.51 km/h. (*b*) 6.67 N.
13.148 497 ft/s.
13.149 *a*) A: $v_0\sqrt{L^2 - a^2}/2L$, B: $v_0\sqrt{L^2 + 3a^2}/2L$.
b) $mv_0^2\,(L^2 - a^2)/4L^2$.
13.150 *a*) 0.618 ft/s. *b*) 3.04 ft/s.
13.151 *a*) 1.000 m/s ↑. *b*) 0.500 N · s ↑.
13.152 $mMv_0 \cos\theta/(m + M)$ →, $mv_0 \text{ sen }\theta$ ↑.
13.154 76.9 lb.
13.155 *a*) $\mathbf{v}'_A = 0.363$ m/s ←, $\mathbf{v}'_B = 2.44$ m/s →. *b*) 4.13 J.
13.157 0.800.
13.158 *a*) $\mathbf{v}'_A = 10.38$ ft/s →, $\mathbf{v}'_B = 7.38$ ft/s →. *b*) 0.0611 ft · lb.
13.159 *A*: 1.013 m/s ←, *B*: 0.338 m/s ←, *C*: 0.150 m/s ←.
13.160 *a*) $v'_A = v_0(1 - e)/2$, $v'_B = v_0(1 + e)/2$.
b) $v'_C = v_0(1 + e)^2/4$, $v'_B = v_0(1 - e)^2/4$.
c) $v'_n = v_0(1 + e)^{(n-1)}/2^{(n-1)}$, *d*) 0.881 v_0.
13.163 $0.728 \le e \le 0.762$.
13.165 $\mathbf{v}'_A = 6.37$ m/s ⦣ 77.2°, $\mathbf{v}'_B = 1.802$ m/s ⦣ 40°.
13.166 $\mathbf{v}'_A = 3.00$ m/s ⦣ 40°, $\mathbf{v}'_B = 3.00$ m/s ⦣ 40°.
13.167 *a*) $\mathbf{v}_A = 0.848\, v_0$ ⦣ 27.0°, $\mathbf{v}_B = 0.456\, v_0$ ⦣ 57.6°.
13.168 *a*) 70.0°. *b*) 0.972 ft/s →.
13.169 0.857.
13.170 15.94 m.
13.173 *a*) 22.5°. *b*) 21.3°.
13.174 *a*) 0.294 m. *b*) 54.4 mm.
13.175 *a*) 0.685 m para $e = 1$, 0.484 m para $e = 0$.
b) 5.00 m/s → para $e = 1$, 2.50 m/s → para $e = 0$.
13.176 *a*) $\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}'_B = 0$. *b*) $\mathbf{v}'_A = 1.201$ m/s →, $\mathbf{v}'_B = 0.400$ m/s →.
13.177 *a*) 0.258. *b*) 4.34 m/s.
13.178 *a*) 0.0720 ft. *b*) 72.2 lb/ft.
13.179 *a*) $e = 1.000$. *b*) 0.200 ft. *e*) 0.263 ft.
13.183 *a*) 2.90 m/s. *b*) 100.5 J.
13.184 *a*) 401 mm. *b*) 4.10 N · s.
13.185 *a*) 0.923. *b*) 1.278 m.
13.188 $\mathbf{v}'_A = 1.093$ ft/s ←, $\mathbf{v}'_B = 3.28$ ft/s →.
13.190 1.688 ft · lb.
13.191 *a*) 533 lb/ft. *b*) 37.0 ft.
13.194 12 900 ft/s.
13.196 65.0 KN.
13.197 0.707 *a*.
13.199 *a*) 1.368 m/s. *b*) 0.668 m. *c*) 1.049 m.
13.200 $(1 + e)^2/4$.

CAPÍTULO 14

14.1 *a*) 1.417 m/s →. *b*) 1.417 m/s →.
14.2 *a*) 10.00 kg. *b*) 1.200 m/s →.
14.3 *a*) 9.20 ft/s ←. *b*) 9.37 ft/s ←.
14.4 *a*) 2.80 ft/s ←. *b*) 0.229 ft/s ←.
14.7 *a*) *A*: 1.288 m/s ←, *B*: 0.312 m/s →, *C*: 1.512 m/s →.
b) *A*: 0.956 m/s ←, *B*: 0.0296 m/s ←, *C*: 1.552 m/s →.
14.8 0.294 m/s ←.
14.9 $-(31.2\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (64.8\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (48.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
14.10 *a*) $(0.600\text{ m})\mathbf{i} + (1.400\text{ m})\mathbf{j} + (1.525\text{ m})\mathbf{k}$.
b) $-(26.0\text{ kg}\cdot\text{m/s})\mathbf{i} + (14.00\text{ kg}\cdot\text{m/s})\mathbf{j} + (14.00\text{ kg}\cdot\text{m/s})\mathbf{k}$.
c) $-(29.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (16.75\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (3.20\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
14.13 *a*) $v_x = -0.750$ ft/s, $v_z = 0.4375$ ft/s.
b) $\mathbf{H}_O = -(3.39\text{ ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{i}$.
14.14 *a*) $v_x = 8.33$ ft/s, $v_z = 7.25$ ft/s. *b*) $\mathbf{H}_O = -(4.51\text{ ft}\cdot\text{lb}\cdot\text{s})\mathbf{k}$.
14.15 $(4\,320\text{ ft})\mathbf{i} + (480\text{ ft})\mathbf{j} + (480\text{ ft})\mathbf{k}$.
14.16 $(400\text{ ft})\mathbf{i} - (258\text{ ft})\mathbf{j} + (32.0\text{ ft})\mathbf{k}$.
14.17 $(1\,004\text{ m})\mathbf{i} - (48.7\text{ m})\mathbf{j}$.
14.18 $(503\text{ m})\mathbf{i} - (547\text{ m})\mathbf{j}$.
14.21 *a*) 8.50 ft/s. *b*) 3.95 ft/s.
14.22 *a*) 6.05 ft/s. *b*) 6.81 ft/s.
14.23 $(26.0\text{ m})\mathbf{i} + (125.4\text{ m})\mathbf{k}$.
14.24 $v_A = 919$ m/s, $v_B = 717$ m/s, $v_C = 619$ m/s.
14.31 *a*) 42.2 J. (*b*) 5.10 J.
14.32 *a*) 264 J. (*b*) 352 J.
14.33 mujer: 382 ft · lb, hombre: 447 ft · lb
14.34 *a*) 1 116 ft · lb. (*b*) 623 ft · lb.
14.37 *a*) $\mathbf{v}_B = m_A v_0/(m_A + m_B)$ →. (*b*) $h = m_B v_0^2/2g\,(m_A + m_B)$.
14.38 *a*) $\mathbf{v}_A = 0.200\, v_0$ ←, $\mathbf{v}_B = 0.693\, v_0$ ⦣ 30°,
$\mathbf{v}_C = 0.693\, v_0$ ⦣ 30°. *b*) $\mathbf{v}_A = 0.250\, v_0$ ⦣ 60°,
$\mathbf{v}_B = 0.866\, v_0$ ⦣ 30°, $\mathbf{v}_C = 0.433\, v_0$ ⦣ 30°.
14.39 $v_A = 10.61$ ft/s, $v_B = 5.30$ ft/s, $v_C = 9.19$ ft/s.
14.40 $v_A = 7.50$ ft/s, $v_B = 9.19$ ft/s, $v_C = 9.19$ ft/s.
14.41 $\mathbf{v}_A = 4.11$ m/s ⦣ 46.9°, $\mathbf{v}_B = 17.39$ m/s ⦣ 16.7°.
14.42 $\mathbf{v}_A = 12.17$ m/s ⦣ 25.3°, $\mathbf{v}_B = 9.17$ m/s ⦣ 70.9°.
14.45 $(60.0\text{ m/s})\mathbf{i} + (60.0\text{ m/s})\mathbf{j} + (390\text{ m/s})\mathbf{k}$.
14.46 $x_{B_0} = 181.7$ mm, $y_{B_0} = 0$, $z_{B_0} = 139.4$ mm.
14.49 *a*) 0.866 v_0. (*b*) 0.250 v_0. *c*) 7.50%.
14.50 *a*) 0.707 v_0. (*b*) 0.500 v_0. *c*) 12.50%.
14.51 *a*) $\mathbf{v}_A = 2.56$ m/s ↑, $\mathbf{v}_B = 4.24$ m/s ⦣ 31.9°. *b*) 2.34 m.
14.52 *a*) $\mathbf{v}_0 = (2.4\text{ m/s})\mathbf{i} + (1.8\text{ m/s})\mathbf{j}$ *b*) 600 mm. *c*) 20.0 rad/s.
14.53 *a*) $\mathbf{v}_B = 7.20$ ft/s ⦣ 53.1°, $\mathbf{v}_C = 7.68$ ft/s →. *b*) 42.0 in.
14.54 *a*) $\mathbf{v}_A = 7.20$ ft/s ↓, $\mathbf{v}_B = 9.00$ ft/s ⦣ 53.1°. *b*) 74.0 in.
14.57 312 N.
14.58 4.18 m/s.
14.59 90.6 N ←.
14.60 *a*) $F_x = 3\,280$ lb. *b*) $F_z = 6\,450$ lb.
14.63 $\mathbf{C} = 161.7$ N ↑, $\mathbf{D}_x = 154.8$ N →, $\mathbf{D}_y = 170.2$ N ↑.
14.67 *a*) 61.1 m/s. *b*) 59.8 N ⦣ 49.0°.

14.68 $C_x = 90.0$ N, $C_y = 2\,360$ N, $D_x = 0$, $D_y = 2\,900$ N.
14.69 36.9 kN.
14.70 251 lb/s.
14.71 *a*) 9 690 lb, 3.38 ft. *b*) 6 960 lb, 9.43 ft.
14.73 1.096 m.
14.74 7 180 lb.
14.75 *a*) 516 mi/h. *b*) 391 mi/h.
14.77 *a*) 15.47 kJ/s. *b*) 0.323.
14.78 *a*) 80.0 kJ/s. *b*) 51.9 km/h.
14.79 *a*) 15 450 hp. *b*) 28 060 hp. *c*) 0.551.
14.80 *a*) 109.5 ft/s. *b*) 3 100 ft^3/s. *c*) 43 800 ft · lb/s
14.84 646 ft^3/s.
14.85 *a*) $P = qv$.
14.86 *Caso 1.* *a*) 0.333 $g\downarrow$. *b*) $0.817\sqrt{gl}\downarrow$.
Caso 2. *a*) $gy/l\downarrow$. *b*) $\sqrt{gl}\downarrow$.
14.87 *a*) $(m/l)(v^2 + gy)$. *b*) $mg(1 - y/l)\uparrow$.
14.88 *a*) mgy/l. *b*) $(m/l)\,[g(l - y) + v^2]\uparrow$.
14.89 10.10 ft/s.
14.90 4.75 ft/s.
14.92 533 kg/s.
14.93 *a*) 90.0 m/s^2. *b*) 35.9×10^3 km/h.
14.94 *a*) 31.9 $m/s^2\uparrow$. *b*) 240 $m/s^2\uparrow$.
14.95 4 410 lb.
14.96 3 960 ft/s.
14.97 7 930 m/s.
14.98 *a*) 1 800 m/s. *b*) 9 240 m/s.
14.99 186.8 km.
14.100 *a*) 31.2 km. *b*) 197.5 km.
14.106 *a*) 5.20 km/h. *b*) 4.00 km/h.
14.107 *a*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C = 0.400$ mi/h $\rightarrow$.
b) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = 1.68$ mi/h $\leftarrow$, $\mathbf{v}_C = 4.56$ mi/h $\rightarrow$.
14.109 $\mathbf{v}_A = 15.38$ ft/s $\rightarrow$, $\mathbf{v}_B = 5.13$ ft/s $\leftarrow$.
14.111 *a*) $qv_0 \leftarrow$. *b*) $\sqrt{2gh}$ ⊾ 30°.
14.112 1.712 kN $\uparrow$ en C, 2.29 kN $\uparrow$ en D.
14.113 414 rpm.
14.114 v^2/g.
14.115 *a*) $m_0 + qt_L = m_0e^{qL/m_0v_0}$ *b*) $v_L = v_0e^{-qL/m_0v_0}$

CAPÍTULO 15

15.1 *a*) 0, 15.00 rad/s, -18.00 rad/s^2.
b) -9.00 rad, -12.00 rad/s^2, 0.
15.2 1.000 s, 7.00 rad, -12.00 rad/s^2;
5.00 s, -25.0 rad, 12.00 rad/s^2.
15.3 *a*) 0, 0, 0. *b*) 6.00 rad, 4.71 rad/s, -3.70 rad/s^2.
15.4 1.243 rad, 3.33 rad/s, 4.79 rad/s^2.
15.5 *a*) 0, 0.1000 rad/s, -0.0250 rad/s^2.
b) 0.211 rad, 0.0472 rad/s, -0.01181 rad/s^2 .
c) 0.400 rad, 0, 0.
15.6 *a*) 4.00 s^{-2}. (*b*) 5.29 rad/s.
15.9 *a*) 12.73 rev. (*b*) ∞. (*c*) 18.42 s.
15.10 $-(0.400$ m/s$)\mathbf{i} - (1.400$ m/s$)\mathbf{j} - (0.700$ m/s$)\mathbf{k}$,
$(8.40\ m/s^2)\mathbf{i} + (3.30\ m/s^2)\mathbf{j} - (11.40\ m/s^2)\mathbf{k}$.
15.11 $-(0.400$ m/s$)\mathbf{i} + (0.700$ m/s$)\mathbf{k}$,
$-(2.00\ m/s^2)\mathbf{i} - (6.50\ m/s^2)\mathbf{j} - (3.00\ m/s^2)\mathbf{k}$.
15.12 $-(0.450$ m/s$)\mathbf{i} - (1.200$ m/s$)\mathbf{j} + (1.500$ m/s$)\mathbf{k}$,
$(12.60\ m/s^2)\mathbf{i} + (7.65\ m/s^2)\mathbf{j} + (9.90\ m/s^2)\mathbf{k}$.
15.13 $(0.750$ m/s$)\mathbf{i} + (1.500$ m/s$)\mathbf{k}$, $(12.75\ m/s^2)\mathbf{i}$ +
$(11.25\ m/s^2)\mathbf{j} + (3.00\ m/s^2)\mathbf{k}$.
15.16 *a*) 1525 ft/s, 0.1112 ft/s^2. *b*) 1163 ft/s, 0.0852 ft/s^2. *c*) 0, 0.
15.18 *a*) 0.0600 m/s^2. *b*) 0.0937 m/s^2. *c*) 0.294 m/s^2.
15.19 *a*) 6.00 m/s^2. *b*) 9.98 m/s^2, *c*) 60.0 m/s^2.
15.21 *a*) 2.50 rad/s ↺, 1.500 rad/s^2 ↻. *b*) 38.6 in./s^2 ◸ 76.5°.
15.22 12.00 rad/s^2 ↻.
15.24 *a*) 6.28 m/s, 1 579 m/s^2. *b*) 0.628 m/s, 15.80 m/s^2.
15.25 *a*) 120 rpm, 275 rpm. *b*) 23.7 m/s^2 $\uparrow$, 19.90 $m/s^2\downarrow$.
15.27 *a*) 10.00 rad/s ↺. *b*) 7.50 $m/s^2\downarrow$, 3.00 $m/s^2\downarrow$.
c) 4.00 $m/s^2\downarrow$.
15.28 *a*) 3.00 rad/s^2 ↻. *b*) 4.00 s.
15.29 *a*) 1.707 rad/s^2 ↺. *b*) 6.83 rad/s ↺.
15.30 *a*) 2.25 rev. *b*) 1.710 m/s $\downarrow$, 3.11 m $\downarrow$.
c) 849 mm/s^2 ⊿ 32.0°.
15.31 *a*) 1.152 m/s $\uparrow$, 2.30 m $\uparrow$. *b*) 1.728 m/s $\downarrow$, 3.46 m $\downarrow$.
15.32 *Disco A*: 5.41 rad/s^2 ↺; *Disco B*: 1.466 rad/s^2 ↺.
15.33 *a*) 10.39 s. *b*) *Disco A*: 413 rpm ↻; *Disco B*: 248 rpm ↺.
15.35 *a*) *Disco A*: 2.36 rad/s^2 ↻; *Disco B*: 4.19 rad/s^2 ↻. *b*) 6.00 s.
15.36 $bv^2/2\pi r^3$ ↻.
15.37 $b\omega_0^2/2\pi \rightarrow$.
15.38 *a*) 0.378 rad/s ↻. *b*) 6.42 m/s $\uparrow$.
15.39 *a*) 0.615 rad/s ↺. *b*) 11.02 in./s ◸ 15°.
15.40 *a*) 2.26 rad/s ↺. *b*) 1.840 m/s ⊾ 60°.
15.41 *a*) 2.54 rad/s ↻. *b*) 1.373 m/s ⊿ 30°.
15.44 *a*) 4.00 rad/s ↻. *b*)$-(4.00$ in/s$)\mathbf{i}$.
15.45 *a*) $(12.00$ in./s$)\mathbf{i} + (8.00$ in./s$)\mathbf{j}$
b) $x = 2.00$ in., $y = 3.00$ in.
15.46 *a*) 2.00 rad/s ↻. *b*) $(120$ mm/s$)\mathbf{i} + (660$ mm/s$)\mathbf{j}$.
15.48 *a*) 105 rpm ↻. *b*) 127.5 rpm ↻.
15.49 *a*) 1.500. *b*) 0.333 ω_A ↺.
15.50 70 rpm ↻.
15.51 *a*) 135.0 rpm ↻. *b*) 105.0 rpm ↻.
15.52 *a*) 48.0 rad/s ↻. *b*) 3.39 m/s ⊿ 45°.
15.55 *a*) 60.0 rpm ↻, 37.7 in./s $\rightarrow$. *b*) 0, 50.3 in./s $\leftarrow$.
15.56 2.67 rad/s ↻, 34.4 in./s $\leftarrow$.
15.57 *a*) 0, 39.3 rad/s ↺. *b*) 6.28 m/s $\downarrow$, 0.
15.58 6.52 m/s $\downarrow$, 20.8 rad/s ↺.
15.60 *a*) 0.1254 m/s $\leftarrow$. *b*) 0.208 rad/s ↻.
15.61 *a*) 3.02 rad/s ↻. *b*) 0.657 rad/s ↺.
15.63 *Barra BD*: 0.955 rad/s ↺; *Barra DE*: 2.55 rad/s ↻.
15.64 *Barra BD*: 4.00 rad/s ↻; *Barra DE*: 6.67 rad/s ↺.
15.65 *Barra BD*: 5.20 rad/s ↻; *Barra DE*: 6.40 rad/s ↻.
15.66 *a*) 3.33 rad/s ↺. *b*) 2.00 m/s ◸ 56.3°.
15.68 *a*) 12.00 rad/s ↻. *b*) 80.0 in./s $\rightarrow$.
15.69 *a*) 12.00 rad/s ↻. *b*) 72.1 in./s ◿ 56.3°.
15.70 *B*: 140.8 ft/s $\rightarrow$; *C*: 0; *D*: 136.0 ft/s ⊿ 15°; *E*: 99.6 ft/s ◸ 45°.
15.71 *a*) 338 mm/s $\leftarrow$, 0. *b*)710 mm/s $\leftarrow$, 2.37 rad/s ↻.
15.72 $\omega_C = (1 - r_A/r_C)\omega_{ABC}$.
15.73 *a*) *C* está a 1.000 ft a la derecha de *A*. *b*) 4.00 in./s $\uparrow$.
15.74 $x = 0$, $z = 9.34$ ft.
15.75 *a*) 50.0 mm a la derecha del eje.
b) 750 mm/s $\downarrow$, 1.950 m/s $\downarrow$.
15.76 *a*) 25.0 mm a la derecha del eje. *b*) 420 mm/s $\uparrow$.
15.77 *a*) 12.00 rad/s ↻. *b*) *Cremallera*: 2.40 m/s $\rightarrow$ *D*: 2.16 m/s ⊿ 56.3°.
15.78 *a*) 10.00 mm a la derecha de *A*. *b*) 40.00 mm/s $\downarrow$.
c) *DE*: sin enrollar a 240 mm/s; BF: sin enrollar a 120 mm/s.
15.79 *a*) 20.0 mm a la derecha de *A*. *b*) 80.0 mm/s $\downarrow$.
c) *DE*: sin enrollar a 240 mm/s; *BF*: sin enrollar a 120 mm/s.
15.82 *a*) 12.00 rad/s ↺. *b*) 3.90 m/s ◿ 67.4°.
15.83 *a*) 5.00 rad/s ↺. *b*) 1.300 m/s ⊿ 67.4°.
15.84 *a*) 3.08 rad/s ↻. *b*) 83.3 in./s ◸ 73.9°.
15.85 *a*) 0.467 rad/s ↺. *b*) 3.49 ft/s ⊿ 59.2°.
15.89 *a*) 4.42 rad/s ↺. *b*) 3.26 m/s ⊿ 50°.
15.90 *a*) 1.579 rad/s ↻. *b*) 699 mm/s ⊿ 78.3°.
15.92 *a*) 22.0 in./s ⊿ 79.6°. *b*) 20.6 in./s ◸ 20.5°.
15.93 *a*) 2.79 in./s ⊿ 36.7°. *b*) 8.63 in./s ⊿ 75.0°.

15.95 *a*) 1 260 mm/s ↑. *b*) 1.250 rad/s ↺.
15.96 *a*) 0.338 rad/s ↻. *b*) 78.8 mm/s ←.
15.97 *a*) *DE*: 2.50 rad/s ↻; *AB*: 1.176 rad/s ↻. *b*) 29.4 m/s ←.
15.98 *a*) *AB*: 2.00 rad/s ↻; *DE*: 5.00 rad/s ↺. *b*) 24.0 in./s →.
15.99 *Centroide espacial:* cuarto de círculo de 15 in. de radio centrado en *O*. *Centrodo del cuerpo:* semicírculo de 7.5 in. de radio centrado en el punto medio entre *A* y *B*.
15.100 *Centrodo espacial:* cremallera inferior. *Centrodo del cuerpo:* circunferencia del engrane.
15.102 4.00 rad/s ↻, 6.67 rad/s ↺.
15.103 5.20 rad/s ↻, 6.40 rad/s ↻.
15.104 *B*: 140.8 ft/s →; *C*: 0; *D*: 136.0 ft/s ∠ 15.0°; *E*: 99.6 ft/s ∠ 45°.
15.105 *a*) 0.900 m/s^2 →. *b*) 1.800 m/s^2 ←.
15.106 *a*) 0.600 m desde *A*. *b*) 0.200 m desde *A*.
15.107 *a*) 0.778 rad/s^2 ↻. *b*) 4.22 m/s^2 ↑.
15.108 *A*: 7.00 ft/s^2 ↑; *B*: 0.200 ft/s^2 ↓.
15.109 *a*) 2.88 m/s^2 ←. *b*) 3.60 m/s^2 ←.
15.110 *a*) 2.88 m/s^2 →. *b*) 7.92 m/s^2 →.
15.111 *a*) 5 410 ft/s^2 ↓. *b*) 5 410 ft/s^2 ↑ *c*) 5 410 ft/s^2 ∠ 60°.
15.112 *a*) 96.0 rad/s^2 ↺, 2.40 m/s^2 ←. *b*) 48.0 rad/s^2 ↺, 1.200 m/s^2 ←.
15.113 *a*) 300 mm/s^2 →. *b*) 247 mm/s^2 ∠ 14.0°.
15.115 *A*: 56.6 in./s^2 ∠ 58.0°; *B*: 80.0 in./s^2 ↑; *C*: 172.2 in./s^2 ∠ 25.8°.
15.116 *A*: 48.0 in./s^2 ↑; *B*: 85.4 in./s^2 ∠ 69.4°; *C*: 82.8 in./s^2 ∠ 65.0°.
15.118 *a*) 13.35 in./s^2 ∠ 61.0°. *b*) 12.62 in./s^2 ∠ 64.0°.
15.119 *a*) 92.5 in./s^2. *b*) 278 in./s^2.
15.120 *a*) 59.8 m/s^2 ↑. *b*) 190.6 in./s^2 ↑.
15.121 *D*: 1 558 m/s^2 ∠ 45°; *E*: 337 m/s^2 ∠ 45°.
15.122 *a*) 1 218 in./s^2 ←. *b*) 993 in./s^2 ←.
15.125 148.3 m/s^2 ↓.
15.126 296 m/s^2 ↑.
15.127 *a*) 1 080 rad/s^2 ↻. *b*) 460 ft/s^2 ∠ 64.9°.
15.128 *a*) 432 rad/s^2 ↺. *b*) 272 ft/s^2 ∠ 60.3°.
15.129 1.745 m/s^2 ∠ 68.2°.
15.130 *a*) 7.20 rad/s^2. *b*) 1.296 m/s^2 ←.
15.132 9.60 m/s^2 →.
15.133 *a*) 10.75 rad/s^2 ↺. *b*) 2.30 rad/s^2 ↺.
15.135 *a*) 8.15 rad/s^2 ↺. *b*) 0.896 rad/s^2.
15.138 v_B sen β/l cos θ.
15.139 $(v_B$ sen $\beta/l)^2$ sen $\theta/\cos^3\theta$
15.140 $b\omega\cos\theta$, $b\alpha\cos\theta - b\omega^2$ sen θ.
15.141 $bv_A/(b^2+x_A^2)$ ↺, $2b_Ax_Av_A^2/(b^2+x_A^2)^2$
15.143 $v[1-\cos(vt/r)]$, v sen (vt/r).
15.146 v_0 sen$^2\,\theta/r\cos\theta$ ↺.
15.147 $(v_0/r)^2\,(1+\cos^2\theta)+\tan^3\theta$ ↺.
15.149 $(R\omega$ sen $\omega t)\mathbf{j}$, $(R\omega^2\cos\omega t)\mathbf{j}$
15.150 *a*) 1.815 rad/s ↻. *b*) 16.42 in./s ∠ 20°.
15.151 *a*) 5.16 rad/s ↻. *b*) 1.339 in./s ∠ 60°.
15.152 *AP*: 4.68 rad/s ↺; *BE*: 1.415 rad/s ↺.
15.153 *AD*: 2.52 rad/s ↻; *BP*: 1.299 rad/s ↻.
15.156 *a*) $\mathbf{v}_{H/AE} = l\omega$ ←, $\mathbf{v}_{H/BD} = 0$. *b*) $\mathbf{v}_{H/AE} = 0.577\ l\omega$ ∠ 30°, $\mathbf{v}_{H/BD} = 0.577\ l\omega$ ∠ 30°.
15.157 $\mathbf{v}_{H/AE} = 0.299\ l\omega$ ∠ 45°, $\mathbf{v}_{H/BD} = 0.816\ l\omega$ ∠ 15°.
15.160 *a*) 0.520 m/s ∠ 82.6°. *b*) 50.0 mm/s^2 ∠ 9.8°.
15.161 *a*) 0.520 m/s ∠ 37.4°. *b*) 50.0 mm/s^2 ∠ 69.8°.
15.162 *a*) $-(51.0$ in./s$)\mathbf{j} + (108.0$ in./s$)\mathbf{k}$. *b*) $-(51.0$ in./s$)\mathbf{j}$.
15.163 *a*) $(96.0$ in./s$)\mathbf{i} - (108.0$ in./s$)\mathbf{k}$. *b*) $(96.0$ in./s$)\mathbf{i}$.
15.165 0.0234 m/s^2 al oeste.
15.166 *a*) 68.1 in./s^2 ∠ 21.5°. *b*) 101.4 in./s^2 ∠ 3.2°.
15.167 *a*) 95.2 in./s^2 ∠ 48.3°. *b*) 57.5 in./s ∠ 64.3°.
15.168 *Eslabón 1:* 303 mm/s^2 →; *Eslabón 2:* 168.5 mm/s^2 ∠ 57.7°.
15.169 *Eslabón 3:* 483 mm/s^2 ←; *Eslabón 4:* 168.5 mm/s^2 ∠ 57.7°.
15.171 392 in./s^2 ∠ 4.05°.
15.174 *a*) $\mathbf{a}_A = 0.621$ m/s^2 ↑. *b*) $\mathbf{a}_B = 1.733$ m/s^2 ∠ 53.9°. *c*) $\mathbf{a}_C = 2.62$ m/s^2 ∠ 67.6°.
15.175 1.500 rad/s ↺, 7.79 rad/s^2 ↺.
15.176 6.00 rad/s ↺, 62.4 rad/s^2 ↻.
15.177 43.0 rad/s^2 ↻.
15.178 47.0 rad/s^2 ↻.
15.181 *a*) 2.40 rad/s ↻, 34.6 rad/s^2 ↻. *b*) 1.342 m/s ∠ 63.4°, 9.11 m/s^2 ∠ 18.4°.
15.182 *a*) 3.61 rad/s ↺. *b*) 86.6 in./s ∠ 30°. *c*) 563 in./s^2 ∠ 46.1°.
15.183 *a*) 3.61 rad/s ↻. *b*) 86.6 in./s ∠ 30°. *c*) 563 in./s^2 ∠ 46.1°.
15.184 *a*) $(1.500$ rad/s$)\mathbf{i} - (3.00$ rad/s$)\mathbf{j} - (2.50$ rad/s$)\mathbf{k}$. *b*) $(27.0$ in./s$)\mathbf{i} - (14.00$ in./s$)\mathbf{j} + (33.0$ in./s$)\mathbf{k}$.
15.185 *a*) $-(1.500$ rad/s$)\mathbf{i} - (0.750$ rad/s$)\mathbf{j} - (1.000$ rad/s$)\mathbf{k}$. *b*) $(9.00$ in./s$)\mathbf{i} - (14.00$ in./s$)\mathbf{j} - (3.00$ in./s$)\mathbf{k}$.
15.186 *a*) $(0.480$ rad/s$)\mathbf{i} - (1.600$ rad/s$)\mathbf{j} + (0.600$ rad/s$)\mathbf{k}$. *b*) $(400$ mm/s$)\mathbf{i} + (300$ mm/s$)\mathbf{j} + (480$ mm/s$)\mathbf{k}$.
15.187 *a*) $-(0.400$ rad/s$)\mathbf{j} - (0.360$ rad/s$)\mathbf{k}$. *b*) $(100$ mm/s$)\mathbf{i} - (90$ mm/s$)\mathbf{j} + (120$ mm/s$)\mathbf{k}$.
15.188 $-(9.87$ rad/s$^2)\mathbf{k}$.
15.189 $(118.4$ rad/s$^2)\mathbf{i}$.
15.190 *a*) $\omega_1\mathbf{j} + (R/r)\omega_1\mathbf{k}$. *b*) $(R/r)\omega_1{}^2\mathbf{i}$.
15.193 *a*) $-(0.600$ m/s$)\mathbf{i} + (0.750$ m/s$)\mathbf{j} - (0.600$ m/s$)\mathbf{k}$. *b*) $-(6.15$ m/s$^2)\mathbf{i} - (3.00$ m/s$^2)\mathbf{j}$.
15.194 *a*) $-(20.0$ rad/s$^2)\mathbf{i}$. *b*) $-(4.00$ ft/s$^2)\mathbf{i} + (10.00$ ft/s$^2)\mathbf{k}$. *c*) $-(10.25$ ft/s$^2)\mathbf{j}$.
15.195 $-(3.46$ ft/s$^2)\mathbf{i} - (5.13$ ft/s$^2)\mathbf{j} + (8.66$ ft/s$^2)\mathbf{k}$.
15.196 *a*) $-(0.1745$ rad/s$)\mathbf{i} - (0.524$ rad/s$)\mathbf{j}$. *b*) $-(0.0914$ rad/s$^2)\mathbf{k}$. *c*) $-(1.818$ m/s$)\mathbf{i} + (0.605$ m/s$)\mathbf{j} - (3.49$ m/s$)\mathbf{k}$, $(0.366$ m/s$^2)\mathbf{i} - (0.0609$ m/s$^2)\mathbf{j} - (1.055$ m/s$^2)\mathbf{k}$.
15.198 *a*) $(8.00$ rad/s$)\mathbf{i}$. *b*) $-(19.20$ rad/s$^2)\mathbf{k}$. *c*) $-(1.103$ m/s$^2)\mathbf{i} - (2.005$ m/s$^2)\mathbf{j}$.
15.199 *a*) $(0.750$ rad/s$)\mathbf{i} + (1.500$ rad/s$)\mathbf{j}$ *b*) $(300$ mm/s$)\mathbf{i} - (150$ mm/s$)\mathbf{j}$ *c*) $(60$ mm/s$)\mathbf{i} - (30$ mm/s$)\mathbf{j} - (90$ mm/s$)\mathbf{k}$.
15.200 *a*) $(1.125$ rad/s$^2)\mathbf{k}$. *b*) $-(225$ mm/s$^2)\mathbf{i} + (180$ mm/s$^2)\mathbf{j} - (112.5$ mm/s$^2)\mathbf{k}$.
15.202 $(210$ mm/s$)\mathbf{k}$.
15.203 $(40.0$ mm/s$)\mathbf{k}$.
15.204 $-(30.0$ in./s$)\mathbf{j}$.
15.205 $(45.7$ in./s$)\mathbf{j}$.
15.206 $(12.78$ mm/s$)\mathbf{j}$.
15.207 $(4.66$ mm/s$)\mathbf{j}$.
15.210 $(\omega_1/\cos 25°)\ (-$sen $25°\mathbf{j} + \cos 25°\ \mathbf{k})$
15.211 $\omega_1/\cos 25°\ (-$sen $25°\mathbf{j} + \cos 25°\ \mathbf{k})$
15.212 *a*) $(0.240$ rad/s$)\mathbf{i} + (0.080$ rad/s$)\mathbf{j} - (1.080$ rad/s$)\mathbf{k}$. *b*) $(40.0$ mm/s$)\mathbf{k}$.
15.213 *a*) $-(0.348$ rad/s$)\mathbf{i} + (0.279$ rad/s$)\mathbf{j} + (1.089$ rad/s$)\mathbf{k}$. *b*) $-(30.0$ in./s$)\mathbf{j}$.
15.214 $-(510$ mm/s$^2)\mathbf{k}$.
15.216 $-(45.0$ in./s$^2)\mathbf{j}$.
15.217 $(205$ in./s$^2)\mathbf{j}$.
15.218 $-(9.51$ mm/s$^2)\mathbf{j}$.
15.219 $-(8.76$ mm/s$^2)\mathbf{j}$.
15.220 *a*) $(72.0$ in./s$)\mathbf{i} + (30.0$ in./s$)\mathbf{j} - (48.0$ in./s$)\mathbf{k}$. *b*) $-(288$ in./s$^2)\mathbf{i} - (864$ in./s$^2)\mathbf{k}$.
15.221 *a*) $(30.0$ in./s$)\mathbf{i} - (16.0$ in./s$)\mathbf{j} - (16.0$ in./s$)\mathbf{k}$, $-(48.0$ in./s$^2)\mathbf{i} + (96.0$ in./s$^2)\mathbf{k}$. *b*) $(30.0$ in./s$)\mathbf{i} - (16.0$ in./s$)\mathbf{j}$; $(96.0$ in./s$^2)\mathbf{k}$.

15.222 *a*) (0.750 m/s)**i** + (1.299 m/s)**j** − (1.732 m/s)**k**.
b) (27.1 m/s^2)**i** + (5.63 m/s^2)**j** − (15.00 m/s^2)**k**.
15.223 *a*) (0.75 m/s)**i** + (1.299 m/s)**j** − 1.732 m /s)**k**.
b)−(28.6 m/s^2)**i** + (3.21 m/s^2)**j** − (10.67 m/s^2)**k**.
15.226 −(1.215 m/s)**i** + (1.620 m/s)**k**; −(30.4 m/s^2)**k**.
15.227 −(1.080 m/s)**k**; (19.44 m/s^2)**i** − (12.96 m/s^2)**k**.
15.228 −(1.215 m/s)**i** − (1.080 m/s)**j** + (1.620 m/s)**k**;
(19.44 m/s^2)**i** − (30.4 m/s^2)**j** − (12.96 m/s^2)**k**.
15.229 −(1.215 m/s)**i** − (1.080 m/s)**j** + (1.620 m/s)**k**;
(25.5 m/s^2)**i** − (25.0 m/s^2)**j** − (21.1 m/s^2)**k**.
15.230 *a*) (30.0 in./s)**i** − (16.0 in./s)**j** − (16.0 in./s)**k**;
−(75.0 in./s^2)**i** − (8.0 in./s)**j** + (32.0 in./s)**k**.
b) (30.0 in./s)**i** − (16.0 in./s)**j**; −(75.0 in./s^2)**i** +
(40.0 in./s^2)**j** + (96.0 in./s^2)**k**.
15.232 −(41.6 in./s^2)**i** − (61.5 in./s^2)**j** + (103.9 in./s^2)**k**.
15.234 *a*) −(0.270 rad/s^2)**i**. *b*) (6.24 in./s)**i** − (3.60 in./s)**j** −
(16.80 in./s)**k**. *c*)−(11.70 in./s^2)**i** − (2.81 in./s^2)**j** −
(7.48 in./s^2 **k**.
15.235 (0.600 m/s)**j** − (0.585 m/s)**k**; −(4.76 m/s^2)**i**.
15.236 (0.600 m/s)**j** − (0.225 m/s)**k**; −(0.675 m/s^2)**i** +
(3.00 m/s^2)**j** − (3.60 m/s^2)**k**.
15.237 (4.33 ft/s)**i** − (6.18 ft/s)**j** + (5.30 ft/s)**k**;
(2.65 ft/s^2)**i** − (2.64 ft/s^2)**j** − (3.25 ft/s^2)**k**.
15.240 −(5.04 m/s)**i** − (1.200 m/s)**k**; −(9.60 m/s^2)**i** −
(25.9 m/s^2)**j** + (57.6 m/s^2)**k**.
15.241 −(0.720 m/s)**i** − (1.200 m/s)**k**; −(9.60 m/s^2)**i** +
(25.9 m/s^2)**j** − (11.52 m/s^2)**k**.
15.242 (3.00 in./s)**i** − (1.800 in./s)**j** ;−(13.50 in./s^2)**i** +
(9.00 in./s^2)**j** + (8.64 in./s^2)**k**.
15.243 (9.00 in./s)**i** − (7.80 in./s)**j** + (7.20 in./s)**k**;
(9.00 in./s^2)**i** − (22.1 in./s^2)**j** − (5.76 in./s^2)**k**.
15.244 *a*) (0.610 m/s)**k**; −(0.880 m/s^2)**i** + (1.170 m/s^2)**j.**
b) (0.520 m/s)**i** − (0.390 m/s)**j** − (1.000 m/s)**k**;
−(4.00 m/s^2)**i** − (3.25 m/s^2)**k**.
15.245 *a*) (1.390 m/s)**k**; (7.12 m/s^2)**i** − (1.170 m/s^2)**j.**
b) (0.520 m/s)**i** − (0.390 m/s)**j** + 1.000 m/s)**k**;
(4.00 m/s^2)**i** − (3.25 m/s^2)**k**.
15.248 *a*) 51.3 in./s^2 ↓. *b*)184.9 in./s^2 ⦤ 16.1 °.
15.249 *a*) −1.824 rad/s^2. *b*) 103.3 s.
15.250 *a*) (0.450 m/s)**k**, (4.05 m/s^2)**i**.
b) −(1.350 m/s)**k**, −(6.75 m/s^2)**i.**
15.252 *a*) 37.5 in./s →. *b*) 187.5 in./s^2 ↑.
15.254 49.4 m/s^2 ⦨ 26.0°.
15.256 (7.84 in./s)**k**.
15.257 *a*) 0.1749 rad/s ↰. *b*) 66.2 mm/s ⦣ 25°.
15.259 (0.325 m/s)**i** + (0.1875 m/s)**j** − (0.313 m/s)**k**,
−(2.13 m/s^2)**i**+ (0.974 m/s^2)**j**− 3.25 m /s^2)**k**.

CAPÍTULO 16

16.1 *a*) 3.43 N ⦤ 20°. *b*) 24.4 N ⦣ 73.4°.
16.2 3.57 m/s^2 ←.
16.3 6.84 ft/s^2.
16.4 *a*) 13.42 ft/s^2 →. *b*) 8.67 lb.
16.5 *a*) 25.8 ft/s^2. *b*) 12.27 ft/s^2. *c*) 13.32 ft/s^2.
16.6 *a*) 36.8 ft. *b*) 42.3 ft.
16.7 *a*) 5.00 m/s^2 →. *b*) 0.311 m ≤ h ≤ 1.489 m.
16.8 *a*) 2.55 m/s^2 →. *b*) h ≤ 1.047 m.
16.11 *a*) 0.337 *g* ⦤ 30°. *b*) h/d = 4.00.
16.12 *a*) 0.252 *g* ⦥ 30°. *b*) h/d = 4.00.
16.13 435 lb.
16.14 *a*) 4.91 m/s^2 ⦥ 30°. *b*) *AD*: 31.0 N; *BE*: 11.43 N.
16.16 *a*) 2.54 m/s^2 ⦥ 15°. *b*) *AC*: 6.01 N en tensión
BD: 22.4 N en tensión
16.17 *CF*: 4.05 lb en compresión; *BE*: 14.33 lb en compresión.
16.20 *a*) 30.6 ft/s^2 ⦨ 84.1°.
b) **B** = 1.285 lb ⦤ 30°, **A** = 0.505 lb ⦤ 30°.
16.22 $|V|_{máx}$ = 40.3 lb, $|M|_{máx}$ = 25.2 lb · ft.
16.25 87.8 lb · ft.
16.26 5 230 revoluciones.
16.27 20.4 rad/s^2 ↻.
16.28 32.7 rad/s^2 ↺.
16.29 59.4 s.
16.30 93.5 revoluciones.
16.34 1): *a*) 8.00 rad/s ↺. *b*) 14.61 rad/s ↺.
2): *a*) 6.74 rad/s^2 ↺. *b*) 13.41 rad/s ↺.
3): *a*) 4.24 rad/s^2 ↺. *b*) 10.64 rad/s ↺.
4): *a*) 5.83 rad/s^2 ↺. *b*) 8.82 rad/s ↺.
16.36 *a*) 7.63 rad/s^2 ↻. *b*) 2.78 lb ↗.
16.37 *a*) 1.255 ft/s^2 ↓. *b*) 0.941 ft/s^2 ↑.
16.38 *a*) 1.971 ft/s^2 ↑. *b*) 1.971 ft/s^2 ↓.
16.39 *a*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 12.50 rad/s^2 ↺, $\boldsymbol{\alpha}_B$ = 33.3 rad/s^2 ↺.
b) A: 320 rpm ↻, *B*: 320 rpm ↺.
16.40 *a*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 12.50 rad/s^2 ↺, $\boldsymbol{\alpha}_B$ = 33.3 rad/s^2 ↺.
b) A: 90.0 rpm ↺, *B*: 120.0 rpm ↻.
16.41 *a*) Ocurre deslizamiento. *b*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 61.8 rad/s^2 ↺.
$\boldsymbol{\alpha}_B$ = 9.66 rad/s^2 ↻.
16.42 *a*) No hay deslizamiento. *b*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 15.46 rad/s^2 ↺.
$\boldsymbol{\alpha}_B$ = 7.73 rad/s^2 ↻.
16.48 *a*) A: 18.40 ft/s^2. *b*) 9.20 ft/s^2 ←.
16.49 *a*) 12.00 in. desde *A*. *b*) 9.20 ft/s^2 →.
16.50 *a*) 2.50 m/s^2 →. *b*) 0.
16.51 *a*) 3.75 m/s^2 →. *b*) 1.25 m/s^2 ←.
16.55 A: 0.885 m/s^2 ↓, *B*: 2.60 m/s^2 ↑.
16.56 A: 0.273 m/s^2 ↓, *B*: 2.01 m/s^2 ↓.
16.57 A: 359 lb, *B*: 312 lb.
16.58 A: 275 lb, *B*: 361 lb.
16.59 *a*) 0.741 rad/s^2 ↺. *b*) 0.857 m/s^2 ↑.
16.60 *a*) 2 800 N. *b*) 15.11 rad/s^2 ↻.
16.63 *a*) 3.00 *g*/*L* ↻. *b*) 1.000 *g* ↑. *c*) 2.00 *g* ↓.
16.64 *a*) 1.000 *g*/*L* ↻. *b*) 0. *c*) 1.000 *g* ↓
16.65 *a*) 1.000 *g*/*L* ↻. *b*) 0.866 *g* ←.
c) 1.323 *g* ⦤ 49.1°.
16.66 *a*) 0.500 *g* ↑. *b*) 1.500 *g* ↓
16.67 *a*) 0. *b*) 1.000 *g* ↓.
16.69 *a*) 1.597 s. *b*) 9.86 ft/s. *c*) 19.85 ft.
16.70 *a*) 1.863 s. *b*) 9.00 ft/s. *c*) 22.4 ft.
16.72 *a*) v_0/r ↺. *b*) $v_0/\mu_k g$. *c*) $v_0^2/2\mu_k g$.
16.76 *a*) 12.08 rad/s^2 ↻. *b*) $\mathbf{A}_x$ = 0.750 lb ←, $\mathbf{A}_y$ = 4.00 lb ↑.
16.77 *a*) 24.0 in. *b*) 8.05 rad/s^2 ↻.
16.78 *a*) 107.1 rad/s^2 ↻. *b*) $\mathbf{C}_x$ = 21.4 N ←, $\mathbf{C}_y$ = 39.2 N ↑.
16.79 *a*) 150.0 mm. *b*) 125.0 rad/s^2 ↻.
16.81 *a*) 1 529 kg. *b*) 2.90 mm.
16.82 13.64 kN →.
16.84 *a*) 1.500 g ↓. *b*) 0.250 mg ↑.
16.85 *a*) 1.286 g ↓. *b*) 0.571 mg ↑.
16.86 *a*) 2.50 g ↓. *b*) 0.375 mg ↑.
16.87 150.1 N ⦤ 83.2°.
16.88 *a*) 9.66 rad/s^2 ↺. *b*) 5.43 lb · ft ↺.
16.89 *a*) 13.50 rad/s^2 ↺. *b*) 6.79 N · m ↺.
16.95 2.55 ft.
16.96 $\tan \beta = \mu_s(1 + r^2/\bar{k}^2)$.
16.97 *a*) 2.27 m o bien 7.46 ft. *b*) 0.649 m o bien 2.13 ft.

16.98 *a*) rueda sin deslizarse
b) 15.46 rad/s^2 ↻, 10.30 ft/s^2 →.
16.99 *a*) rueda sin deslizarse
b) 23.2 rad/s^2 ↻, 15.46 ft/s^2 →.
16.100 *a*) se desliza. *b*) 4.29 rad/s^2 ↺, 9.66 ft/s^2 →.
16.101 *a*) se desliza. *b*) 12.88 rad/s^2 ↺. 3.22 ft/s^2 ←.
16.102 *a*) 17.78 rad/s^2 ↺. 2.13 m/s^2 →. *b*) 0.122.
16.105 *a*) 8.89 rad/s^2 ↺. 1.067 m/s^2 ←. *b*) 0.165.
16.106 *a*) 0.556 g ↓. *b*) 1.000 g ↓. *c*) 0.
16.107 *a*) 1.125 g ↓. *b*) 1.000 g ↓. *c*) 1.333 g ↓.
16.108 *a*) 0.765 g ↓. *b*) 1.000 g ↓. *c*) 0.667 g ↓.
16.109 *a*) 5.57 ft/s^2 ←. *b*) 0.779 lb. ←.
16.110 *a*) 64.4 rad/s^2 ↺. *b*) 26.8 ft/s^2 ↓.
16.111 *a*) 1.536 P/mr ↻. *b*) 0.884 $P(mg + P)$.
16.113 *a*) 0.1250 g/r ↻. 0.1250 g →, 0.1250 g ↓.
16.116 **P** = 16.84 N ⦣ 70.5; $\mathbf{M}_P$ = 0.228 N · m ↻.
16.117 *a*) 11.11 rad/s^2 ↻. *b*) 37.7 N ↑. *c*) 28.2 N →.
16.118 *a*) 97.8 N ↑. *b*) 60.3 N ↑.
16.119 *a*) 11.15 rad/s^2 ↺. *b*) 1.155 lb ←.
16.121 *a*) 12.04 rad/s^2 ↻. *b*) 1.795 lb ⦣ 20°.
16.124 6.40 N ←.
16.125 171.7 N →.
16.126 60.0 N →.
16.127 33.0 lb ↑.
16.128 2.32 lb ↓.
16.129 29.9 N ⦣ 60°.
16.130 23.5 N ⦣ 60°.
16.133 0.330 lb ←.
16.134 *a*) 15.00 N · m ↺. *b*) 120.0 N →, 88.2 N ↑.
16.135 *a*) 25.0 N · m ↺. *b*) 190.0 N →, 104.9 N ↑.
16.136 **A** = 1.565 lb ↑, **B** = 1.689 lb ↑.
16.138 **B** = 805 N ←, **D** = 426 N →.
16.139 **B** = 525 N ⦨ 38.1°, **D** = 322 N ⦪ 15.7°.
16.140 $(mv_D^2/6L)\tan\theta/\cos^3\theta$.
16.141 *a*) 9.36 m/s^2 ⦪ 27.1°. *b*) 278 N ↑.
16.142 *a*) 9.10 m/s^2 ⦪ 81.1°. *b*) 6.54 N.
16.143 *a*) *A*: 0.400 g/r ↺; *B*: 0.400 g/r ↻. *b*) 0.200 mg.
c) 0.800 g ↓.
16.144 *a*) 18.49 ft/s^2 ⦪ 25°. *b*) 8.38 rad/s^2 ↻.
16.146 *a*) 13.55 m/s^2 ↓. *b*) 2.34 m/s^2 ↓.
16.147 *a*) 6.40 ft/s^2 →. *b*) 45.4 rad/s^2 ↺.
16.151 10.39 lb · in. ubicado 20.8 in. debajo de *A*.
16.153 27.2 rad/s^2 ↺.
16.156 20.6 ft.
16.157 *a*) 0.513 g/L ↻. *b*) 0.912 *mg* ↑. *c*) 0.241 *mg* →.
16.159 1): *a*) 1.200 g/c ↻. *b*) 0.671 ⦨ 63.4°.
2): *a*) 1.412 g/c ↻. *b*) 0.706 g ↓.
3): *a*) 2.40 g/c ↻. *b*) 0.500 g ↓.
16.160 *a*) 0.333 g ↑. *b*) 1.667 g ↓.
16.161 23.7 rad/s^2 ↺.
16.163 *a*) 51.2 rad/s^2 ↻. *b*) 21.0 N ↑.
16.164 *a*) 57.8 rad/s^2 ↻. *b*) 20.4 N ↑.

CAPÍTULO 17

17.1 87.8 lb · ft.
17.2 5 230 rev.
17.3 0.760.
17.4 98.8 mm.
17.5 *a*) 293 rpm. *b*) 15.92 rev.
17.8 19.77 rev.
17.9 *a*) 6.35 rev. *b*) 7.14 N.
17.10 *a*) 2.54 rev. *b*) 17.86 N.
17.11 *a*) 9.73 ft/s ↓. *b*) 7.65 ft.
17.12 70.1 lb ↓.
17.13 80.7 lb ↓.
17.16 11.13 rad/s ↺.
17.17 3.27 rad/s ↻.
17.18 *a*) 1.732$\sqrt{g/l}$ ↻, 2.50 *W* ↑. *b*) 5.67 rad/s ↻, 4.50 lb ↑.
17.20 *a*) 3.94 rad/s ↻, 271 lb ⦩ 5.25°. *b*) 5.58 rad/s ↻. 701 lb ↑.
17.24 *a*) 3.00 m/s →. *b*) 30.0 N ←.
17.25 1.154$\sqrt{gs}$.
17.26 $\sqrt{gs}$.
17.27 *a*) 5.00 rad/s. *b*) 24.9 N ↑.
17.28 0.577$\sqrt{g/r}$.
17.29 *a*) 1.324$\sqrt{g/r}$ ↺. *b*) 2.12 *mg*.
17.30 *a*) 2.06 ft. *b*) 4.00 lb.
17.33 0.745 m/s →.
17.34 1.000 m/s →.
17.35 1.054 m/s →.
17.36 3.11 m/s →, 1.798 m/s ↓.
17.37 4.82 m/s →, 0.
17.39 3.71 rad/s ↺, 7.74 ft/s ↑.
17.40 0.775 $\sqrt{g/l}$ ←, 0.775 $\sqrt{g/l}$ ⦨ 60°.
17.42 *a*) 0.926$\sqrt{gL}$ ←. *b*) 1.225$\sqrt{gL}$ ←.
17.44 15.03 ft/s ↓.
17.45 84.7 rpm ↻.
17.46 110.8 rpm ↻.
17.47 0.770 m/s ←.
17.48 *a*) 21.2 N · m. *b*) 127.3 N · m.
17.50 *a*) 39.8 N · m. *b*) 95.5 N · m. *c*) 229 N · m.
17.52 1.212 N · m.
17.53 47.4 min.
17.54 2.84 s.
17.57 5.26 s.
17.59 3.88 s.
17.60 5.22 s.
17.61 3.13 s.
17.63 $\omega_0(1 + m_A/m_B)$
17.64 *a*) 686 rpm ↺, 514 rpm ↻. *b*) 4.18 lb · s ↑.
17.69 *a*) r^2gt sen $\beta/(r^2 + \bar{k}^2)$ ⦪ β. *b*) $\bar{k}^2$ tan $\beta/(r^2 + \bar{k}^2)$.
17.70 2.79 ft.
17.71 *a*) 2.55 m/s ↑. *b*) 10.53 N.
17.72 *a*) 27.6 ft/s ↓. *b*) 4.00 lb.
17.74 *a*) 2.12 m/s →. *b*) 0.706 m/ s →.
17.75 *a*) 0.706 m/s →. *b*) 1.235 m/s →.
17.77 *a*) $0.286r\omega_0/\mu_k g$. *b*) $0.286r\omega_0$ →, $0.286\omega_0$ ↻.
17.78 *a*) $2.50\bar{v}_0/r$. *b*) $\bar{v}_0/\mu_k g$.
17.79 84.2 rpm.
17.81 *a*) 2.54 rad/s. *b*) 1.902 J.
17.82 *a*) 5.00 rad/s. *b*) 3.13 rad/s.
17.83 18.07 rad/s.
17.84 −24.4 rpm.
17.86 disco: 337 rpm; placa: 23.5 rpm.
17.87 37.2 rpm.
17.88 *a*) 15.00 rad/s. *b*) 6.14 m/s.
17.89 *a*) 149.2 mm. *b*) 4.44 rad/s.
17.90 1.136 m/s.
17.94 1.542 m/s.
17.95 2.01 ft/s ←.
17.96 *a*) 25.2 rad/s ↻. *b*) 1545 lb →.
17.97 *a*) 10.00 in. *b*) 22.6 rad/s ↻.
17.98 *a*) 2.16 m/s →. *b*) 4.87 kN ⦣ 66.9°.
17.99 *a*) 79.2 mm. *b*) 1.992 m/s →.

17.100 242 mm/s →.
17.101 302 mm/s ←.
17.102 14.10 rad/s ↺.
17.105 $\omega_1/2$ ↻, $L\omega_1/4$ ↑.
17.106 *a*) $3v_1/L$ ↻, $v_1/2$ ↓. *b*) $3v_1/L$ ↺, $v_1/2$ ↑. *c*) 0, v_1 ↑.
17.107 $\pi L/3$.
17.108 $(2 + 5 \cos \beta)\omega_1/7$ ↺, $(2 + 5 \cos \beta)\bar{v}_1/7$ ←.
17.110 $6v_1 \text{ sen } \beta/(1 + 3 \text{ sen}^2 \beta)L$ ↻.
17.112 $0.750\ v_0/L$ ↻, $0.910\ v_0$ ∠ 74.1°.
17.113 $0.706\ v_0/L$ ↻, $0.949\ v_0$ ∠ 87.9°.
17.114 0.366.
17.115 8.80 ft/s.
17.116 5.12°.
17.117 55.9°.
17.120 *a*) 2.86 in. *b*) 2.05 in.
17.121 *a*) 3.85 ft/s↓. *b*) 5.13 rad/s ↻.
17.122 *a*) 0.256 ft/s.
17.123 $0.650\sqrt{gL}$ →.
17.124 $0.866\sqrt{gL}$ →.
17.125 725 mm.
17.126 447 mm.
17.128 *a*) 2.60 rad/s ↻. *b*) 1.635 m/s ∠ 53.4°.
17.131 *a*) $\mathbf{v}_A = 0$, $\boldsymbol{\omega}_A = v_1/r$ ↻; $\mathbf{v}_B = v_1$ →; $\boldsymbol{\omega}_B = 0$.
b) $\mathbf{v}'_A = 2v_1/7$; $\mathbf{v}'_B = 5v_1/7$.
17.132 $1.25\ v_0/r$.
17.133 *a*) $\mathbf{v}_A = (v_0 \text{ sen } \theta)\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_B = (v_0 \cos \theta)\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\omega}_A = v_0\ (-\text{sen}\,\theta\ \mathbf{i} + \cos \theta\ \mathbf{j})/r$, $\boldsymbol{\omega}_B = 0$. *b*) $\mathbf{v}'_B = (5\ v_0 \cos \theta/7)\mathbf{i}$.
17.134 $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 2.65$ rad/s ↻, $\boldsymbol{\omega}_{BC} = 13.25$ rad/s ↺.
17.135 **A** = 100.1 N ↑, **B** = 43.9 N →.
17.136 *a*) 118.7 rev. *b*) 7.16 s.
17.138 *a*) 53.1°. *b*) $1.095\sqrt{gL}$ ∠ 53.1°.
17.139 7.83 N →, 7.35 N ↑.
17.141 *a*) $1.500\ v_1/b$ ↻. *b*) $0.791\ v_1$ ∠ 18.4°.
17.143 *a*) 4.81 rad/s ↻. *b*) 6.81 rad/s ↻.
17.145 $0.400\ r$
17.146 *a*) 1.286 rad/s ↺. *b*) 0.719 lb →, 1.006 lb ↑.

CAPÍTULO 18

18.1 0.357 kg · m²/s; $\theta_x = 48.6°$, $\theta_y = 41.4°$, $\theta_z = 90°$.
18.2 $0.250\ mr^2\omega_2\ \mathbf{j} + 0.500\ mr^2\omega_1\mathbf{k}$.
18.3 $(ma^2\omega/12)(3\ \mathbf{j} + 2\ \mathbf{k})$.
18.4 11.88°.
18.7 *a*) $0.276\ ma^2\omega$. *b*) 25.2°.
18.8 *a*) $0.432\ ma^2\omega$. *b*) 20.2°.
18.9 −(1.747 lb · ft · s)**i** + (3.59 lb · ft · s)**j** + (0.0582 lb · ft · s)**k**.
18.10 (1.848 lb · ft · s)**i** − (0.455 lb · ft · s)**j** + (1.118 lb · ft · s)**k**.
18.11 *a*) 2.91 rad/s. *b*) 0.0551 rad/s.
18.12 (0.320 kg · m²/s)**i** − (0.009 kg · m²/s)**j** − (467 kg · m²/s)**k**.
18.15 *a*) $mr^2\omega\ (0.379\ \mathbf{i} - 0.483\ \mathbf{j})$. *b*) 51.9°.
18.16 *a*) (0.063 kg · m²/s)**i** + (0.216 kg · m²/s)**j** .
b) −(0.513 kg · m²/s)**i** + (0.216 kg · m²/s)**j**.
18.19 *a*) −(1.041 lb · ft · s)**i** + (1.041 lb · ft · s)**j** + (2.31 lb · ft · s)**k**. *b*) 147.5°.
18.20 *a*) −(1.041 lb · ft · s)**i** − (1.041 lb · ft · s)**j** + (2.31 lb · ft · s)**k**. *b*) 32.5°.
18.21 226 lb.
18.22 2.66 s.
18.23 *a*) −(0.300 m/s)**k**. *b*) −(0.962 rad/s)**i** − (0.577 m/s)**j**.
18.24 *a*) (0.300 m/s)**j** .
b) −(3.46 rad/s)**i** + (1.923 rad/s)**j** − (0.857 rad/s)**k**.
18.25 *a*) $(F\Delta t/m)\mathbf{i}$. *b*) $(F\Delta t/ma)(-1.714\ \mathbf{j} + 8.57\ \mathbf{k})$.
18.26 *a*) $(F\Delta t/m)\mathbf{i}$. *b*) $(F\Delta t/ma)(3.43\ \mathbf{j} - 5.14\ \mathbf{k})$.
18.29 *a*) $0.125\ \omega_0\ (-\mathbf{i} + \mathbf{j})$. *b*) $0.0884\ a\omega_0\ \mathbf{k}$.
18.30 *a*) $0.1031\ ma\omega_0\ \mathbf{k}$. *b*) $-0.01473\ ma\omega_0\ \mathbf{k}$.
18.31 $(0.429\ \bar{v}_0/c)\mathbf{i} + (0.429\ \bar{v}_0/a)\mathbf{k}$.
18.32 *a*) $-(6\ \bar{v}_0/7)\mathbf{j}$. *b*) $(m\bar{v}_0/7)\mathbf{j}$.
18.33 *a*) *C* y *B*. *b*) *C*: 8.16 s, *D*: 4.84 s. *c*) 0.520 s.
18.34 *a*) *D* y *A*. *b*) *D*: 6.82 s, *A*: 1.848 s. *c*) 0.347 s.
18.39 1.417 J.
18.40 $0.1250\ mr^2\ (\omega_2^2 + 2\omega_1^2)$.
18.41 $0.1250\ ma^2\omega^2$.
18.42 $0.228\ mr^2\omega^2$.
18.43 $0.1896\ mr^2\omega^2$.
18.44 1.296 J.
18.47 13.34 ft · lb.
18.48 12.67 ft · lb.
18.49 $0.1250\ ma^2\omega^2$.
18.50 $0.203\ ma^2\omega^2$.
18.53 16.75 ft · lb.
18.54 39.9 ft · lb.
18.55 (3.21 N · m)**k**.
18.56 $0.500\ mr^2\omega_1\omega_2\ \mathbf{i}$.
18.57 $0.1667\ ma^2\omega^2\ \mathbf{i}$.
18.58 $-0.958\ mr^2\omega^2\ \mathbf{k}$.
18.59 (2.91 lb · ft)**i**.
18.61 (1.890 N · m)**i** + (2.14 N · m)**j** + (3.21 N · m)**k**.
18.62 −(1.890 N · m)**i** − (2.14 N · m)**j** + (3.21 N · m)**k**.
18.65 **A** = −(12.00 N)**i**, **B** = −(4.00 N)**i**.
18.66 $\mathbf{C} = \dfrac{1}{6} mb\omega^2 \text{ sen } \beta \cos \beta\ \mathbf{i}$,
$\mathbf{D} = -\dfrac{1}{6} mb\omega^2 \text{ sen } \beta \cos \beta\ \mathbf{i}$.
18.67 **A** = (3.35 lb)**k**, **B** = −(3.35 lb)**k**.
18.68 **A** = −(1.103 lb)**j** − (0.920 lb)**k** ,
B = (1.103 lb)**j** + (0.920 lb)**k**.
18.71 *a*) (20.0 rad/s²)**k**. *b*) **A** = −(3.75 N)**k**, **B** = −(1.250 N)**k**.
18.72 *a*) $(3\ M_0/mb^2 \cos^2 \beta)\mathbf{j}$.
b) $\mathbf{C} = (M_0 \tan \beta/2b)\mathbf{k}$, $\mathbf{D} = -(M_0 \tan \beta/2b)\mathbf{k}$.
18.75 *a*) (2.33 lb · ft)**i** .
b) **A** = (0.466 lb)**j**, **B** = −(0.466 lb)**j**.
18.76 *a*) (0.873 lb · ft)**i** .
b) **A** = −(0.218 lb)**j** + (0.262 lb)**k** ,
B = (0.218 lb)**j** − (0.262 lb)**k**.
18.77 *a*) (0.1301 lb · ft)**i** *b*) **A** = −(0.0331 lb)**j** + (0.0331 lb)**k** ,
B = (0.0331 lb)**j** − (0.0331 lb)**k**.
18.78 **A** = −(0.444 lb)**j** − (0.383 lb)**k**,
B = (0.444 lb)**j** + (0.383 lb)**k**.
18.79 *a*) 10.47 N · m. *b*) 10.47 N · m.
18.80 4.29 kN · m.
18.81 −(0.457 lb · ft)**i**.
18.83 24.0 N.
18.84 1.138° ↻. El punto *A ascenderá*.
18.85 *a*) 38.1°. *b*) 11.78 rad/s.
18.86 13.46 rad/s
18.87 *a*) 53.6°. *b*) 8.79 rad/s
18.88 $\omega = 10 \cdot 20$ rad/s.
18.89 5.45 rad/s.
18.90 2.11 N ∠ 18.7°.
18.93 *a*) **C** = −(123.4 N)**i**, **D** = (123.4 N)**i** .
b) **C** = **D** = 0.
18.94 91.2 rpm.
18.95 **A** = (0.1906 lb)**k**, **B** = −(0.1906 lb)**k**.
18.96 7.87 rad/s

18.99 $(11.23\ \text{N} \cdot \text{m}) \cos^2 \theta\ \mathbf{i} + (11.23\ \text{N} \cdot \text{m})$ $\text{sen}\ \theta \cos \theta\ \mathbf{j} - (2.81\ \text{N} \cdot \text{m})\ \text{sen}\ \theta \cos \theta\ \mathbf{k}$.
18.101 $\mathbf{C} = -(89.8\ \text{N})\mathbf{i} + (52.8\ \text{N})\mathbf{k}$, $\mathbf{D} = -(89.8\ \text{N})\mathbf{i} - (52.8\ \text{N})\mathbf{k}$.
18.102 *a*) $(0.1962\ \text{N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$ *b*) $\mathbf{C} = -(48.6\ \text{N})\mathbf{i} + (38.9\ \text{N})\mathbf{k}$, $\mathbf{D} = -(48.6\ \text{N})\mathbf{i} - (38.9\ \text{N})\mathbf{k}$.
18.103 *a*) $-(5.39\ \text{lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j}$. *b*) $\mathbf{A} = -(11.65\ \text{lb})\mathbf{i} + (3.49\ \text{lb})\mathbf{k}$, $\mathbf{M}_A = (5.53\ \text{lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (8.73\ \text{lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
18.104 *a*) $(1.382\ \text{lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i}$. *b*) $\mathbf{D} = -(6.70\ \text{lb})\mathbf{j} + (4.89\ \text{lb})\mathbf{k}$, $\mathbf{E} = -(1.403\ \text{lb})\mathbf{j} + (4.89\ \text{lb})\mathbf{k}$.
18.107 299 rpm.
18.108 55.3°.
18.109 1 666 rpm.
18.111 45.9 rpm, 533 rpm.
18.113 23.7°.
18.114 *a*) 52.7 rad/s. *b*) 6.44 rad/s.
18.115 *a*) 40.0°. *b*) 23.5°. *c*) 85.3°.
18.116 *a*) 56.1 rad/s. *b*) 5.30 rad/s.
18.125 *a*) $\theta_x = 52.5°$, $\theta_y = 37.5°$, $\theta_z = 90°$. *b*) 53.8 rev/h. *c*) 6.68 rev/h.
18.126 *a*) $\theta_x = 90°$, $\theta_y = 17.65°$, $\theta_z = 72.35°$. *b*) 44.8 rev/h. *c*) 6.68 rev/h.
18.129 *a*) 13.19°. *b*) 1 242 rpm (retrógrada).
18.130 *a*) 109.4 rpm; $\gamma_x = 90°$, $\gamma_y = 100.05°$, $\gamma_z = 10.05°$. *b*) $\theta_x = 90°$, $\theta_y = 113.9°$, $\theta_z = 23.9°$. *c*) precesión: 47.1 rpm; giro: 64.6 rpm.
18.131 *a*) 4.00 rad/s. *b*) 5.66 rad/s.
18.132 *a*) $\theta_0 \leq \theta \leq 180° - \theta_0$. *b*) $\dot{\theta}_{\text{máx}} = \dot{\varphi}_0 \text{sen}\ \theta_0 \cos \theta_0$ *c*) $\dot{\varphi}_{\text{mín}} = \dot{\varphi}_0 \text{sen}^2 \theta_0$
18.133 *a*) $30° \leq \theta \leq 150°$. *b*) $\dot{\varphi}_{\text{mín}} = 2.40$ rad/s. *e*) $\dot{\theta}_{\text{máx}} = 3.29$ rad/s.
18.134 *a*) $\dot{\varphi}_{\text{mín}} = 1.200$ rad/s. *b*) $\dot{\theta}_{\text{máx}} = 2.68$ rad/s.
18.137 *a*) 44.1°. *b*) $\dot{\varphi} = -8.72$ rad/s, $\dot{\psi} = 56.3$ rad/s.
18.138 *a*) 32.7 rad/s. *b*) $\varphi = -13.33$ rad/s, $\dot{\psi} = 44.3$ rad/s.
18.140 *a*) $\frac{1}{2}I'(\dot{\varphi}\ \text{sen}\ \theta)^2 + \frac{1}{2}I'\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\omega_z^2 + mge \cos \theta = E$.
18.147 $(0.234\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (1.250\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
18.148 *a*) $-(1.098\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s})\mathbf{i} + (1.098\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s})\mathbf{j} + (2.74\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s})\mathbf{k}$. *b*) 150.5°.
18.150 *a*) $-\frac{1}{6}\omega_0\mathbf{i} + \frac{1}{6}\omega_0\mathbf{j}$. *b*) $\frac{1}{6}\omega_0 a\mathbf{k}$.
18.151 $\frac{5}{48}ma^2\omega_0^2$.
18.153 *a*) 52.1 rad/s². *b*) $\mathbf{A} = -(2.50\ \text{N})\mathbf{i}$, $\mathbf{B} = (2.50\ \text{N})\mathbf{i}$.
18.154 *a*) 53.4°. *b*) 9.27 rad/s.
18.155 *a*) $(2.71\ \text{lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j}$. *b*) $\mathbf{F} = -(5.30\ \text{lb})\mathbf{i} - (1.988\ \text{lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_0 = (2.69\ \text{lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} - (4.42\ \text{lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
18.156 *a*) $\mathbf{A} = (1.786\ \text{kN})\mathbf{i} + (143.5\ \text{kN})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = -(1.786\ \text{kN})\mathbf{i} + (150.8\ \text{kN})\mathbf{j}$. *b*) $-(35.7\ \text{kN} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
18.157 1 326 rpm.

CAPÍTULO 19

19.1 1.047 ft/s, 65.8 ft/s².
19.2 0.950 mm, 239 mm/s.
19.3 1.225 m/s, 0.650 Hz.
19.4 *a*) 0.391 s, 2.55 Hz. *b*) 2.81 ft/s, 45.1 ft/s².
19.5 *a*) 0.324 s, 3.08 Hz. *b*) 12.91 mm, 484 m/s².
19.6 *a*) 10.75°. *b*) 6.04 ft/s².
19.7 *a*) 0.557 Hz. *b*) 293 mm/s.
19.9 *a*) 3.14 s. *b*) 6.40 m. *c*) 38.7°.
19.11 *a*) 5.49 m. *b*) 80.5 m/s² ↓.
19.12 *a*) 0.0352 s. *b*) 6.34 ft/s ↑, 64.9 ft/s² ↓.
19.13 0.445 ft ↑, 2.27 ft/s ↓, 114.7 ft/s² ↓.
19.14 *a*) 3.89°. *b*) 0.1538 m/s, 0.666 m/s².
19.17 *a*) 0.208 s, 4.81 Hz. *b*) 1.361 m/s, 41.1 m/s².
19.18 *a*) 0.416 s, 2.41 Hz. *b*) 0.680 m/s, 10.29 m/s².
19.19 *a*) 0.361 s, 2.77 Hz. *b*) 2.54 ft/s, 441 ft/s².
19.20 2.63 s.
19.23 *a*) 6.82 lb. *b*) 33.4 lb/ft.
19.24 *a*) 6.80 kg. *b*) 0.583 s.
19.25 *a*) 35.6 lb/in. *b*) 5.01 lb.
19.26 192.0 lb/ft.
19.27 *a*) 22.3 MN/m. *b*) 266 Hz.
19.30 *a*) 55.4 mm. *b*) 1.497 Hz.
19.34 16.3°
19.35 *a*) 1.737 s. *b*) 1.864 s. *c*) 2.05 s.
19.36 28.1 in.
19.37 *a*) 3.36 Hz. *b*) 42.6 mm.
19.38 *a*) 0.315 s. *b*) 0.665 ft/s.
19.39 *a*) 0.1957 s. *b*) 171.7 ft/s².
19.40 *a*) 0.491 s. *b*) 9.60 in./s.
19.43 *a*) 1.117 rad/s. *b*) 400 mm.
19.44 *a*) 2.28 s. *b*) 1.294 m.
19.45 75.5°.
19.46 0.379 Hz.
19.47 *a*) 1.067 s. *b*) 89.7 mm.
19.49 *a*) 0.933 s. *b*) 0.835 s.
19.50 *a*) 1.617 s. *b*) 1.676 s.
19.55 *a*) 2.21 Hz. *b*) 115.3 N/m.
19.56 3.03 Hz.
19.57 0.945 Hz.
19.58 $0.276\sqrt{k/m - g/4L}$.
19.59 *a*) 88.1 mm/s. *b*) 85.1 mm/s.
19.61 82.1 mm/s.
19.63 *a*) 21.3 kg. *b*) 1.838 s.
19.64 *a*) 0.826 s. *b*) 1.048 s.
19.65 *a*) 1.951 s. *b*) 1.752 m/s.
19.66 $4.86\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
19.69 $2\pi\sqrt{l/g}$.
19.70 3.18 s.
19.71 1.476 m/s, 31.1 m/s².
19.72 1.379 in., 888 in./s².
19.73 $0.289\ l$.
19.76 130.6 mm.
19.77 $0.276\sqrt{k/m - g/4L}$.
19.78 *a*) 0.715 s. *b*) 0.293 ft/s.
19.79 2.10 Hz.
19.80 0.387 s.
19.83 1.834 s.
19.84 $0.1899\sqrt{g/l}$.
19.85 1.327 s.
19.88 2.39 s.
19.89 $2\pi\sqrt{2m/3k}$.
19.90 0.911 Hz.
19.91 *a*) $0.1592\sqrt{(g/l)(ka^2/\omega l - 1)}$. *b*) $\sqrt{\omega l/k}$.
19.92 6.64 lb.
19.94 0.742 Hz.
19.96 $(2\pi/\cos \beta)\ \sqrt{m/6k}$.
19.97 *a*) 0.352 s. *b*) 0.352 s.
19.98 $1.814\ l/\sqrt{gr}$.
19.99 11.40 N.
19.100 *a*) 0.1304 ft (en fase). *b*) 1.464 ft (fuera de fase).
19.101 *a*) 10.99 lb/ft. *b*) 2.99 lb/ft.

19.102 $\sqrt{k/2m} < \omega_f < \sqrt{3k/2m}$.
19.105 $\omega_f < 8.16$ rad/s.
19.106 22.5 mm, 5.63 mm.
19.107 $\omega_f < 9.83$ rad/s. y $\omega_f > 17.02$ rad/s.
19.108 651 rpm.
19.109 *a*) 90.0 mm. *b*) 18.00 N.
19.112 *a*) 25.2 mm. *b*) $-0.437 \text{ sen}(\pi t)$ N.
19.113 Demuestre . . .
19.114 22.0 mm.
19.115 $\omega_f \leq 322$ rpm y $\omega_f \geq 329$ rpm.
19.116 783 rpm.
19.118 39.1 kg
19.120 $\omega_f \leq 254$ rpm and $\omega_f \geq 303$ rpm.
19.121 *a*) 4.17%. *b*) 84.9 Hz.
19.122 8.04%.
19.123 1) $|1/(1 - \omega_f^2/\omega_n^2)|$; (2) $|1/(1 - \omega_f^2/\omega_n^2)|$.
19.124 *a*) 1 399 rpm. *b*) 0.01669 in.
19.132 *a*) 0.01393. *b*) 0.0417 lb · s/ft.
19.133 *a*) 6.49 kip · s/ft. *b*) 230 kips/ft.
19.134 56.9 mm.
19.136 *a*) 6 490 lb/ft. *b*) 0.1939 s.
19.137 *a*) $\ddot{\theta} + (3\,c/m)\,\dot{\theta} + (3k/4m)\,\theta = 0$. *b*) $\sqrt{km/3}$.
19.139 0.0725 in.
19.141 $c/c_c \geq 0.707$.
19.143 *a*) 0.0905. *b*) 366 N · s/m.
19.144 *a*) −0.324 mm. *b*) 0.0884 mm.
19.145 13.01 mm.
19.146 *a*) 2 210 kN/m. *b*) 0.0286.
19.147 134.8 mm, 143.7 N.
19.149 *a*) 16.18 lb. *b*) 8.18 lb.
19.151 *a*) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = \delta_m\,(k \text{ sen}\,\omega_f\, t + c\omega_f \cos \omega_f\, t)$
donde $\omega_f = 2\pi v/L$.
b) $\delta_m\sqrt{k^2 + (c\omega_f)^2}/\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}$.
19.153 $R < 2\sqrt{LC}$.
19.154 *a*) E/R *b*) L/R
19.155 Trace . . .
19.156 Trace . . .
19.157 *a*) $kx_A + c\dfrac{d}{dt}(x_A - x_m) = 0$,
$m\dfrac{d^2x_m}{dt^2} + c\dfrac{d}{dt}(x_m - x_A) = P_m \text{ sen } \omega_f t$.
b) $\dfrac{1}{C}q_A + R\dfrac{d}{dt}(q_A - q_m) = 0$,
$L\dfrac{d^2q_m}{dt^2} + R\dfrac{d}{dt}(q_m - q_A) = E_m \text{ sen } \omega_f t$.
19.158 *a*) $m\dfrac{d^2x_m}{dt^2} + k_2(x_m - x_A) = P_m \text{ sen } \omega_f t$.
$C\dfrac{dx_A}{dt} + k_1x_A + k_2(x_A + x_m) = 0$
b) $L\dfrac{d^2q_m}{dt^2} + \dfrac{1}{C_2}(q_m - q_A) = E_m \text{ sen } \omega_f t$
$R\dfrac{dq_A}{dt} + \dfrac{1}{C_1}q_A + \dfrac{1}{C_2}(q_A - q_m) = 0$
19.159 *a*) $2\pi\sqrt{2a/3g}$. *b*) $0.1667\,a$.
19.161 1.785 s.
19.163 *a*) 6.16 Hz, 4.91 mm, 0.1900 m/s. *b*) 4.91 N, *c*) 0.1542 m/s ↓.
19.164 *a*) 0.316 L. *b*) $0.200\sqrt{g/L}$
19.166 1.456 m.
19.169 *a*) 5.75 N. *b*) 0.00710 mm.
19.170 *a*) $m\ddot{x} + 4Tx/l = 0$ *b*) $\pi\sqrt{ml/T}$.



Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
1 000 000 = 10^{6}	mega	M
1 000 = 10^{3}	kilo	k
100 = 10^{2}	hecto†	h
10 = 10^{1}	deca†	da
0.1 = 10^{-1}	deci†	d
0.01 = 10^{-2}	centi†	c
0.001 = 10^{-3}	mili	m
0.000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0. 000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0.000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0.000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0.000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	ato	a

† Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	⋯	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	⋯	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	⋯	rad/s
Área	Metro cuadrado	⋯	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	⋯	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	⋯	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	⋯	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	⋯	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	⋯	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

† Unidad suplementaria (1 revolución $= 2\pi$ rad $= 360°$).
‡ Unidad básica.

Centroides de áreas y líneas comunes

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular		$(1/3(a + b))$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular			$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica			$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Tímpano parabólico	$y = kx^2$	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de un círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI

Cantidad	Unidades de uso común en Estados Unidos	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s^2	0.3048 m/s^2
	in./s^2	0.0254 m/s^2
Área	ft^2	0.0929 m^2
	in.^{2}	645.2 mm^2
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	in.^{4}	0.4162×10^6 mm^4
de una masa	lb · ft · s^2	1.356 kg · m^2
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft^2	47.88 Pa
	lb/in.^{2} (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft^3	0.02832 m^3
	in.^{3}	16.39 cm^3
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J